CORSO

DI

MECCANICA

PRECEDUTO DA UNA INTRODUZIONE

SOPRA I PRINCIPII

DELLA GEOMETRIA ANALITICA E DEL CALCOLO INFINITESIMALE

E SEGUITO DA UNA APPENDICE

INTORNO

ALL' ACUSTICA E ALL' OTTICA

DI GIACOMO FOGLINI D. C. D. G.

PROFESSORE NEL COLL. ROMANO

CORSO
DI
MECCANICA

PRECEDUTO DA UNA INTRODUZIONE

SOPRA I PRINCIPII

DELLA GEOMETRIA ANALITICA
E DEL CALCOLO INFINITESIMALE

E SEGUITO DA UNA APPENDICE

INTORNO

ALL'ACUSTICA E ALL'OTTICA

DI GIACOMO FOGLINI D. C. D. G.

PROFESSORE NEL COLLEGIO ROMANO

VOLUME II.

Seconda Edizione accresciuta

ROMA
TIPOGRAFIA E LIBRERIA DI ROMA
DEL CAV. ALESSANDRO BEFANI
Via delle Stimate 23.
1872.

ERRATA				CORRIGE
PAG.	LIN.			
3	2	–	la quantità	le quantità
25	4	–	m (sen BDC	m (sen DBC
36	4	asc.	$x^{\frac{5}{2}}$	$x^{\frac{3}{2}}$
93	10	–	$2\,dg\,d^2y$	$2\,dy\,d^2y$
103	4	–	B′ — —	B′ = —
132	16	–	*si tolga*: adunque atteso il teorema (9) del moto uniforme la retta obliqua AD:	
133	1	asc.	$\beta^2 \cos^2 \alpha$	$\beta^2 \cos^2 \alpha$
»	3	asc.	$\beta \cos \alpha$	$\frac{x}{\beta \cos \alpha}$
140	1	asc.	AX	AY
147	15	–	$\frac{x'}{u' \cos \alpha'}$	$\frac{x}{u' \cos \alpha'}$
159	1	–	-0^m,	$=0^m$,
167	1	asc.	al punto A	al punto C
182	16	–	la forza,	la forza N,
214	2	asc.	dv	dx
250	4	asc.	d^2z_1	d^2x_1
295	5	–	cb^2.	cb^3
352	14	–	$y\,dx$)	$y\,dy$)
353	13	–	$x\,dz +$	$x\,dx +$
364	15	–	$2\mu g y^2 x$	$2\mu g y x^2$
399	11	–	$-2g$.	$-2y$.
400	10	–	$\frac{1}{2} = \frac{\mu}{\mu'}$	$= \frac{\mu}{\mu'}$
416	5	asc.	$u_1 dx$	$u_1 dy$
457	4	–	$=8^m$,	$=9^m$,
519	19	–	dicesi annullare	dicesi anulare
522	17	–	$\delta' = \frac{r}{2}$	$\delta = \frac{r}{2}$
553	13	–	*paralizzata*	*polarizzata*

Altri errori del volume primo.

PAG.	LIN.	ERRATA	CORRIGE
44 –	4 asc.	ed AY	ed AZ
194 –	8 asc.	che fanno le direzioni	che fa ciascuna delle direzioni
431 –	6 –	centrale AR.	centrale A'R.

PARTE SECONDA

DINAMICA

CAPO I.

DELL' URTO DE' CORPI SFERICI.

236. Le questioni che risguardano l' urto dei corpi sferici, si possono facilmente risolvere con que' soli principii che abbiamo già esposto e dichiarato nelle nozioni preliminari: egli è perciò che quantunque la teoria dell' urto appartenga al moto dei sistemi, pur nondimeno può esser per noi svolta e stabilita indipendentemente dalle leggi generali del moto di un punto o di un sistema. Da questa teoria particolare abbiamo divisato d' incominciare la Dinamica de' corpi solidi.

237. **Elasticità de' corpi: urto diretto ed obliquo.** Nella teoria dell' urto conviene distinguere i corpi elastici dai corpi molli: si chiamano *elastici* que' corpi, i quali essendo stati compressi per l'urto ed avendo così cangiato la loro forma, al cessare della forza di compressione, ripigliano o tendono a ripigliare la forma di prima; si dicono poi non elastici o *molli* quegli altri corpi, nei quali le molecole, dopo lo spostamento cagionato dall' urto o dalla percossa, non tendono a ricuperare il posto primitivo, ma nelle nuove situazioni si rimangono tra loro in equilibrio. Nessuno dei corpi in natura è forse perfettamente elastico o molle, ma si trovano tutti in uno stato compreso tra la perfetta elasticità e la mollezza perfetta: noi nell' urto de' corpi considereremo prima i due casi estremi; e ci faremo quindi

a trovare le formole pei corpi imperfettamente elastici, quali ce li presenta la natura.

L'urto tra due corpi può essere diretto ovvero obliquo, centrale od eccentrico. Se i centri di gravità dei due corpi che vanno ad urtarsi, si muovono sopra una medesima retta perpendicolare al piano tangente nel punto di contatto, allora l'urto è *diretto* e *centrale;* se poi la linea retta su cui cammina il centro di gravità di uno dei corpi, è normale al piano tangente, ma non passa pel centro di gravità dell'altro corpo, l'urto sarà *diretto* ed *eccentrico:* in fine se al piano tangente nel punto di contatto non riesce normale la retta percorsa dal centro di gravità dell'uno o dell'altro corpo, l'urto allora si dice *obliquo*.

Quando i corpi sono sferici ed omogenei almeno in ciascuno degli strati concentrici, l'urto diretto è anche centrale; perchè in essi il centro di gravità coincide sempre col centro di figura. Nel capo presente ci restringiamo alla considerazione di questi soli corpi; e la questione che dobbiamo trattare, è questa: *date le masse e le velocità con cui si urtano a vicenda due sfere omogenee e animate da un moto rettilineo ed uniforme di traslazione, determinare le loro velocità dopo l'urto.*

238. **Formola per determinare la velocità di due sfere omogenee e prive di elasticità dopo l'urto diretto.** Sieno rispettivamente m ed m' le masse, v e v' le velocità di due sfere omogenee e prive affatto di elasticità; e supponiamo dapprima che queste sfere si muovano uniformemente verso una stessa parte, da A in B (fig. 140.a), secondo la retta AB che congiunge i loro centri. Se v è maggiore di v', è chiaro che si andrà diminuendo sempre più la distanza tra i due corpi in moto, e tra loro succederà infine l'urto diretto o normale: in tale urto si esercita l'azione della sfera m sopra la sfera m', e la reazione di questa contro quella; e le due sfere seguiteranno ad agire l'una sull'altra, finchè pervengano ad una velocità comune, e procedano oltre nel loro cammino come se formassero un solo corpo. Pertanto dinotata con u la velocità comune alle due sfere dopo l'urto, sarà $u - v'$ la velocità acquistata dal globo urtato m' durante l'ur-

to, e $v - u$ sarà la velocità perduta dal globo urtante m nel medesimo tempo: quindi la quantità di moto che nell' urto acquista l' uno de' globi e perde l'altro, si esprimeranno (8) coi prodotti $m'(u - v')$ ed $m(v - u)$. Ma la nuova quantità di moto $m'(u - v')$, eccitata per l' urto nella massa m' secondo la direzione AB, rappresenta (13) la forza, ossia l'azione che si esercita da m contro m'; e la quantità di moto $m(v - u)$, distrutta per l'urto nella massa m secondo la stessa direzione AB, rappresenta la forza o la reazione di m' contro m: dunque essendo sempre all' azione uguale e contraria la reazione (15), si avrà l' equazione

$$m'(u - v') = m(v - u);$$

e da questa si ricava la formola

$$(l) \qquad u = \frac{mv + m'v'}{m + m'},$$

che ci fa conoscere la velocità delle due sfere dopo l' urto giusta la retta AB, sulla quale continuano a muoversi i loro centri di gravità o di figura. Nella medesima formola basterà prendere negativamente la velocità per es. v', per comprendervi il caso in cui le sfere s' incontrino movendosi da parti opposte.

La formola (l) possiamo anche stabilirla più brevemente in questo modo. Poichè nell'urto normale le forze, onde sono animate le due sfere, agiscono in una medesima direzione, e stante il principio della uguaglianza tra l' azione e la reazione, tanto si accresce la forza dell' una quanto si diminuisce quella dell' altra sfera; perciò la somma algebrica delle forze, ossia la somma delle quantità di moto da cui si misurano le forze, deve mantenersi la stessa avanti e appresso all' urto: ora se le velocità si considerino come positive o come negative, a seconda del verso in cui esse si dirigono, la somma delle quantità di moto che risiedono nelle due sfere, si esprime con $mv + m'v'$ innanzi all'urto, e dopo l' urto si esprime con $(m + m')u$: dunque si stabilisce di nuovo l'equazione (l) in ordine a due globi omogenei e privi affatto di elasticità,

i quali si urtino direttamente movendosi verso la stessa parte o in parti opposte.

239. Ecco tre conseguenze che discendono dalla formola (l).

1.° Se le *masse* m *ed* m′ *sono uguali tra loro, i due globi dopo l' urto si moveranno con una velocità uguale alla semi-somma o alla semi-differenza delle velocità primitive:* perocchè in questa ipotesi la formola diviene

$$u = \frac{m(v \pm v')}{2m} = \frac{1}{2}\,(v \pm v')\,;$$

e si deve adoperare l' uno o l' altro segno, secondo che i due globi si muovono verso una medesima parte o s' incontrano in direzioni opposte.

2.° *I due corpi sferici resteranno in riposo, quando movendosi da parti contrarie vengano ad urtarsi normalmente con velocità inversamente proporzionali alle loro masse*: infatti essendo per condizione $v : v' = m' : m$, ovvero $mv = m'v'$, risulterà

$$u = \frac{mv - m'v'}{m + m'} = 0.$$

3.° *Si avrà altresì la quiete dopo l' urto normale, se il globo* m *vada a percuotere un corpo* m′ *che sta fermo ed ha una massa infinita in paragone della massa* m : di vero in questo caso, a cagione di $v' = 0$, la formola (l) ci dà per la velocità comune dopo l'urto la espressione

$$u = \frac{mv}{m + m'} = \frac{m}{\infty}\,v = 0.$$

La condizione del presente corollario si verifica, allorquando una palla non elastica cade verticalmente sulla superficie della Terra, ovvero è lanciata normalmente contro un piano fisso e congiunto col globo terrestre.

240. Innanzi di passare ai corpi elastici, vogliamo sciogliere un problema relativo ai corpi privi di elasticità. — *Sopra una tavola*

orizzontale e ben levigata sono disposte a contatto in linea retta un numero n *di palle uguali: sono queste legate tra loro per mezzo di fili inestensibili che hanno tutti una stessa lunghezza* α, *e giusta la linea dei centri si comunica in un istante alla prima palla una certa velocità* β. *Quanto tempo dovrà passare, innanzi che l' ultima palla sia messa in movimento?*

Ossia che una palla non elastica vada a percuotere un' altra palla della medesima specie, oppure che la tragga dietro a sè con un dato grado di velocità, torna sempre lo stesso, e valgono nell' uno e nell' altro caso le medesime leggi. Fatta questa osservazione, poichè nella serie proposta di palle uguali la prima agisce sulla seconda in riposo e comincia a tirarla colla velocità β dopo di avere percorso lo spazio α, la prima e la seconda agiscono insieme sulla terza e la traggono dietro a sè con quella velocità con cui si sviluppa il secondo filo α, e così di seguito; perciò applicando al presente caso la formola (*l.* 238), avremo le espressioni

$$\beta, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{3}, \ldots, \frac{\beta}{n-1},$$

rispetto alle velocità con cui la prima palla, la seconda insieme colla prima, la terza colla prima e seconda, . . . , e la penultima insieme con tutte le palle precedenti svolgono e percorrono successivamente e con moto uniforme la lunghezza α dei varii fili. Laonde i tempi che nel sistema s'impiegano allo sviluppo successivo dei medesimi fili, si esprimeranno (9) coi rapporti

$$\frac{\alpha}{\beta}, \frac{2\alpha}{\beta}, \frac{3\alpha}{\beta}, \ldots, \frac{(n-1)\alpha}{\beta};$$

e così il tempo che deve passare, innanzi che l'ultima palla incominci a muoversi, si calcolerà colla formola

$$t=\left[1+2+3+\ldots+(n-1)\right]\frac{\alpha}{\beta}=\frac{n(n-1)}{2}\frac{\alpha}{\beta}.$$

241. Formole relative all' urto diretto dei corpi elastici. Nell' urto dei corpi dotati di una elasticità perfetta, conviene distinguere due periodi di tempo; quello in cui i corpi si comprimono a vicenda, e quello in cui si restituiscono alla forma primitiva. Nel tempo della compressione ogni cosa succede appunto, come ne' corpi privi affatto di elasticità; vale a dire il globo m agisce sul globo m', e questo reagisce contro di quello, ed ambidue i globi si schiacciano alquanto e seguitano a comprimersi, finchè non abbiano conseguito una velocità comune u: onde se supponiamo che le due sfere elastiche si muovano verso una medesima parte, e secondo la retta dei centri vengano ad urtarsi colle velocità v e v'; saranno, come nel primo caso, $(v-u)$ ed $(u-v')$ le rispettive velocità che perde la sfera m ed acquista la sfera m', durante lo schiacciamento e la compressione scambievole delle loro parti.

Questi stessi effetti si riproducono poi interamente nell' altro periodo di tempo, in cui si manifesta l' elasticità e le due sfere tendono a ritornare o ritornano difatto alla forma di prima. Imperocchè nei corpi perfettamente elastici, dopo la mutua compressione, le parti si restituiscono esattamente alla forma primitiva; e questa restituzione delle parti compresse si fa secondo la direzione del moto nel corpo urtante m, e contro una tale direzione nel corpo urtato m': in quanto le parti compresse delle due sfere si restituiscono alla forma di prima, nel secondo periodo dell' urto si eserciterà una nuova azione dalla sfera m contro m', e una nuova reazione dalla sfera m' contro m; in quanto poi la restituzione delle parti alla forma primitiva è perfetta ed esatta, la forza di restituzione sarà uguale alla forza di compressione, e perciò l' azione scambievole delle due sfere nel secondo periodo di tempo sarà uguale in intensità a quella che si è già esercitata tra le medesime nel primo periodo; da ultimo in quanto la restituzione delle parti si fa nel corpo urtante secondo la direzione del moto e nel corpo urtato contra una tal direzione, la loro azione e reazione si eserciterà rispettivamente in uno stesso verso nel primo e nel secondo periodo di tempo: esercitandosi dunque nel secondo periodo tra le due sfere a vicenda una nuova azione di pari intensità e nello stesso senso che nel primo periodo, è chiaro che nel tempo in

cui le sfere ripigliano la forma primitiva, si rinnovellano in tutto gli effetti già ottenuti nel tempo della compressione; sicchè la sfera m venendo di nuovo a përdere la velocità $(v - u)$, e la sfera m' acquistando di nuovo la velocità $(u - v')$, saranno $2(v - u)$ e $2(u - v')$ la perdita totale e l'acquisto di velocità fatto dalle due sfere durante l'urto.

Sieno pertanto, V e V' le rispettive velocità delle sfere m ed m' alla fine dell'urto: adoperando invece della quantità u la sua espressione già trovata colla formola (*l.* 238), otterremo quanto ai corpi del tutto elastici i due valori

$$(l') \quad \begin{cases} V = v - 2(v - u) = 2u - v = \dfrac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'} , \\ V' = v' + 2(u - v') = 2u - v' = \dfrac{(m' - m)v' + 2mv}{m + m'} . \end{cases}$$

In queste formole si dovrà sostituire $- v'$ in luogo di v', se le due sfere innanzi all'urto non si muovano verso una medesima parte, ma si vengano incontro l'una all'altra in direzione opposta.

242. Ricaviamo dalle due formole alcune conseguenze. 1.° *Se le masse* m *ed* m' *sono uguali, i due globi dopo l'urto normale si moveranno, scambiandosi le velocità:* perchè supposta $m = m'$, le formole (l') ci dànno

$$V = \frac{2m'v'}{m + m'} = v' , \quad V' = \frac{2mv}{m + m'} = v.$$

Onde i medesimi globi dopo l'urto ritorneranno indietro, ove s' incontrino venendo da parti opposte; e il globo m resterà in riposo, se vada a percuotere un globo m' che sta fermo.

2.° *Una palla elastica* m, *urtando in un corpo immobile o congiunto invariabilmente col globo terrestre, rimbalzerà indietro con quella stessa velocità che avea prima dell'urto:* di fatti in questo caso, dovendosi riguardare come infinita la massa m' del corpo per-

cosso, in paragone della massa m, ed essendo nulla la sua velocità v', dalla prima delle due formole (l') si avrà

$$V = 2u - v = \frac{2mv + 2m'v'}{m + m'} - v = \frac{2m}{\infty} v - v = - v.$$

Ancora osserviamo che *la massa* m *rimbalzerà indietro sul suo cammino, tutte le volte che movendosi incontri una massa più grande* m' *in riposo, e la percuota normalmente*: perchè essendo in tal caso $v' = 0$ ed $m' > m$, risulterà

$$V = \frac{(m - m')v}{m + m'} < 0;$$

cioè la velocità della massa m riuscirà sempre negativa, o contraria a quella che aveva innanzi all'urto nella direzione positiva.

3.° *Quando due palle elastiche s'imbattono insieme, venendo da parti opposte, con velocità inversamente proporzionali alle masse, retrocedono sempre con quelle medesime velocità onde erano animate innanzi all'urto*. In vero siccome abbiamo $mv = m'v'$ per ipotesi, e la velocità v' dobbiamo inoltre prenderla negativamente; così per mezzo delle due formole (l') otterremo

$$V = \frac{mv - m'v - 2mv}{m + m'} = - \frac{v(m + m')}{m + m'} = - v,$$

$$V' = \frac{mv' - m'v' + 2m'v'}{m + m'} = \frac{v'(m + m')}{m + m'} = v':$$

dunque la velocità sì dell'una come dell'altra palla è contraria di segno, ma la stessa in valore innanzi e dopo l'urto. Facciamo l'applicazione delle formole a qualche problema.

243. Problema I. *Due palle omogenee e del tutto elastiche si urtino direttamente con velocità uguali ed opposte: qual dovrà essere il rapporto delle loro masse, affinchè l'una delle due palle alla fine dell'urto rimanga in riposo?*

Sieno m, m' le rispettive masse delle palle; v, $-v$ le velocità uguali, con cui tra loro avviene l'urto da parti opposte: la velocità della palla p. es. m alla fine dell'urto, ci viene data dalla prima formola (l'. 241); e sarà

$$V = \frac{(m-m')v - 2m'v}{m+m'} = \frac{(m-3m')v}{m+m'} .$$

Laonde se dopo l'urto debba restare in quiete la palla m, si avrà

$$m - 3m' = 0 \ , \quad \frac{m}{m'} = 3 ;$$

adunque perchè la palla m si arresti compito l'urto, la sua massa dovrà essere tre volte più grande della massa m'.

244. Problema II. *Tre globi* m, m', m'' *omogenei e perfettamente elastici si trovano coi centri situati in una medesima retta, e giusta questa direzione il primo globo* m *è sospinto contro il secondo* m' *con una data velocità* a: *trovare la massa che deve avere questo secondo globo, affinchè la velocità da esso comunicata al terzo globo* m'' *nell'urtarlo, sia la maggiore che è possibile.*

Dinotiamo con V', V'' le velocità dei corpi m', m'' dopo l'urto: poichè questi due corpi dimorano in riposo, innanzi che sieno percossi l'uno dalla massa m e l'altro dalla massa m'; perciò rispetto ad essi la seconda formola (l') ci porgerà i valori

$$V' = \frac{2am}{m+m'} \ , \quad V'' = \frac{2V'm'}{m'+m''} .$$

Laonde la velocità che la massa m' comunica nell' urto alla massa m'', ha per espressione

$$V'' = \frac{4amm'}{(m+m')(m'+m'')} = \frac{4am}{\left(\frac{m}{m'}+1\right)(m'+m'')} ;$$

e diverrà massima, quando il denominatore

$$\left(\frac{m}{m'}+1\right)\left(m'+m''\right)$$

risguardato come funzione della quantità variabile m', conseguisce il più piccolo tra i suoi valori. Ora se noi in questa funzione facciamo le derivazioni e vi applichiamo le regole del numero (LXX), di leggieri riconosceremo che il più piccolo valore della medesima funzione risponde al valore positivo della quantità m', qual ci vien dato dalla equazione

$$-\frac{m}{m'^2}(m'+m'')+\frac{m}{m'}+1=0;$$

risponde cioè al valore $m'=\sqrt{mm''}$: dunquo per questo valore eziandio diviene un *maximum* la velocità V''; e così rendesi manifesto che il secondo globo comunicherà al terzo m'' la maggior velolicità possibile, allorquando la sua massa m' è media proporzionale geometrica tra le masse del primo e del terzo globo.

245. **Problema** III. *Immaginiamo un numero* n *di palle perfettamente elastiche, le quali abbiano le masse* m_1, m_2, m_3, ... m_n *decrescenti in progressione geometrica, e i centri situati in una medesima retta. Stando ferme tutte le altre, la prima palla vada a gettarsi sulla seconda con una velocità conosciuta* a: *si vuol sapere la velocità, che mediante l'urto verrà in fine a concepire l'ultima palla* m_n.

Significhiamo colla lettera q il rapporto che passa tra un termine qualunque della progressione, e il termine che precede immediatamento: avremo i valori

$$m_2=m_1q\ ,\ m_3=m_1q^2\ ,\ m_4=m_1q^3\ ,\ \ldots\quad .$$

Ciò posto, siccome la palla m_1 va a percuotere colla velocità impressa a la palla m_2 che sta in riposo; così dopo l'urto la velocità di questa seconda palla si esprimerà coll'uno o coll'altro membro della seconda equazione (*l'*. 241), purchè in esso si faccia $v'=0$, e si adoperino i simboli a, m_1 ed m_2 in luogo degli altri v, m ed m': di

tal modo la velocità eccitata per l'urto nella palla m_2, avrà per espressione il prodotto

$$a\frac{2m_1}{m_1+m_2} \;;$$

che stante la condizione $m_2=m_1q$, si riduce alla forma più semplice

$$a\frac{2}{1+q} \;.$$

Con questa velocità la seconda palla m_2 si muove quindi dal suo posto e va ad urtare la terza m_3, che si trova in riposo: ma se consideriamo bene la prima espressione, dobbiamo ammettere in generale che quando una palla elastica s'imbatte in un'altra in riposo e la urta direttamente, la velocità di questa si esprime col prodotto della velocità di percossa pel doppio rapporto tra la massa della palla urtante e la somma delle masse di ambedue le palle; dunque la palla m_3, per l'urto che sostiene dalla parte di m_2, riceverà una velocità espressa col prodotto

$$a\frac{2}{1+q}\cdot\frac{2m_2}{m_2+m_3}=a\,\frac{2}{1+q}\cdot\frac{2m_1q}{m_1q+m_1q^2}=a\left(\frac{2}{1+q}\right)^2 .$$

Si trovano per somigliante modo le velocità delle palle susseguenti m_4, m_5,... ; e sono

$$a\left(\frac{2}{1+q}\right)^3,\; a\left(\frac{2}{1+q}\right)^4,\ldots :$$

sicchè apparisce chiara la legge delle velocità successive; e secondo questa legge l'ultima palla m_n, terminato appena l'urto, si muoverà colla velocità

$$a\left(\frac{2}{1+q}\right)^{n-1} .$$

Del rimanente vede ognuno che essendo una frazione propria il rapporto q tra le masse in progressione, dovranno crescere dalla prima sino all'ultima le diverse velocità che si destano successivamente nelle varie palle. Ancora osserviamo che se le masse m_1, m_2, m_3,..., m_n sono tutte uguali; allora avendosi $q=1$, riusciranno tutte uguali ad a le velocità che si eccitano per l'urto nelle palle successive: e poichè in questo caso ciascuna palla, tosto che giunge a toccare la palla seguente, perde tutta la velocità ricevuta (242. 1.°) e si rimane in quiete; perciò si conchiude che *stando tra loro a contatto in linea retta una serie di globi elastici ed uguali, se il primo venga sospinto contro il secondo con un certo grado di velocità, con questa si vedrà muoversi solo l'ultimo globo e staccarsi dagli altri che resteranno tutti fermi.*

246. **Formole spettanti all'urto diretto delle sfere omogenee ed impefettamente elastiche.** Anche nel presente caso supponiamo che le due sfere m ed m' si muovauo verso una medesima parte, e si urtino direttamente colle rispettive velocità v e v': indicata con u la velocità comune all'una e all'altra sfera, sul finire della mutua compressione; si esprimeranno, come nel caso dei corpi in tutto elastici o privi affatto di elasticità, colle rispettive differenze $(v-u)$ ed $(u-v')$ le velocità che perde l'una sfera ed acquista l'altra durante la loro compressione. Nel tempo poi della restituzione allo stato di prima, quell'effetto non si rinnova che in parte: perchè non essendo le due sfere del tutto elastiche nè ritornando perfettamente alla forma primitiva, la loro forza di restituzione è minore della forza, con cui si sono già compresse a vicenda; e così nel secondo periodo di tempo perderà l'una delle due sfere o guadagnerà l'altra solo una parte della velocità già perduta o guadagnata nel primo periodo.

Rappresenti e un numero compreso tra lo zero e l'unità; la velocità perduta da m, e quella che guadagna m' nella restituzione delle parti, potranno rappresentarsi coi prodotti $e(v-u)$ ed $e(u-v')$; e perciò la perdita e l'acquisto totale che in velocità fanno rispettivamente le due sfere durante l'urto, saranno

$$(v-u)+e(v-u)=(1+e)(v-u)$$

$$=(1+e)\left(v-\frac{mv+m'v'}{m+m'}\right)=(1+e)\,\frac{(v-v')m'}{m+m'}\ ,$$

$$(u-v')+e(u-v')=(1+e)(u-v')$$

$$=(1+e)\left(\frac{mv+m'v'}{m+m'}-v'\right)=(1+e)\,\frac{(v-v')m}{m+m'}\ .$$

Quindi le velocità V e V' delle due sfere m ed m' dopo l'urto, si determineranno colle formole

$$(l'')\qquad \begin{cases} V=v-(1+e)\,\dfrac{(v-v')m'}{m+m'}\ , \\[2ex] V'=v'+(1+e)\,\dfrac{(v-v')m}{m+m'}\ ; \end{cases}$$

e in queste formole l'una o l'altra delle due velocità v e v' deve prendersi negativamente, quando le sfere s'incontrano procedendo da bande opposte.

247. Intorno alle formole ora trovate, dobbiamo notare tre cose: 1.° il numero e, che è diverso per le diverse specie di corpi, può essere considerato come misura della elasticità di cui è dotata ciascuna specie. Sia infatti P la forza, con cui nell'urto si comprimono le parti p. es. del corpo m, ed R la forza con cui le medesime parti si restituiscono più o meno alla forma di prima: siccome queste forze stanno tra loro (11) nella ragione diretta delle velocità $v-u$ ed $e(v-u)$, che il corpo m acquista o perde ne'due periodi della compressione e della restituzione; così si avrà

$$e=\frac{e(v-u)}{v-u}=\frac{R}{P}\ ,$$

cioè il numero e dinota il rapporto che passa tra la forza di restituzione delle parti e quella di compressione. Adunque per una stes-

sa compressione il numero e varierà nel medesimo modo che la forza di restituzione delle parti, o l'elasticità del corpo; ciò vuol dire che quel numero è proporzionale alla elasticità del dato corpo, e la rappresenta o misura: con questa conseguenza si accordano sufficientemente i risultati della osservazione e della esperienza.

2.° Il grado di elasticità, ossia il numero e, può determinarsi per le singole specie di corpi colla esperienza in questo modo. Lasciata a sè stessa una palla m, sicchè cada verticalmente su di un piano m' fisso ed orizzontale; si noti il tempo della caduta, ovvero si misuri l'altezza da cui si lascia cadere la palla: si potrà con ciò conoscere la velocità v, onde la palla percuote in fine il piano m', siccome spiegheremo nel capo III di questa parte. Si osservi inoltre nel rimbalzo o l'altezza a cui ascende la palla, o il tempo che essa impiega per salire a quella massima altezza: se ne potrà dedurre la velocità negativa V, da cui è animata la palla alla fine dell'urto. Quindi poichè col porre $m' = \infty$, e $v' = 0$ nella prima formola (l'') del numero precedente, otteniamo $V = -ev$; perciò rispetto alla data palla e ai corpi di somigliante specie, il grado di elasticità resterà determinato dal valore numerico $e = \frac{V}{v}$.

3.° Le formole (l'') si riducono alle due formole (l') quando si pone $e = 1$; e si convertono ambedue nell'unica formola (l), quando si suppone $e = 0$: dunque colle medesime formole (l'') potremo determinare il moto di qualunque specie di corpi, dopo l'urto scambievole; e per distinguere i varii casi, basterà che prendiamo il numero e tra i limiti 0 ed 1 quanto ai corpi imperfettamente elastici, e che facciamo $e = 0$ oppure $e = 1$ quanto ai corpi privi affatto o dotati in tutto di elasticità. Aggiungiamo la soluzione di tre problemi in ordine ai corpi della prima specie.

248. **Problema I.** *Conoscendosi l'elasticità e di due palle uguali, si domanda con qual velocità debba l'una* (m) *lanciarsi direttamente contro l'altra* (m') *che si muove già con una data velocità* β, *affinchè quella prima palla dopo l'urto si arresti e rimanga in riposo.*

Sia α la velocità che si cerca: conforme alla prima equazione (l''. 246), la velocità della palla m, dopo l'urto diretto, sarà generalmente

$$V=\alpha-(1+e)\,\frac{(\alpha-\beta)m'}{m+m'}=\alpha-\frac{(1+e)(\alpha-\beta)}{2}\ ;$$

e come una tal velocità, per condizione del problema, deve riuscir nulla, così si avrà la formola

$$2\alpha-(1+e)(\alpha-\beta)=0,$$

la quale ci somministra immediatamente il valore

$$\alpha=-\frac{1+e}{1-e}\,\beta.$$

Il segno negativo ond' è affetta la velocità α, vuol dire che i movimenti delle due palle debbono essere opposti innanzi all' urto, perchè l' una di esse resti immobile dopo seguìto l' urto.

249. **Problema** II. *Un globo omogeneo* m *va ad urtare normalmente un altro globo* m' *che sta in riposo: dopo l'urto il primo globo rimane fermo, ed il secondo si muove con una velocità uguale alla ennessima parte della velocità primitiva di* m. *Vogliamo trovare l'elasticità* e *comune ai due globi, e il rapporto tra la massa del secondo e quella del primo.*

Per giugnere al nostro intento, basta che nelle due formole (l'') facciamo $V=0$, $v'=0$, $V'=\frac{v}{n}$: di tal guisa avremo le due equazioni

$$v-\frac{(1+e)m'v}{m+m'}=0,\quad \frac{v}{n}=\frac{(1+e)mv}{m+m'}\ ;$$

delle quali la prima ci dà la relazione

$$m=em',$$

e la seconda ci porge il valore

$$\frac{1}{n}=\frac{(1+e)m}{m+m'}=\frac{(1+e)em'}{em'+m'} .$$

Per la qual cosa l'elasticità dei globi e il rapporto tra le loro masse, saranno

$$e=\frac{1}{n} , \quad \frac{m'}{m}=\frac{1}{e}=n .$$

250. **Problema** III. *Determinare le velocità* x *ed* x' *che devono avere due sfere omogenee* A *ed* A', *le quali si muovono secondo una medesima direzione* AA', *affinchè dopo l'urto normale la prima sfera* A *rimanga in riposo, e la seconda* A' *seguiti a moversi con una data velocità* β. *È nota l'elasticità* e *comune alle due sfere, e sono date le loro masse* m *ed* m'.

Per risolvere il problema, basterà fare $V=0$, $v=x$, $V'=\beta$, $v'=x'$ nelle formole (l'') del numero (246). Di tal modo avremo le due equazioni

$$x-\frac{(x-x')m'}{m+m'}-\frac{(x-x')em'}{m+m'}=0 ,$$

$$x'+\frac{(x-x')m}{m+m'}+\frac{(x-x')em}{m+m'}=\beta ;$$

le quali ci danno per l'incognita x' le due espressioni

$$x'=\frac{(em'-m)x}{m'+em'} , \quad x'=\frac{(m+m')\beta}{m'-em}-\frac{(m+em)x}{m'-em} .$$

Donde si ricavano le successive eguaglianze

$$\left(\frac{em'-m}{m'+em'}+\frac{m+em}{m'-em}\right)x=\frac{(m+m')\beta}{m'-em} ,$$

$$\frac{em'^2 + em^2 + 2emm'}{m' + em'}\, x = (m + m')\beta\,,$$

$$e(m + m')^2\, x = (m + m')(m' + em')\,\beta\,;$$

e quindi il valore

$$x = \frac{(m' + em')\beta}{e(m + m')} = \frac{1 + e}{e}\,\frac{m'\beta}{m + m'}\,,$$

che sostituito nella prima delle due espressioni superiori della x', ci fa conoscere anche il valore

$$x' = \frac{em' - m}{m' + em'}\,\frac{(m' + em')\beta}{e(m + m')} = \frac{(em' - m)\beta}{e(m + m')}\,.$$

251. **Moto del centro di gravità nell'urto diretto dei corpi sferici.** Innanzi di procedere all'urto obliquo, crediamo bene di dimostrare alcune proprietà del moto nel caso di due corpi sferici che movendosi equabilmente, vengono ad urtarsi a vicenda secondo la retta dei loro centri. La prima proprietà risguarda il centro del sistema, e consiste in questo che *il moto o la velocità del centro di gravità comune alle due sfere rimane la stessa innanzi e dopo l'urto.*

Sieno m ed m' le masse di due sfere omogenee, comunque elastiche o prive affatto di elasticità. Preso per origine un punto qualunque della retta, nella quale si muovono i due centri delle sfere; alla fine di un tempo t, innanzi o dopo l'urto, indichiamo con x, x', x_1 le rispettive ascisse o le distanze dei centri proprii e del centro comune delle due sfere dalla origine fissa: saranno dx, dx', dx_1 gli spazii infinitesimi che nel consecutivo tempo dt descrivono rispettivamente con moto uniforme le masse m, m', e il comune lor centro; e però le velocità corrispondenti v, v', e v_1 innanzi all'urto, ovvero V, V', e V_1 dopo l'urto, si esprimeranno (9) coi rapporti

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dx'}{dt}, \frac{dx_1}{dt}.$$

Ora (109. f') abbiamo generalmente la formola

$$x_1 = \frac{mx + m'x'}{m + m'}.$$

che mediante la differenziazione e la divisione per dt, diviene

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt}}{m + m'};$$

dunque la velocità che possiede il centro di gravità delle due sfere, prima dell'urto sarà

$$v_1 = \frac{mv + m'v'}{m + m'},$$

e dopo l'urto (246. l'') sarà

$$V_1 = \frac{mV + m'V'}{m + m'} =$$

$$\frac{m\left[v - (1+e)\frac{(v-v')m'}{m+m'}\right] + m'\left[v' + (1+e)\frac{(v-v')m}{m+m'}\right]}{m + m'}$$

$$= \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Laonde il centro di gravità del sistema, o delle due sfere, si muove uniformemente; e la sua velocità costante ha lo stesso valore avanti e dopo l'urto. Questo teorema è un caso particolare di un principio generale, che noi esporremo nel capo XI di questa seconda parte, in ordine alla conservazione del centro di gravità.

232. **Conservazione delle forze vive, o loro perdita nell'urto dei corpi.** La seconda proprietà nell'urto dei corpi si riferisce alle forze vive, le quali, giusta un teorema di Carnot, nei diversi casi si mantengono costanti o si diminuiscono con una legge determinata. Il primo a introdurre nella Meccanica l'espressione di *forza viva*, fu Leibnitz; il quale nel fare uso di questo vocabolo ebbe in mira di distinguere la forza di un corpo che si muove attualmente, dalla forza di quegli altri corpi che tendono bensì a muoversi, ma di fatto non si muovono per ragione di qualche ostacolo che si frapponga: questa seconda forza fu detta *forza morta*, per opposizione alla prima. La controversia che surse allora fra i dotti di quel tempo, e si dibattè per molti anni dappoi, fu più di parole che d'altro. Imperocchè in ambidue i casi, nel caso cioè di un corpo in movimento, e nel caso di un corpo che esercita una pressione contro l'ostacolo da cui è ritenuto, la forza si misura sempre col prodotto della massa per la velocità, colla quale il corpo si muove o tende a muoversi, siccome allora sostenevano i discepoli di Descartes, e noi abbiamo dimostrato nelle nozioni generali al numero (13); nulladimeno si deve anche ammettere ciò che asseriva Leibnitz co' suoi seguaci, vale a dire che un certo effetto della medesima forza sta nella ragione composta della massa e del quadrato della velocità. Di vero, se un corpo pesante si gettasse verticalmente in alto con quella velocità con cui si muove p. es. su di un piano orizzontale, salirebbe sempre (e noi lo vedremo nel capo III) ad una altezza proporzionale al quadrato della medesima velocità, in un tempo però tanto più lungo, quanto maggiore è questa velocità di proiezione: dunque, ove si faccia astrazione dal tempo, la forza risguardata nel detto effetto, o meglio quell'effetto medesimo, che è generato in un dato corpo dalla forza di proiezione, si può rappresentare col prodotto della massa pel quadrato della velocità. Un tal prodotto, sebbene non sia la vera misura delle forze, è ciò che s'intende col nome di *forza viva*.

Dichiarate queste cose, veniamo a dimostrare il teorema delle forze vive nell'urto dei corpi. A cagione delle due formole (*l'*. 246),

la differenza tra la somma delle forze vive innanzi all'urto e quella che ha luogo dopo l'urto, si esprime nel seguente modo:

$$mv^2+m'v'^2-(mV^2+m'V'^2)=$$

$$mv^2+m'v'^2-m\left[v-(1+e)\frac{(v-v')m'}{m+m'}\right]^2-m'\left[v'+(1+e)\frac{(v-v')m}{m+m'}\right]^2$$

$$=2(1+e)\frac{(v-v')^2mm'}{m+m'}-(1+e)^2\cdot\frac{(v-v')^2}{(m+m')^2}(mm'^2+m^2m')=$$

$$[2(1+e)-(1+e)^2]\frac{(v-v')^2mm'}{m+m'}=(1-e^2)\frac{(v-v')^2mm'}{m+m'};$$

ma dalle medesime formole (l'') si ricavano ancora i valori

$$\frac{m(V-v)^2}{(1+e)^2}=\frac{(v-v')^2mm'^2}{(m+m')^2},\quad \frac{m'(V'-v')^2}{(1+e)^2}=\frac{(v-v')^2m^2m'}{(m+m')^2}$$

che raccolti insieme per mezzo della somma ci porgono

$$\frac{(v-v')^2mm'}{m+m'}=\frac{m(V-v)^2+m'(V'-v')^2}{(1+e)^2};$$

dunque la differenza prenominata si ridurrà alla espressione

$$mv^2+m'v'^2-(mV^2+m'V'^2)=\frac{1-e}{1+e}\left[m(V-v)^2+m'(V'-v')^2\right].$$

Di qui s'inferisce che *nell'urto de'corpi succede generalmente qualche perdita di forza viva; la quale perdita peraltro è nulla quanto ai corpi del tutto elastici, ed è massima quanto ai corpi privi affatto di elasticità.* Onde *nei corpi perfettamente elastici la somma delle forze vive si conserva la stessa innanzi e appresso l'urto: nei corpi poi non elastici,* essendo $e=0$ ed insieme $V=V'=u$, *la perdita della forza viva per l'urto* viene espressa dal binomio

$$m(v-u)^2+m'(u-v')^2,$$

ed è *uguale* per conseguenza *alla somma delle forze vive che rispondono alla velocità perduta dall'uno de'corpi e a quella guadagnata dall'altro.*

253. **Velocità relative nell'urto de'corpi.** *Due corpi perfettamente elastici incontrandosi hanno anche questo di proprio, che le loro velocità relative sono di segno opposto ma uguali tra loro prima e dopo l'urto diretto e centrale.*

Qualunque sia la specie dei due corpi che s'incontrano, la differenza tra le loro velocità, in virtù delle solite formole (l''), si esprime dopo l'urto in questa guisa

$$V-V'=v-v'-(1+e)\frac{v-v'}{m+m'}(m+m')=-e(v-v');$$

e però se i corpi sono perfettemente elastici, si avrà

$$V-V'=-(v-v').$$

Ora le due differenze $(v-v')$ e $V-V'$ non sono altro, se non le velocità che ha l'uno dei due corpi relativamente all'altro considerato come in riposo prima e dopo l'urto: è dunque vera la proposizione asserita; e così esclusa l'azione di altre forze, il centro della massa m a due epoche ugualmente lontane dal principio e dalla fine dell'urto, si troverà ad uguali distanze dal centro della massa m'.

254. **Urto obliquo dei corpi sferici.** Quando i centri di due sfere omogenee non si muovono in una medesima retta, ovvero quando il centro dell'una sfera non si muove sulle retta normale al piano tangente nel punto di contatto coll'altra, l'urto che succede allora tra i medesimi corpi, è obliquo ma si può facilmente ridurre al caso dell'urto diretto. A questo fine basterà che nel punto di contatto si decomponga la velocità di ciascuna massa in due, l'una normale al piano tangente, e l'altra diretta in questo

piano: le prime componenti si modificano giusta le leggi dell'urto diretto, e le seconde restano invariate nell'urto; componendo dunque queste seconde velocità con quelle che risultano dall'azione delle prime, avremo in grandezza e direzione le velocità delle due sfere dopo l'urto obliquo. S'intenderà meglio la cosa dalla soluzione dei tre problemi seguenti, dei quali i primi due risguardano i corpi perfettamente elastici, e il terzo risguarda i corpi privi affatto di elasticità.

255. **Problema I.** *Date quanto alla grandezza e alla direzione le velocità di due sfere del tutto elastiche innanzi all'urto, determinare le grandezze e le direzioni delle loro velocità dopo l'urto.*

Le rette BC, B'C' (fig. 141.ª) rappresentino in grandezza e direzione le velocità v, v', colle quali vengono ad urtarsi obliquamente le sfere m ed m'; sia AA' la retta che passa pei loro centri C e C' al momento dell'urto, e TT' sia il comun piano tangente nel punto di contatto: in fine si notino con α ed α' gli angoli, che le direzioni delle velocità fanno colla retta AA'. Decomponiamo ciascuna delle velocità v e v' in due, l'una perpendicolare e l'altra parallela alla retta dei centri AA': le prime componenti

$$BE = v \operatorname{sen} \alpha\ ,\quad B'E' = v' \operatorname{sen} \alpha'$$

siccome sono parallele al piano tangente TT', così non eserciteranno alcuna azione nell'urto, nè per cagione di questo riceveranno in sè stesse verun cangiamento; le seconde componenti poi

$$BD = EC = v \cos \alpha\ ,\quad B'D' = E'C' = v' \cos \alpha'$$

sono quelle a cui deve attribuirsi l'urto delle sfere normalmente al piano tangente TT', e subiscono per conseguenza tutte quelle variazioni che hanno luogo nell'urto diretto. Pertanto a determinare le velocità delle due sfere dopo l'urto obliquo, basterà che troviamo prima le velocità V e V' risultanti dall'urto fatto direttamente colle sole componenti $v \cos \alpha$ e $v' \cos \alpha'$, e che dipoi componiamo le medesime V e V' colle due $v \operatorname{sen} \alpha$ e $v' \operatorname{sen} \alpha'$. Ora

se le due velocità $v \cos\alpha$ e $v'\cos\alpha'$ s'intendano in sè positive o negative a seconda delle loro direzioni, e si sostituiscano quindi nelle formole (l'. 241) in luogo di v e v', risultano i valori

$$(1)\quad \begin{cases} V = \dfrac{m - m'}{m + m'} v \cos\alpha + \dfrac{2m'}{m + m'} v' \cos\alpha', \\[2ex] V' = \dfrac{m' - m}{m + m'} v' \cos\alpha' + \dfrac{2m}{m + m'} v \cos\alpha : \end{cases}$$

preso adunque CK $=$ V e C'K' $=$ V', tirate le rette CH e C'H' rispettivamente uguali e parallele alle velocità BE $= v$ sen α e B'E' $= v'$sen α', e compiuti in fine i rettangoli HK ed H'K'; i due corpi m ed m' dopo l'urto si moveranno, l'uno colla velocità U espressa per la diagonale CF quanto alla grandezza e alla direzione, e l'altro colla velocità U' rappresentata pure dalla diagonale C'F'.

A fine poi di determinare analiticamente coteste velocità e le loro direzioni, si chiamino ω ed ω' gli angoli che formano CF e C'F' colla retta dei centri AA': saranno

$$U^2 = \overline{CH}^2 + \overline{CK}^2 = v^2 \text{sen}^2\alpha + V^2,\quad U'^2 = \overline{C'H'}^2 + \overline{C'K'}^2 = v'^2 \text{sen}^2\alpha' + V'^2,$$

$$\text{tang}\,\omega = \frac{CH}{CK} = \frac{v\,\text{sen}\,\alpha}{V},\quad \text{tang}\,\omega' = \frac{C'H'}{C'K'} = \frac{v'\text{sen}\,\alpha'}{V'};$$

e sostituiti quivi i valori (1) delle due quantità V e V', per determinare le velocità e le loro direzioni dopo l'urto obliquo delle due sfere elastiche, si avranno le formole

$$U^2 = v^2 \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{m - m'}{m + m'} v \cos\alpha + \frac{2m'}{m + m'} v' \cos\alpha'\right)^2,$$

$$U'^2 = v'^2 \text{sen}^2\alpha' + \left(\frac{m' - m}{m + m'} v' \cos\alpha' + \frac{2m}{m + m'} v \cos\alpha\right)^2,$$

$$\tang \omega = \frac{v \operatorname{sen} \alpha}{\frac{m-m'}{m+m'} v \cos \alpha + \frac{2m'}{m+m'} v' \cos \alpha'},$$

$$\tang \omega' = \frac{v' \operatorname{sen} \alpha'}{\frac{m'-m}{m+m'} v' \cos \alpha' + \frac{2m}{m+m'} v \cos \alpha}.$$

Lo stesso problema si risolve in modo del tutto simile quanto ai corpi imperfettamente elastici.

256. **Problema** II. *Tre sfere perfettamente elastiche* A, B, C, *sono situate ai tre vertici di un triangolo dato* ABC (fig. 142.ª): *si cerca il rapporto che deve passare fra le masse dei tre corpi, affinchè la sfera* A, *lanciata obliquamente contro la sfera* B, *rimbalzi sopra la sfera* C, *e ritorni poi alla sua posizione primitiva.*

Nel problema si suppone che al momento in cui le sfere si urtano tra loro, la linea dei centri sia perpendicolare al lato opposto del triangolo, e che i diametri delle sfere sieno piccolissimi rispetto ai lati del triangolo medesimo. In queste due supposizioni chiamiamo a, b, c, gli angoli del dato triangolo che corrispondono rispettivamente alle sfere A, B, C; esprimiamo inoltre con m, m', m'' le masse rispettive delle medesime sfere; conduciamo in fine dai vertici B, C, le perpendicolari BD, CE sopra i lati opposti: sussisterà la formola generale

$$\tang \omega = \frac{v \operatorname{sen} \alpha}{\frac{m-m'}{m+m'} v \cos \alpha + \frac{2m'}{m+m'} v' \cos \alpha'}, \tag{2}$$

che è la penultima di quelle già trovate nella soluzione del problema precedente. Quando la sfera A va ad urtare obliquamente la sfera B, attesa la piccolezza dei loro diametri, nella formola (2) si avrà $\alpha =$ ang. ABD; e di più dovrà essere $\omega =$ ang. DBC, affinchè dopo l'urto succeda il rimbalzo di A sopra la sfera C: dunque essendo $v' = 0$, la detta formola ci darà

$$\tang \mathrm{DBC} = \frac{\sen \mathrm{DBC}}{\cos \mathrm{DBC}} = \frac{v \sen \mathrm{ABD}}{\frac{m-m'}{m+m'}\, v \cos \mathrm{ABD}} \;;$$

e quindi si dedurranno successivamente le seguenti relazioni

$$(m-m') \sen \mathrm{DBC} \cos \mathrm{ABD} - (m+m') \sen \mathrm{ABD} \cos \mathrm{DBC} = 0 \,,$$

$$m(\sen \mathrm{BDC} \cos \mathrm{ABD} - \cos \mathrm{DBC} \sen \mathrm{ABD}) =$$

$$m' (\sen \mathrm{DBC} \cos \mathrm{ABD} + \cos \mathrm{DBC} \sen \mathrm{ABD}) \,,$$

$$m \sen(\mathrm{DBC} - \mathrm{ABD}) = m' \sen(\mathrm{DBC} + \mathrm{ABD}) \,,$$

$$m \sen [(90^\circ - c) - (90^\circ - a)] = m' \sen b \,,$$

$$m \sen(a-c) = m' \sen b \,, \quad \frac{m}{m'} = \frac{\sen b}{\sen(a-c)} \;.$$

Inoltre poichè la sfera A, dopo il rimbalzo sopra la sfera C, deve ritornare alla sua posizione primitiva; perciò considerando il secondo urto obliquo, nella formola generale (2) dovremo fare $\alpha =$ ang. BCE, ed $\omega =$ ang. ECA: si avrà dunque nel secondo urto, cioè nell'urto di A contro C,

$$\tang \mathrm{ECA} = \frac{\sen \mathrm{ECA}}{\cos \mathrm{ECA}} = \frac{\sen \mathrm{BCE}}{\frac{m-m''}{m+m''} \cos \mathrm{BCE}} \;;$$

e quindi si ricaveranno, come prima, le successive relazioni

$$(m-m'') \sen \mathrm{ECA} \cos \mathrm{BCE} - (m+m'') \sen \mathrm{BCE} \cos \mathrm{ECA} = 0 \,,$$

$$m(\sen \mathrm{ECA} \cos \mathrm{BCE} - \cos \mathrm{ECA} \sen \mathrm{BCE}) =$$

$$m''(\sen \mathrm{ECA} \cos \mathrm{BCE} + \cos \mathrm{ECA} \sen \mathrm{BCE}) \,,$$

$$m \operatorname{sen}(\mathrm{ECA} - \mathrm{BCE}) = m'' \operatorname{sen}(\mathrm{ECA} + \mathrm{BCE}),$$

$$m \operatorname{sen}[(90^\circ - a) - (90^\circ - b)] = m'' \operatorname{sen} c,$$

$$m \operatorname{sen}(b - a) = m'' \operatorname{sen} c, \quad \frac{m}{m''} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen}(b - a)}.$$

In conclusione le relazioni cercate, o i rapporti fra le tre masse m, m', m'', sono i seguenti:

$$\frac{m}{m'} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen}(a - c)}, \quad \frac{m}{m''} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen}(b - a)}.$$

257. **Problema** III. *Una palla* m *omogenea e affatto priva di elasticità va ad urtare obliquamente in un' altra palla* m', *che sta in riposo ed è della stessa specie che la prima. È data la velocità* β *della prima palla innanzi all'urto, e si conosce l'angolo* α *che la sua direzione fa colla retta dei centri all' istante dell' urto: si domanda la velocità, ond'è animata la stessa palla* m *al cessare della collisione.*

Si decomponga la data velocità β in due $\beta \operatorname{sen} \alpha$, $\beta \cos \alpha$, l' una perpendicolare e l'altra parallela alla retta dei centri CC' (fig. 143. a): la prima componente rimane intera dopo l'urto; e la seconda che sola influisce nell'urto, si cangia per cagione di questo (238. *l*), e diviene $\frac{m\beta \cos \alpha}{m + m'}$. Per la qual cosa rappresentando con U la velocità della palla m dopo l'urto, troveremo

$$\mathrm{U} = \beta \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{m^2}{(m + m')^2} \cos^2 \alpha}.$$

258. **Urto di una sfera contro un piano immobile.** Terminiamo la materia trattata in questo primo capo, coll'esporre le leggi del moto di un corpo sferico che va ad urtare colla velocità BC (fig. 144. a), e sotto un angolo α, contro un piano duro ed immobile PP'.

1.° Supponiamo che il globo sia privo affatto di elasticità. Si decomponga la velocità BC in due, l'una BD parallela e l'altra BE perpendicolare al piano: la prima componente non si altera punto per cagione dell' urto; ma la seconda componente rimane tutta distrutta (239. 3.°) dalla resistenza del piano fisso, essendo questo percosso normalmente con quella velocità componente dal corpo non elastico. Pertanto presa $CE' = BD$, il globo dopo l'urto continuerà a muoversi sul piano PP′ colla velocità rappresentata dalla retta CE′: e siccome si ha l'equazione $CE' = CE = BC \cos \alpha$, ed in conseguenza si ha pure la proporzione

$$CE' : BC = \cos\alpha : 1 ;$$

così veniamo a conchiudere che *una sfera non elastica cadendo obliquamente su di un piano immobile, dopo l'urto continua a muoversi lungo il piano con una velocità che sta a quella di prima, come il coseno dell'angolo d'incidenza sta al raggio.*

2.° Supponiamo che il globo sia perfettamente elastico. Decomposta, come nel caso precedente, la velocità BC nelle due altre BD parallela e BE perpendicolare al piano PP′; la grandezza e la direzione della prima componente rimane invariata nell' urto, la grandezza poi della seconda componente viene distrutta durante lo schiacciamento e alla fine dell'urto restituita al corpo (242. 2.°) nella opposta direzione. Adunque dal punto d'incidenza prese le rette CE′ e CD rispettivamente uguali e parallele alle rette BD e BE, ed ancora compiuto il rettangolo DE′; il corpo dopo l'urto si muoverà colla velocità $CB' = CB$, la cui direzione fa col piano immobile un angolo $\alpha' = \alpha$: e così *quando una sfera perfettamente elastica va ad urtare contro un piano immobile con un certo grado di velocità, rimbalza dal piano colla stessa velocità, e sotto un angolo di riflessione che è uguale all'angolo d'incidenza.*

3.° Sia il globo imperfettamente elastico. Dopo l'urto gli verrà restituita nella direzione opposta solo una parte della velocità componente BE; per es. gli verrà restituita la parte CD′ proporzionale al grado di sua elasticità: onde presa la retta CE′ uguale e paralle-

la a BD, e costruito il rettangolo D'E'; il globo rimbalzerà dal piano con una velocità CB'', che fa col medesimo piano un angolo α'' minore dell'angolo α. Ora abbiamo evidentemente

$$\text{tang}\,\alpha'' = \frac{CD'}{CE}\;,\quad \text{tang}\,\alpha = \frac{BE}{CE}$$

e quindi per le cose dette nel numero (247. 2.°) abbiamo ancora

$$\text{tang}\,\alpha'' : \text{tang}\,\alpha = CD' : BE = e : 1\;;$$

dunque *se una sfera imperfettamente elastica incontri con qualsiasi velocità un piano immobile, rimbalzerà da questo piano sotto un tale angolo di riflessione, la tangente del quale stia alla tangente dell'angolo d'incidenza come il rapporto tra le forze di restituzione e di compressione delle parti sta all'unità.*

In tutte le cose sopraddette abbiamo sempre supposto che i corpi, urtandosi a vicenda, si movessero prima e dopo l'urto equabilmente e in linea retta: se il moto dei corpi e dei loro centri fosse vario, converrebbe allora determinare le loro velocità per quell'istante di tempo in cui succede la collisione; e tutti i teoremi e le leggi dimostrate in questo capo varrebbero solo per quelle velocità, dalle quali si trovano animati i corpi al principio e alla fine dell'urto. In qual maniera possano poi determinarsi le velocità nel moto vario e rettilineo, si farà manifesto dalle cose che siamo per dire nel capo seguente.

CAPO II.

MOVIMENTO RETTILINEO DI UN PUNTO MATERIALE LIBERO.

259. **Forza acceleratrice e forza motrice.** Abbiamo già detto nelle nozioni generali (7) che il moto rettilineo di un punto materiale è uniforme o vario, secondo che questo punto viene deter-

minato a muoversi per un solo impulso, ovvero è sollecitato continuamente da una forza; e che inoltre il moto prodotto da una forza continua è comunque vario se l'azione della forza sul punto si cangia di intensità ad ogni istante, ed è uniformemente vario se l'azione della forza si mantiene sempre la stessa.

Nel moto rettilineo ed uniformemente vario, sia esso accelerato o ritardato, la forza continua e costante si misura (11. 14) colla velocità φ prodotta nel mobile in ciascuna unità di tempo: egli è per questo che una tale velocità si chiama *forza acceleratrice* o *accelerazione;* e si deve prendere positiva o negativa, secondochè l'azione della forza si esercita sul punto materiale nello stesso verso o nel verso opposto al moto iniziale, od anche agli spazii che si descrivono dal mobile.

Quanto al moto rettilineo comunque vario, a un istante qualsiasi la forza avrà una grandezza ed energia determinata; e se agisse quinci con siffatta energia, nell'unità di tempo farebbe variare la velocità del punto mobile di una certa quantità φ: cotesta quantità è la misura della forza, e si dice l'*accelerazione* all'istante che si considera; cioè nel moto comunque vario alla fine di un dato tempo chiamasi *forza acceleratrice* o semplicemente *accelerazione* la velocità φ che in ciascuna unità di tempo produrrebbe nel punto materiale la forza continua, se subito dopo il dato tempo di varia divenisse costante, ed agisse invariabilmente coll'intensità che possiede in quell'istante.

Dinotiamo con m la massa del punto materiale che è soggetto all'azione continuata di una forza qualunque: il prodotto $m\varphi$ della massa per la forza acceleratrice, è ciò che si appella *forza motrice* del punto; onde nel moto vario l'accelerazione si ottiene col dividere la forza motrice per la massa del punto mobile.

260. Equazione del movimento uniforme. Le diverse posizioni di un punto mobile M si riferiscano a un punto fisso A, preso sulla retta che è percorsa con moto uniforme dal primo punto. Indichiamo con v la velocità ossia lo spazio descritto nelle singole unità di tempo, e con s la distanza del punto mobile dalla origine

fissa alla fine del tempo t; se a $t=0$ risponde $s=0$, la relazione tra le due quantità variabili s , t si esprimerà (9) colla equazione

$$(m) \qquad s=vt\ ;$$

se poi a $t=0$ corrisponde $s=a$, allora la detta relazione si esprimerà con

$$(m') \qquad s=a+vt\ ,$$

e sarà questa l'equazione più generale del moto uniforme. Per mezzo dell'una o dell'altra equazione si determina la posizione del punto materiale M alla fine di un dato tempo t, e colle medesime equazioni possono risolversi quei problemi, che appartengono al movimento rettilineo ed uniforme dei corpi.

Così, a cagion di esempio, *se conoscendosi la distanza* a *tra due punti che incominciano insieme a muoversi nella medesima direzione verso una stessa parte e colle velocità date* v *e* v', *si voglia sapere o l'istante in cui l'uno sarà raggiunto dall'altro, o la posizione del punto in cui avverrà il mutuo incontro*; basterà prendere per origine fissa il punto di partenza del mobile M, che supponiamo situato dietro l'altro mobile M' ed animato dalla velocità v maggiore dell'altra v'. Le rispettive equazioni dei due movimenti saranno

$$s=vt\ ,\ s'=a+v't:$$

fatto $s=s'$, avremo l'istante e il punto d'incontro dei due mobili dalle due equazioni

$$t=\frac{a}{v-v'}\ ,\ s=\frac{av}{v-v'}\ ;$$

le quali ci esprimono il tempo trascorso dal principio del moto fino al momento dell'incontro, e la distanza interposta tra l'origine e il punto in cui i due mobili si uniscono insieme.

Ancora osserviamo che a rappresentare un movimento uniforme, invece della equazione finita (m) ovvero (m'), si può fare uso dell'equazione differenziale

$$\frac{ds}{dt}=v;$$

la quale, considerata v come quantità costante, si deduce mediante la differenziazione dall'una e dall'altra di quelle prime formole.

261. **Equazioni del moto rettilineo comunque vario.** Un punto materiale M, sollecitato da una forza qualunque, si muova liberamente in linea retta: alla fine del tempo t sieno s lo spazio percorso, e v la velocità che risiede nel mobile; saranno ds l'incremento dello spazio, e dv la variazione della velocità nell'intervallo infinitamente piccolo dt che succede al tempo t. Ma questa variazione dv, prodotta nel mobile dall'azione della forza continua, è infinitesima in grandezza e si può trascurare in confronto della stessa velocità v: dunque potremo riguardare lo spazio piccolissimo ds come descritto dal punto materiale con moto uniforme, cioè colla sola velocità v, nell'intervallo di tempo dt; e però nel moto vario, come nel moto uniforme, si avrà (9) l'equazione differenziale

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

Oltre a ciò, se alla fine del tempo t si suppone che la forza divenga costante ed agisca sempre con quella intensità di cui è allora capace, essa nei singoli elementi di tempo dt produrrà nel punto M la stessa velocità infinitesima dv: dunque nella medesima ipotesi produrrà in un tempo $=1$ tante volte la velocità dv, quanti sono gli elementi dt contenuti nel tempo preso per unità; cioè durante questo tempo genererà nel mobile una velocità espressa dal prodotto $\frac{1}{dt}dv$, ovvero dal quoto $\frac{dv}{dt}$. Ma nel moto vario la velocità che in ciascuna unità di tempo la forza genererebbe nel punto mobile se dopo un tempo qualunque t divenisse costante, non è altro

(259) che l'accelerazione φ la quale ha luogo alla fine del medesimo tempo t; dunque nel moto vario sussisterà ancora quest'altra equazione

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Da ultimo porgendoci la prima delle due equazioni già trovate il valore $dt = \frac{ds}{v}$, la seconda potrà anche scriversi

$$\varphi = \frac{v\,dv}{ds}:$$

e poichè nell'ipotesi che la variabile t sia indipondente o l'incremento dt sia (LXI) costante, quella prima equazione per mezzo della differenziazione diviene $dv = \frac{d^2s}{dt}$; perciò la seconda si ridurrà anche alla forma

$$\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

In conclusione, considerato il tempo come una quantità variabile ed indipendente, al moto rettilineo comunque vario appartengono generalmente le quattro formole

$$(m'') \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \dfrac{ds}{dt}, \ \varphi = \dfrac{dv}{dt}, \\[2ex] \varphi = \dfrac{v\,dv}{ds}, \ \varphi = \dfrac{d^2s}{dt^2}; \end{array} \right.$$

delle quali però la terza e la quarta non sono che una conseguenza delle due prime equazioni, e spesso si adoperano utilmente in luogo di queste: è poi chiaro per la seconda formola che le due quantità φ e dv hanno sempre lo stesso segno; quindi la forza acceleratrice

sarà positiva o negativa, secondo che farà crescere o diminuire la velocità del punto materiale M. Esssendo propriamente due sole le equazioni generali del moto rettilineo, e somministrandoci due relazioni tra le quattro variabili v, s, t, φ; per risolvere un problema qualunque del movimento, converrà che nell'enunciazione del problema si contenga una terza relazione tra le medesime quantità: allora determinata ad arbitrio una dalle quattro quantità, è evidente che potranno anche determinarsi tutte le altre. Noi qui ci restringiamo a proporre e sciogliere alcuni di quei problemi, in cui viene data una relazione peculiare tra le due quantità φ ed s, essendo la forza acceleratrice una certa funzione della distanza del punto mobile da un punto fisso.

262. Problema I. *Un punto materiale è sollecitato verso un punto fisso con una forza proporzionale alle sue distanze da questo stesso punto: proponiamoci di trovare la velocità del mobile a una data distanza dal centro delle forze, e il tempo che dovrà impiegare per giugnere dalla sua posizione iniziale al medesimo centro.*

Supponiamo che il punto materiale non abbia alcuna velocità alla distanza iniziale a dal centro delle forze; chiamiamo x la distanza del mobile alla fine del tempo t, e μ la forza acceleratrice all'unità di distanza dal medesimo centro: sarà $s=a-x$, e $\mu:\varphi=1:x$; epperò si avranno ancora i valori

$$d^2s=-d^2x\,,\quad \varphi=\mu x\,.$$

Laonde adoperata la quarta tra le formole generali (m'') del numero precedente, nel caso attuale risulterà l'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu x;$$

la quale moltiplicata che sia per la quantità $2dx$, diviene

$$\frac{2dx\,d^2x}{dt^2}=-2\mu x\,dx\,.$$

Ora (XLVII) il primo membro di questa equazione è il differenziale della funzione $\frac{dx^2}{dt^2}$, e il secondo membro è pure il differenziale della funzione $-\mu x^2$; adunque presi gli integrali, e denotata con C una quantità costante, avremo

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\mu x^2 + C.$$

La quantità $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, attesa la prima formola (m''), rappresenta il quadrato della velocità v; e al principio del movimento per ipotesi sussistono insieme $x=a$, $v=0$; quindi la quantità costante C ha per valore il prodotto μa^2, e così a una distanza x del mobile dal centro delle forze sussisterà l'equazione

$$(1)\qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v^2 = \mu(a^2 - x^2),$$

ed ancora

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Da ciò s'inferisce che *la velocità del punto materiale nel centro delle forze sarà massima, ed uguale alla espressione* $a\sqrt{\mu}$; che *la medesima velocità si annullerà di nuovo alla distanza* $x = -a$, *alla quale si reca il mobile per cagione della forza preconcepita nel centro;* e che in fine *quella velocità riuscirà la stessa ad uguali distanze di qua e di là dal centro delle forze, intorno al quale il punto mobile va oscillando continuamente.*

Quanto alla seconda delle due questioni proposte, la formola (1) ci porge

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{-d\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}};$$

e in questa espressione si fa uso del segno negativo per la radice quadra, perchè accostandosi il punto materiale al centro delle forze, gli incrementi dt e dx sono opposti di segno. Integrando la medesima espressione differenziale, otteniamo (LXXXVIII) l'espressione finita

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a}$$

senza la giunta della quantità costante che è nulla, poichè al tempo $t=0$ corrisponde $x=a$. Fatto $x=0$, l'espressione diventa $\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$, ed appartiene al tempo che impiega il mobile per andare dalla posizione iniziale al centro di azione; ed essendo un tal valore indipendente dalla stessa posizione iniziale o dalla distanza a, si conchiude che *da qualunque distanza incominci a muoversi il punto materiale, arriverà sempre nello stesso tempo al centro delle forze.* La condizione del problema si verifica nelle oscillazioni delle corde sonore, e nei corpi pesanti che si movessero nell'interno del globo terrestre.

263. **Problema** II. *In un punto fisso risiede il centro di una attrazione inversamente proporzionale alla ennesima potenza delle distanze. Un punto mobile, abbandonato alla azione di quel centro, passa dalla distanza* a *alla distanza* $\frac{1}{4}$ a, *ed acquista la stessa velocità come se da una distanza infinita venisse alla detta distanza* a *dal centro: si cerca il numero esponente* n.

Sieno φ e μ le forze acceleratrici alla distanza x dal centro di attrazione, e ad una distanza presa per unità: secondo la legge con cui varia la forza, sarà $x^n : 1 = \mu : \varphi\left(= \frac{\mu}{x^n}\right)$; epperò adoperato $-dx$ invece dell' incremento ds, la terza formola (m''. 261) ci darà la relazione

$$\frac{v\,dv}{dx} = -\frac{\mu}{x^n}\ .$$

Fatta la moltiplicazione per dx e presi gli integrali, verrà (LXXXVII)

$$\frac{v^2}{2} = -\mu \int \frac{dx}{x^n} :$$

quindi se indichiamo con v_1, v_2 le velocità che il mobile acquista rispettivamente nel passare dalla distanza a alla distanza $\frac{1}{4}a$, e da una distanza infinita alla distanza a, avremo

$$v_1^2 = -2\mu \int_a^{\frac{1}{4}a} \frac{dx}{x^n} = 2\mu \left[\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_a^{\frac{1}{4}a}$$

$$= \frac{2\mu}{(n-1)a^{n-1}} (4^{n-1} - 1),$$

$$v_2^2 = -2\mu \int_\infty^a \frac{dx}{x^n} = 2\mu \left[\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_\infty^a = \frac{2\mu}{(n-1)a^{n-1}} .$$

E siccome per condizione si ha $v_1 = v_2$, così sarà pure

$$\frac{2\mu}{(n-1)a^{n-1}} = \frac{2\mu}{(n-1)a^{n-1}} (4^{n-1} - 1);$$

cioè

$$1 = 4^{n-1} - 1 , \log(2) = (n-1)\log(4) = 2(n-1)\log(2) , n = \frac{3}{2} .$$

Adunque la forza attrattiva che emana dal centro fisso, agisce nella ragione inversa della potenza $x^{\frac{3}{2}}$.

264. **Problema** III. *Un punto materiale si muove in linea retta per l'azione di una forza attrattiva, la quale si dirige a un centro fisso, ed è proporzionale alla ennesima potenza della distanza: tro-*

vare la distanza in cui dovrà cominciare il movimento del punto, affinchè questo abbia una data velocità β , *arrivando a una distanza* α *dal centro delle forze.*

Essendo μ l'attrazione all'unità di distanza, la forza attrattiva in una distanza qualunque x si esprimerà con $\varphi = \mu x^n$: quindi la terza formola (m'') del moto rettilineo diverrà

$$v\,dv = -\,\mu x^n dx\,,$$

ed integrata ci darà generalmente la relazione

$$v^2 = -2\mu \int x^n dx\,.$$

Per la qual cosa se chiamasi x_0 la distanza iniziale che si vuol trovare, starà l'equazione

$$\beta^2 = -2\mu \int_{x_0}^{\alpha} x^n dx = \frac{2\mu}{n+1}\left(x_0^{\,n+1} - \alpha^{n+1}\right);$$

e da essa si dedurrà il valore

$$x_0 = \left(\alpha^{n+1} + \frac{n+1}{2\mu}\,\beta^2\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

265. **Problema** IV. *Un punto materiale si muove in una linea retta ed è attirato per una forza proporzionale alla distanza, verso un centro di azione che si muove secondo la medesima retta con una velocità costante: sono date sì le posizioni iniziali del centro di azione e del punto materiale, e sì ancora la velocità costante* β *del primo e la velocità iniziale* β' *del secondo punto. Trovare la posizione del punto materiale a un'epoca data.*

Si esprimano con a ed a' le distanze iniziali CA ed MA (fig. 145) del centro di azione e del punto materiale da una origine fissa A, presa sul prolungamento della retta che va dal primo punto al se-

condo; si rappresenti inoltre con x la distanza M'A del punto materiale dalla medesima origine all'epoca t, e con μ l'attrazione alla unità di distanza. Posto che il centro di azione si muova nello stesso verso del punto materiale, e che nel tempo t passi dalla posizione C alla posizione C', sarà $CC' = \beta t$ lo spazio percorso in questo tempo, ed $a + \beta t$ sarà la distanza del medesimo centro dalla origine A alla epoca t: quindi a questa stessa epoca essendo $a + \beta t - x$ la distanza del punto materiale dal centro di aziono, attesa la legge con cui opera la forza, si avrà per l'accelerazione φ l'espressione $\varphi = \mu\,(a + \beta t - x) = -\mu\,(x - a - \beta t)$, e per l'incremento infinitesimo dello spazio s già percorso da M si avrà l'espressione $ds = -d(a + \beta t - x) = d(x - a - \beta t)$. Onde la formola generale del moto $\frac{d^2 s}{dt^2} = \varphi$, si scriverà nel caso presente

$$\frac{d^2(x - a - \beta t)}{dt^2} = -\mu\,(x - a - \beta t)\,.$$

Moltiplicando i due membri della formola per $2d(x - a - \beta t)$, e poi integrandoli, otterremo

$$\left[\frac{d(x - a - \beta t)}{dt}\right]^2 = -\mu(x - a - \beta t)^2 + \mu c^2\,,$$

dove per comodo di calcolo la costante della integrazione viene indicata col termine μc^2. Si dedurranno quindi successivamente le seguenti espressioni

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\frac{-d(x - a - \beta t)}{\sqrt{c^2 - (x - a - \beta t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\frac{-d\,\frac{x - a - \beta t}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - a - \beta t}{c}\right)^2}}\,,$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,\mathrm{arc}\left(\cos = \frac{x - a - \beta t}{c}\right) + c'\,,$$

$$x - a - \beta t = c\cos(t\sqrt{\mu} - c'\sqrt{\mu}) = B\cos(t\sqrt{\mu}) + B'\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\mu}).$$

Ora per determinare le due costanti B e B′ in questa ultima equazione, osserviamo che per $t = 0$ si hanno i valori $x = a'$, $\frac{dx}{dt} = \beta'$; dunque la medesima equazione e il suo differenziale

$$\frac{dx}{dt} - \beta = B'\sqrt{\mu}\cos(t\sqrt{\mu}) - B\sqrt{\mu}\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\mu}),$$

per $t = 0$, ci daranno i due valori $B = a' - a$, e $B' = \frac{\beta' - \beta}{\sqrt{\mu}}$.

Si avrà per conseguenza la formola

$$x = a + \beta t + (a' - a)\cos(t\sqrt{\mu}) + \frac{\beta' - \beta}{\sqrt{\mu}}\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\mu}),$$

la quale ci fa conoscere la posizione cercata del punto materiale alla fine di un dato tempo t.

266. **Problema** V. *Un punto materiale è situato in un dato luogo sopra la retta che congiunge i centri di due forze attrattive inversamente proporzionali al quadrato delle distanze: si lancia questo punto verso l'uno dei due centri, arriva alla posizione dove le attrazioni sono uguali, e vi resta in riposo. Si cerca la velocità, colla quale il mobile è stato lanciato verso l'uno dei due centri di azione.*

Sieno μ e μ' le attrazioni dei due centri alla unità di distanza, rappresentino $2a$ e $2a'$ le distanze iniziali MA ed MA′ del punto mobile dai centri fissi di azione A ed A′ (fig. 145), e si esprima con V la velocità di proiezione, ossia la velocità colla quale il mobile è lanciato verso il centro A′: posto che il punto materiale dopo un tempo qualunque si trovi nella posizione M′, si faccia $M'A = x$ ed $AA' = b$; sarà $M'A' = b - x$, e $b = 2a + 2a'$. Quindi nella medesima posizione M′ le forze acceleratrici, provenienti dall'azio-

ne dei due centri, secondo le condizioni del problema saranno $f=\frac{\mu}{x^2}$ ed $f'=\frac{\mu'}{(b-x)^2}$, e l'accelerazione totale sarà

$$\varphi=f'-f=\frac{\mu'}{(b-x)^2}-\frac{\mu}{x^2}\ ;$$

per conseguenza, chiamata v la velocità in M' ed attesa l'uguaglianza $ds=dx$, la terza formola (m'') del numero (261) ci darà

$$\frac{v\,dv}{dx}=\frac{\mu'}{(b-x)^2}-\frac{\mu}{x^2}\ ,\ v\,dv=-\frac{\mu' d(b-x)}{(b-x)^2}-\frac{\mu\,dx}{x^2}\ ,$$

e per mezzo della integrazione

$$\text{(2)}\qquad \frac{v^2}{2}=\frac{\mu}{x}+\frac{\mu'}{b-x}+\mathrm{C}\ .$$

Quando le attrazioni dei due centri sono uguali, abbiamo $\frac{\mu}{x^2}=\frac{\mu'}{(b-x)^2}$; e quindi abbiamo ancora

$$\frac{\sqrt{\mu}}{x}=\frac{\sqrt{\mu'}}{b-x}\ ,\ x\sqrt{\mu}+x\sqrt{\mu'}=b\sqrt{\mu}\ ,\ x=\frac{b\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu'}}\ :$$

dunque poichè in questo caso il mobile resta in riposo per ipotesi, ed è $v=0$; perciò dalla equazione (2) si ricaverà per la costante C il valore

$$\mathrm{C}=-\frac{\mu(\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu'})}{b\sqrt{\mu}}-\frac{\mu'(\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu'})}{b(\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu'})-b\sqrt{\mu}}$$

$$=-\frac{\mu(\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu'})}{b\sqrt{\mu}}-\frac{\mu'(\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu'})}{b\sqrt{\mu'}}$$

$$=-\frac{\mu\sqrt{\mu'}(\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu'})+\mu'\sqrt{\mu}(\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu'})}{2(a+a')\sqrt{\mu}\sqrt{\mu'}}\;.$$

Ora al principio del movimento la medesima equazione (2) diviene

$$\frac{V^2}{2}=\frac{\mu}{2a}+\frac{\mu'}{b-2a}+C=\frac{\mu}{2a}+\frac{\mu'}{2a'}+C\,,$$

ossia

$$V^2=\frac{\mu}{a}+\frac{\mu'}{a'}+2C=\frac{\mu a'+\mu' a}{aa'}+2C\,;$$

dunque

$$V^2=\frac{\mu a'+\mu' a}{aa'}-\frac{\mu\sqrt{\mu'}(\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu'})+\mu'\sqrt{\mu}(\sqrt{\mu}+\sqrt{\mu'})}{(a+a')\sqrt{\mu}\sqrt{\mu'}}$$

$$=\frac{\mu a'^2\sqrt{\mu}\sqrt{\mu'}+\mu' a^2\sqrt{\mu}\sqrt{\mu'}-2\mu\mu' aa'}{aa'(a+a')\sqrt{\mu}\sqrt{\mu'}}$$

$$=\frac{\mu\,\frac{a'}{a}+\mu'\,\frac{a}{a'}-2\sqrt{\mu}\sqrt{\mu'}}{a+a'}=\frac{\left(\sqrt{\frac{a'}{a}\mu}-\sqrt{\frac{a}{a'}\mu'}\right)^2}{a+a'}\;,$$

e si ottiene così la velocità di proiezione che si domandava nel problema, cioè

$$V=\frac{\sqrt{\frac{a'}{a}\mu}-\sqrt{\frac{a}{a'}\mu'}}{\sqrt{a+a'}}\;.$$

267. **Equazioni del moto rettilineo uniformemente vario.** Il moto rettilineo uniformemente vario è prodotto in un punto materiale e libero, come abbiamo dichiarato in altro luogo, da una

forza continua e costante in intensità e direzione, la quale agisca sul punto che sta in riposo, ovvero che è già determinato a moversi equabilmente con una certa velocità nella direzione stessa della forza: cominciamo dal trovare le formole del moto uniformemente accelerato, nella supposizione che sia nulla la velocità iniziale del mobile.

Nel moto rettilineo uniformemente accelerato essendo costante l'accelerazione φ, si potrà senz'altro integrare la seconda formola (m'') del numero (261); ossia la formola $dv = \varphi\, dt$, la quale vale in generale per qualunque movimento vario: or poichè la costante della integrazione rappresenta la velocità iniziale del mobile, che per ipotesi è nulla; perciò dalla predetta formola differenziale si dedurrà, tra la velocità v e il tempo t, la relazione finita

$$(1) \qquad v = \varphi t.$$

Questa medesima relazione si può stabilire senza l'aiuto del calcolo nel modo seguente. Essendo φ la velocità che la forza costante produce nel punto materiale in ciascuna unità di tempo, il mobile alla fine della prima unità di tempo avrà la velocità φ, dopo due unità di tempo avrà acquistato una velocità $= 2\varphi$, dopo tre unità una velocità $= 3\varphi$, ... , e dopo il tempo t possederà la velocità φ presa tante volte, quante sono le unità contenute nello stesso tempo t: espressa dunque con v la velocità acquistata dal mobile alla fine del tempo t per l'azione della sola forza costante, sarà $v = \varphi t$.

Si può anche procedere in questo altro modo. Siccome nel moto rettilineo uniformemente accelerato la forza continua conserva sempre una medesima intensità, così le velocità prodotte nel punto materiale dalla sola azione della forza costante devono essere evidentemente proporzionali ai tempi corrispondenti: laonde chiamate φ, v le velocità che corrispondono ai rispettivi tempi 1 e t, sussisterà la proporzione $\varphi : v = 1 : t$, e quindi risulterà la formola $v = \varphi t$.

268. Sia inoltre s lo spazio percorso dal mobile nel tempo t, e si confronti l' equazione generale $v = \frac{ds}{dt}$ colla equazione speciale

$v = \varphi t$ del numero precedente: si avrà per tal guisa nel moto uniformemente accelerato, tra lo spazio e il tempo corrispondente, la formola differenziale $ds = \varphi t\, dt$, e quindi la relazione finita

$$(2) \qquad s = \frac{1}{2}\varphi t^2 ,$$

dove la costante della integrazione è nulla per la ragione che ad $s = 0$ corrisponde $t = 0$.

La medesima relazione si può anche trovare nel modo che segue. Immaginiamo che il tempo t venga diviso in un numero qualunque n di tempuscoli uguali a θ, sicchè abbiasi $t = n\theta$; e supponiamo che la forza costante, invece di agire sul mobile senz'alcuna interruzione, agisca solamente al principio dei singoli intervalli θ, e con impulsi istantanei comunichi al punto mobile quella velocità $v = \varphi\theta$ che produrrebbe in esso (267) coll'azione continuata per ciascuno dei medesimi intervalli θ: in questa supposizione è manifesto che il movimento del punto materiale si comporrà di una serie di movimenti uniformi e diversi tra loro, e che per conseguenza (260) gli spazii percorsi dal mobile nei successivi tempuscoli θ saranno $v\theta$ ossia $\varphi\theta^2$, $2\varphi\theta^2$, $3\varphi\theta^2$,..., $n\varphi\theta^2$; sicchè lo spazio percorso in tutto il tempo t si esprimerà colla somma

$$s = \varphi\theta^2 + 2\varphi\theta^2 + 3\varphi\theta^2 + \ldots + n\varphi\theta^2 = \varphi\theta^2 (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

$$= \varphi\theta^2 (1 + n)\, \frac{n}{2} = \frac{\varphi\theta \,.\, n\theta}{2} + \frac{\varphi \,.\, n^2\theta^2}{2} = \frac{\varphi t}{2}\theta + \frac{\varphi t^2}{2} .$$

Poniamo adesso che si accresca indefinitamente il numero n dei tempuscoli θ nei quali si è diviso il tempo finito t, e che perciò si diminuisca senza fine la grandezza dei medesimi tempuscoli: in questa ipotesi le azioni consecutive della forza costante verranno avvicinandosi sempre più l'una all'altra; di modo che la stessa forza agirà in fine senza alcuna interruzione, e produrrà nel punto materiale un moto uniformemente accelerato, quando si faccia n

$=\infty$: ma con questo valore del numero n, il primo termine della espressione di s diviene $\frac{\varphi t}{2}\,\theta = \frac{\varphi t}{2}\,\frac{t}{n} = 0$; dunque di nuovo nel moto uniformemente accelerato se la velocità iniziale è nulla, lo spazio percorso nel tempo t avrà per espressione $s = \frac{1}{2}\varphi t^2$.

269. Dalle due formole (1) e (2) dei numeri precedenti, eliminata la quantità t, si deduce immediatamente la terza formola $v^2 = 2\varphi s$, ossia la relazione tra la velocità e lo spazio; e così per determinare tutte le circostanze del moto rettilineo uniformemente accelerato, quando la velocità iniziale del mobile è nulla, si avranno le tre equazioni

$$(m''') \qquad v=\varphi t\,,\quad s=\frac{1}{2}\varphi t^2\,,\quad v^2=2\varphi s\,.$$

Se il punto materiale al principio del moto, quando cioè incomincia a sostenere l'azione della forza continua e costante, possedesse già una velocità impressa a nella stessa direzione e nel medesimo senso della forza, il suo movimento sarebbe pure rettilineo ed uniformemente accelerato: ma in questo caso alla espressione della velocità prodotta nel mobile dall'azione continua della forza nel tempo t, converrebbe aggiungere la velocità iniziale a che si mantiene costante nel mobile; e alla espressione dello spazio percorso nello stesso tempo t in virtù della sola forza continua e costante, bisognerebbe aggiungere lo spazio at, che dal mobile si percorre nel detto tempo t con moto uniforme in virtù della sola velocità iniziale. Dunque nel moto rettilineo uniformemente accelerato si avranno le formole più generali

$$(m^{\text{IV}}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} v=a+\varphi t\,,\quad s=at+\frac{1}{2}\varphi t^2\,, \\ \qquad v^2-a^2=2\varphi s\,; \end{array} \right.$$

delle quali la terza si deduce dalle altre due, sostituendo nella seconda formola il valore $t=\frac{v-a}{\varphi}$ ricavato dalla prima.

In fine se la velocità iniziale a viene impressa al mobile nella stessa direzione, ma nel senso opposto a quello in cui agisce la forza continua costante, il moto sarà allora rettilineo ed uniformemente ritardato: quindi per avere le formole di un tal movimento, basterà nelle equazioni precedenti (m^{iv}) mutare il segno alla accelerazione φ, che si oppone alla velocità positiva ed iniziale a; e di tal guisa si otterranno le formole

$$(m^{\text{v}})\qquad \begin{cases} v=a-\varphi t\ ,\ s=at-\frac{1}{2}\varphi t^2\ , \\ a^2-v^2=2\varphi s\ , \end{cases}$$

colle quali si determinano le circostanze del moto rettilineo uniformemente ritardato.

Per applicazione di queste diverse classi di formole, spettanti a un moto qualunque rettilineo ed uniformemente vario, serviranno le cose che siamo per dire nei due capi seguenti, sul moto verticale dei gravi e sul movimento dei medesimi lungo i piani inclinati all'orizzonte.

CAPO III.

MOVIMENTO VERTICALE DEI GRAVI.

270. La gravità terrestre, siccome vedremo in altro luogo, è un caso particolare della gravitazione universale, ed agisce sui corpi nella ragione inversa del quadrato delle loro distanze dal centro della terra: ma stante la lunghezza assai notabile del raggio terrestre, le variazioni di gravità nei corpi non divengono sensibili al di sopra della terra, se non ad altezze molto differenti fra loro;

sicchè la medesima gravità potrà risguardarsi come una forza sensibilmente costante nelle vicinanze della superficie terrestre, cioè rispetto a quei corpi pesanti il cui movimento più d'ordinario si osserva e si ha da esaminare. Nel determinare il moto rettilineo dei gravi, noi considereremo i loro centri di gravità, dove si può supporre raccolta tutta la massa; e per procedere ordinatamente, tratteremo prima del moto verticale nel vuoto o in un mezzo resistente, e dipoi tratteremo del moto lungo un piano inclinato.

271. **Formole e leggi della discesa verticale de' gravi nel vuoto.** Essendo la gravità una forza costante nelle vicinanze della superficie terrestre, messa da parte la resistenza dell'aria, sarà uniformemente accelerato il moto dei gravi che cadono da una altezza non molto grande: onde se si suppone che sia zero la velocità iniziale, e se si distingue colla lettera g l'accelerazione dovuta alla gravità, la discesa verticale de' gravi si determinerà (269. m''') per mezzo delle formole

$$(n) \qquad v=gt\,, \quad s=\frac{1}{2}gt^2\,, \quad v^2=2gs\,.$$

In questa ultima relazione tra la velocità acquistata e lo spazio percorso, dicesi v, ovvero $\sqrt{2gs}$, *la velocità dovuta all'altezza* s; e per converso s, ovvero $\frac{v^2}{2g}$, *è detta l'altezza dovuta alla velocità* v: dalle tre formole poi si deducono tre leggi principali, e sono le seguenti:

1.ª *Gli spazii percorsi dai gravi che cadono liberamente, stanno tra loro come i quadrati dei tempi o delle velocità.* Infatti sieno s ed s' gli spazii percorsi, v e v' le velocità acquistate nei tempi t e t': la seconda e la terza formola (n) ci dànno

$$s=\frac{1}{2}gt^2=\frac{v^2}{2g}\,, \quad s'=\frac{1}{2}gt'^2=\frac{v'^2}{2g}\,;$$

sarà dunque

$$s : s' = t^2 : t'^2 = v^2 : v'^2 .$$

2.ª *Lo spazio descritto in un dato tempo dai gravi che cadono liberamente, è la metà di quello che si descriverebbe in pari tempo equabilmente colla velocità acquistata.* In vero si rappresenti con σ lo spazio percorso nel tempo t con moto equabile e colla velocità v, che un grave acquista discendendo nel medesimo intervallo di tempo o percorrendo uno spazio verticale s: a cagione della seconda e della prima formola (n), e per ciò che si è detto nel numero (9) intorno al moto uniforme, si avranno i valori

$$s = \frac{1}{2} g t^2 , \quad \sigma = vt = g t^2 ;$$

sarà dunque $s = \frac{1}{2} \sigma$, come si dovea dimostrare.

3.ª *Gli spazii percorsi in uguali e successivi intervalli di tempo da un grave che cada liberamente, seguono la progressione dei numeri dispari.* Imperocchè stante la seconda formola (n), gli spazii percorsi dal grave in una, in due, in tre... unità di tempo, hanno rispettivamente per espressioni

$$\frac{g}{2} , \quad \frac{4g}{2} , \quad \frac{9g}{2} , \ldots :$$

dunque gli spazii descritti dal grave nelle successive unità di tempo, saranno

$$\sigma' = \frac{g}{2} , \quad \sigma'' = \frac{4g}{2} - \frac{g}{2} = \frac{3g}{2} ,$$

$$\sigma''' = \frac{9g}{2} - \frac{4g}{2} = \frac{5g}{2} , \ldots ;$$

e si avrà per conseguenza

$$\sigma' : \sigma'' . \sigma''' : \ldots = \frac{g}{2} : \frac{3g}{2} : \frac{5g}{2} : \ldots = 1 : 3 : 5 : \ldots .$$

Queste tre leggi in generale sono proprie di qualunque moto uniformemente accelerato.

272. **Formole e leggi della ascesa verticale dei gravi nel vuoto**. Attesa la costanza della forza di gravità nelle vicinanze della terra e rimossa la resistenza dell'aria, i gravi lanciati in alto secondo la verticale ascendono con moto equabilmente ritardato: onde se si chiama v_0 la velocità di proiezione, la salita verticale dei gravi nel vuoto, si determinerà (269. m^v) colle formole

$$(n') \qquad v=v_0-gt\,,\quad s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2\,,\quad v_0^2-v^2=2gs\,.$$

In queste equazioni v rappresenta la velocità che resta ancora nel mobile alla fine del tempo t, ed s rappresenta lo spazio descritto nello stesso tempo, ossia l'altezza alla quale è già asceso il grave sopra il punto di partenza.

Ora se vuolsi sapere la massima altezza S, alla quale salirà il grave, e il tempo T che impiegherà nel salirvi, si rifletta che il medesimo grave allora cesserà dal montare in alto, quando la sua velocità, diminuita continuamente dalla azione opposta della gravità, sarà tutta estinta e ridotta a zero: per avere dunque le espressioni della massima altezza e del tempo corrispondente, basterà che si ponga $v=0$ nella terza e nella prima formola (n'); e di tal modo risulteranno i valori

$$(n'') \qquad S=\frac{v_0^2}{2g}\,,\quad T=\frac{v_0}{g}\,.$$

È poi manifesto che il grave tornerà di nuovo, discendendo dalla massima altezza, al punto di partenza nello stesso tempo T, ed ivi si troverà animato in senso inverso da quella medesima velocità v_0, colla quale era stato prima lanciato in alto: la ragione si è, perchè la forza di gravità nel moto discendente genera in un corpo quei medesimi gradi di velocità, che in uguali intervalli di tempo gli toglie nel moto ascendente. Questo si può anche vedere colle formole

(n) ed (n''); perchè chiamando t il tempo in cui il grave cade dall'altezza S, e v la velocità che acquista al termine del medesimo spazio, avremo in valori assoluti

$$v=\sqrt{2gS}=\sqrt{2g\,.\,\frac{v_0^2}{2g}}=v_0\,,\quad t=\frac{v}{g}=\frac{v_0}{g}=T.$$

273. Ricaviamo ora dalle formole (n') ed (n'') le leggi del moto verticale dei gravi, che ascendono in alto nel vuoto.

1.ª *Le velocità che ha il grave nel salire sono proporzionali ai tempi che restano fino all'estinzione del moto.* Sieno T ed S il tempo, e lo spazio totale nel moto ascendente; v e v' le velocità del mobile alla fine dei tempi t e t', computati dal principio del movimento; e θ, θ' sieno i tempi che restano sino all'estinzione del moto: indicando sempre con v_0 la velocità iniziale, avremo

$$\theta=T-t=\frac{v_0}{g}-\frac{v_0-v}{g}=\frac{v}{g}\,,$$

$$\theta'=T-t'=\frac{v_0}{g}-\frac{v_0-v'}{g}=\frac{v'}{g}\,;$$

sarà dunque, come abbiamo asserito nella proposizione,

$$v:v'=\theta:\theta'.$$

2.ª *Gli spazii che rimangono a descriversi fino alla estinzione del moto, stanno come i quadrati dei tempi in cui verranno descritti.* Essendo s ed s' gli spazii già percorsi nei tempi t, t'; e σ, σ' essendo gli spazii che restano ancora a percorrersi nei tempi θ e θ', si avranno le espressioni

$$\sigma=S-s=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{v_0^2-v^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}\,,$$

$$\sigma' = S - s' = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2 - v'^2}{2g} = \frac{v'^2}{2g} \; ;$$

onde attesa anche la prima legge, risulterà la proporzione

$$\sigma : \sigma' = v^2 : v'^2 = \theta^2 : \theta'^2 \, .$$

3.ª *Lo spazio totale* S *percorso dal grave nell'ascesa verticale, è la metà dello spazio* S', *che in pari tempo* T *si descriverebbe uniformemente colla velocità di proiezione* v_0. Infatti (272. 9) abbiamo

$$S = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0}{2} \cdot \frac{v_0}{g} = \frac{1}{2} v_0 T = \frac{1}{2} S'.$$

In generale queste tre leggi appartengono a un moto qualunque equabilmente ritardato.

274. **Valore della gravità presso la superficie terrestre.** Dagli esperimenti fatti più volte e in diversi modi, si sa che un grave lasciato a sè stesso e cadendo liberamente, nei nostri paesi percorre in un minuto secondo lo spazio di piedi parigini 15, 0915 ovvero di metri 4, 9017 in circa. Laonde se nella seconda formola (*n.* 271) si pone $t = 1''$ ed $s = 4^m, 9017$, risulterà il valore della gravità presso la superficie terrestre, o piuttosto il valore della forza acceleratrice con cui si misura la gravità, e sarà

$$g = \frac{2s}{t^2} = 9^m, 8034 :$$

ciò vuol dire che *la gravità nell'intervallo di un minuto secondo produce nei corpi mobili un' accelerazione o una velocità di metri* 9, 8034.

Trovato così il valore della gravità g, mediante le formole (n) ed (n'') si possono facilmente determinare le velocità, delle quali abbiamo discorso nel numero (247): colle medesime formole risol-

veremo per esercizio alcuni problemi, dopo di avere trattato della caduta dei gravi nel vuoto da qualunque altezza al di sopra della superficie terrestre, e del moto verticale dei medesimi in un mezzo resistente.

275. **Caduta dei gravi nel vuoto, con riguardo alla variazione della forza di gravità.** Quando è ben grande l'altezza, dalla quale cade un corpo o un punto pesante M al di sopra della superficie terrestre, non si può allora considerare come costante la forza di gravità, ma la sua grandezza varierà nella ragione inversa del quadrato del punto materiale dal centro della terra: in questa ipotesi vogliamo trovare le formole, colle quali si determina il moto o la discesa verticale dei gravi nel vuoto.

Sieno a la distanza iniziale del mobile M dal centro della terra che risguarderemo come una sfera, r il raggio terrestre e g la forza acceleratrice di gravità alla superficie della terra medesima, s lo spazio percorso e v la velocità acquistata nel tempo t: l'accelerazione alla fine di questo tempo, ossia alla distanza $(a - s)$ dal centro, sarà $\varphi = \frac{gr^2}{(a-s)^2}$; e nella caduta del punto pesante si avrà per conseguenza (261. m'') l'equazione differenziale $\frac{d^2s}{dt^2}$ $= \frac{gr^2}{(a-s)^2}$, la quale moltiplicata per $2ds$ diviene quindi

$$\frac{2\,ds\,d^2s}{dt^2} = 2gr^2\,\frac{-d(a-s)}{(a-s)^2} \;.$$

Integrando e riflettendo che per ipotesi è nulla la velocità iniziale, avremo

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2\,gr^2}{a-s} + \mathrm{C}\,, \quad \mathrm{C} = -\,\frac{2\,gr^2}{a}\;,$$

e conseguentemente

$$(1)\quad v^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=2\,gr^2\left(\frac{1}{a-s}-\frac{1}{a}\right)=\frac{2\,gr^2}{a}\cdot\frac{s}{a-s}\,.$$

Se si chiama h l'altezza $(a-r)$ al di sopra della superficie terrestre, e si pone $s=a-r=h$, si avrà $a-s=r$, e la formola superiore ci darà

$$v=\sqrt{\frac{2\,gr^2}{a}\cdot\frac{h}{r}}=\sqrt{2\,hg}\sqrt{\frac{r}{a}}\,.$$

Ora nell'ultimo membro di questa formola il primo fattore $\sqrt{2gh}$ esprime (271) la velocità che avrebbe il mobile, cadendo dall'altezza h, se la forza di gravità fosse da per tutto la stessa che alla superficie della terra; ed essendo $r<a$, il secondo fattore $\sqrt{\frac{r}{a}}$ rappresenta un numero minore della unità: dunque avuto riguardo alla variazione della gravità, dobbiamo dire che un grave arrivando alla superficie della terra da una altezza h, avrà una velocità minore di quella che acquisterebbe cadendo dalla medesima altezza, se la gravità avesse un valore costante ed uguale a quello che ha di fatto presso la stessa superficie terrestre.

276. Nella formola (1) abbiamo la relazione tra la velocità e lo spazio; cerchiamo ora la relazione tra il tempo e lo spazio.

Da quella prima formola, atteso che i due incrementi ds e dt devono avere un medesimo segno, si ricava il valore differenziale

$$dt=\sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\cdot\sqrt{\frac{a-s}{s}}\,ds=\sqrt{\frac{a}{2\,gr^2}}\cdot\frac{(a-s)ds}{\sqrt{as-s^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{2\,gr^2}}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\,a-s\right)ds}{\sqrt{as-s^2}}+\frac{\frac{1}{2}\,a\,ds}{\sqrt{as-s^2}}\right];$$

ma in questo valore abbiamo evidentemente

$$\frac{\left(\frac{1}{2}a-s\right)ds}{\sqrt{as-s^2}}=d\sqrt{as-s^2}\,,$$

$$\frac{\frac{1}{2}a\,ds}{\sqrt{as-s^2}}=\frac{1}{2}a\frac{-d\,\frac{a-2s}{a}}{\frac{2}{a}\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-s\right)^2}}$$

$$=\frac{a}{2}\frac{-d\,\frac{a-2s}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{a-2s}{a}\right)^2}}=\frac{a}{2}d\,.\,\text{arc}\cos\frac{a-2s}{a}\;:$$

dunque integrando il predetto differenziale, otterremo la relazione finita che si cercava

$$(2)\qquad t=\sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left(\sqrt{as-s^2}+\frac{a}{2}\,\text{arc}\cos\frac{a-2s}{a}\right),$$

dove non si aggiunge la quantità costante, perchè si deve avere $s=0$ per $t=0$, e si prende pure lo zero per l'arco che ha un coseno uguale alla unità.

Mediante le due formole (1) e (2) si determinano tutte le circostanze della discesa verticale dei gravi nel vuoto, con riguardo alla variazione della gravità. Imperocchè per un valore qualunque dato dello spazio s, si può con quelle due formole determinare la velocità v e il tempo corrispondente t: viceversa per un valore qualunque dato del tempo t, colla risoluzione della equazione (2) si conoscerà prima lo spazio percorso s, e dipoi colla risoluzione della equazione (1) si verrà a conoscere ancora la velocità acquistata v.

277. Le formole prestabilite rappresentano la caduta verticale dei gravi solo nella ipotesi che questi si muovano fuori del globo terrestre, quando cioè l'attrazione proveniente dalla terra o la for-

za di gravità segue la ragione diretta della massa attraente e la ragione inversa del quadrato delle distanze tra il centro dei gravi e il centro della terra medesima. Se i punti pesanti penetrassero nell'interno del globo terrestre, l'attrazione o la gravità diverrebbe proporzionale (146. 2.°) alla distanza dei medesimi punti dal centro della terra, e perciò il movimento di un punto pesante sarebbe allora rappresentato dalle due equazioni che abbiamo trovato nella soluzione del problema proposto nel numero (262): nel presente caso sarà $\mu = \frac{g}{r}$, e posto che il mobile parta dalla superficio terrestre, si dovrà fare $a = r$; per conseguenza le due formole del num. citato divengono $v^2 = \frac{g}{r}(r^2 - x^2)$, $t = \sqrt{\frac{r}{g}} . \operatorname{arc cos} \frac{x}{r}$.
Sono queste le due equazioni che rappresentano il movimento di un punto pesante nell'interno del globo terrestre, e in esse la variabile x non è che la distanza del mobile dal centro di attrazione o della terra medesima alla fine del tempo t.

Notiamo inoltre che quando lo spazio percorso s è assai piccolo rispetto al raggio terrestre r, le due formole (1) e (2) del numero precedente si riducono a quelle che rappresentano la discesa verticale dei gravi nella supposizione che la forza di gravità rimanga sensibilmente costante. Infatti essendo h l'elevazione di un punto pesante al di sopra della superficie terrestre, e supponendola assai piccola insieme con s in paragone del raggio r, porremo $a = r + h$, e scriveremo l'equazione (1) nel modo seguente:

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a} \cdot \frac{s}{r+h-s} :$$

ora poichè h ed s sono due quantità piccolissime a confronto di r, in questa nuova formola si può trascurare la differenza $h - s$, la quale si trova aggiunta al raggio r, e si può anche sostituire lo stesso raggio r in vece della distanza $r + h$, ossia a; dunque la medesima formola diverrà $v^2 = 2gs$, ed è appunto una di quelle equazioni che abbiamo trovato nel numero (271).

Quanto alla formola (2), omessi nello svolgimento delle sue parti i termini in cui entra come fattore il rapporto piccolissimo $\frac{s}{a}$, e preso un arco assai piccolo in vece del suo seno, si hanno i valori

$$\sqrt{as-s^2}=\sqrt{as}\left(1-\frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{as}\left(1-\frac{1}{2}\frac{s}{a}-\ldots\right)=\sqrt{as},$$

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{a-2s}{a}=\operatorname{arc}\left(\operatorname{sen}=\sqrt{1-\frac{(a-2s)^2}{a^2}}=\frac{2}{a}\sqrt{as-s^2}\right)$$

$$=\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2}{a}\sqrt{as}\right)=\operatorname{arc\,sen}\left(2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)=2\sqrt{\frac{s}{a}};$$

dunque se si sostituisca anche il raggio r alla distanza a, la detta formola (2) diverrà nel caso presente

$$t=\sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left(\sqrt{as}+\frac{a}{2}2\sqrt{\frac{s}{a}}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{a^2s}{2gr^2}}+\sqrt{\frac{a^2s}{2gr^2}}=2\sqrt{\frac{s}{2g}},$$

e si otterrà in fine $s=\frac{1}{2}gt^2$. È questa un'altra delle equazioni già trovate nel numero (271); la terza poi $v=gt$ si ritrova, ponendo il valore di s nella espressione superiore della quantità v^2.

278. **Discesa verticale dei gravi in un mezzo omogeneo e resistente.** Un gravo che s'immerga in un dato fluido e si muova per esso, perde una porzione del suo peso, equivalente al peso del fluido di cui prende il luogo; e nella direzione opposta al suo moto prova inoltre una certa resistenza, che varia insieme colla velocità. La verità della prima asserzione sarà mostrata nel

capo III dell'Idraulica: ond'è che chiamata μ la densità uniforme o media di un corpo pesante, α il suo volume, e μ' la densità di un fluido omogeneo; si esprimerà (259. 99) colla differenza $\alpha\mu g - \alpha\mu' g$ la forza motrice o il peso del corpo immerso nel fluido, e così l'accelerazione proveniente dalla gravità nelle vicinanze della superficie terrestre si ridurrà al valore

$$\frac{\alpha\mu g - \alpha\mu' g}{\alpha\mu} = g\left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right) = g'.$$

La verità poi della seconda asserzione si rileva dalla esperienza, per la quale veniamo pure a conoscere che quando il movimento del corpo non sia nè troppo lento nè troppo celere, la resistenza di un fluido omogeneo in riposo è prossimamente proporzionale, in pari circostanze, al quadrato della velocità v che ha il mobile nei singoli istanti: onde se si rappresenta con $h = \frac{g'}{k^2}$ una quantità costante da determinarsi ne' diversi corpi e ne' fluidi diversi per via di esperimenti, la forza motrice dovuta alla resistenza del mezzo si potrà esprimere col prodotto $\alpha\mu h v^2$, e la forza acceleratrice corrispondente sarà quindi

$$hv^2 = \frac{g'v^2}{k^2}.$$

La costante k in questa espressione dinota la velocità che dovrebbe avere il mobile, affinchè al suo peso fosse uguale la resistenza del mezzo.

279. Ciò premesso, troviamo prima le relazioni tra la velocità, il tempo e lo spazio per la discesa verticale dei gravi nelle vicinanze della terra in un mezzo omogeneo; quando cioè le due forze g' costante, e $\frac{g'v^2}{k^2}$ variabile sono tra loro opposte, e il mobile viene sollecitato dalla forza acceleratrice

$$\varphi = g' - \frac{g'v^2}{k^2} = \frac{g'}{k^2}(k^2 - v^2) .$$

1.° Quanto alla *relazione tra la velocità e il tempo*, si sostituisca il valore di φ nella seconda formola generale (m''.261): proverrà l'equazione

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g'}{k^2}(k^2 - v^2) ,$$

dalla quale si ricava

$$dt = \frac{k^2}{g'} \cdot \frac{dv}{k^2 - v^2} = \frac{k}{2g'}\left(\frac{dv}{k+v} + \frac{dv}{k-v}\right).$$

Presi gli integrali, e determinata la costante nella supposizione di una velocità nulla al principio del moto, si avrà (LI)

$$t = \frac{k}{2g'}\left[\log(k+v) - \log(k-v)\right] = \frac{k}{2g'}\log\left(\frac{k+v}{k-v}\right),$$

ed anche

$$e^{-\frac{2g't}{k}} = \frac{k-v}{k+v} ;$$

equazione che risoluta rispetto alla velocità v, ci dà la relazione

$$(1) \qquad v = k\,\frac{1 - e^{-\frac{2g't}{k}}}{1 + e^{-\frac{2g't}{k}}}$$

Crescendo il tempo t, e andando verso un limite $= \infty$, nella supposizione che rimanga costante la forza di gravità, il termine

$$e^{-\frac{2g't}{k}} = \frac{1}{e^{\frac{2g't}{k}}}$$

tenderà verso un limite $= 0$: per conseguenza la velocità v si andrà sempre più avvicinando al valore costante k, e il moto del corpo dopo un tempo abbastanza notabile diverrà sensibilmente uniforme: ciò s'intende facilmente; perchè da una parte il peso del corpo è una forza costante, e dall' altra parte la resistenza del fluido è una forza opposta che crescendo colla velocità del mobile, deve infine equilibrarsi prossimamente colla prima forza.

2.° La *relazione tra lo spazio e il tempo* si stabilisce per mezzo della formola (1) e dell' altra formola generale $v = \frac{ds}{dt}$. Queste due formole ci porgono (LII) l'equazione differenziale

$$ds = k \frac{e^{\frac{g't}{k}} - e^{-\frac{g't}{k}}}{e^{\frac{g't}{k}} + e^{-\frac{g't}{k}}} = \frac{k^2}{g'} \cdot \frac{d\left(e^{\frac{g't}{k}} + e^{-\frac{g't}{k}}\right)}{e^{\frac{g't}{k}} + e^{-\frac{g't}{k}}},$$

e quindi l'equazione finita

$$s = \frac{k^2}{g'} \log\left(e^{\frac{g't}{k}} + e^{-\frac{g't}{k}}\right) + C:$$

ma nella supposizione che si abbiano insieme $t = 0$ ed $s = 0$, la quantità costante C risulta uguale a $-\frac{k^2}{g'}\log(2)$; dunque la relazione tra lo spazio e il tempo sarà

$$s = \frac{k^2}{g'} \log \left\{ \frac{e^{\frac{g't}{k}} + e^{-\frac{g't}{k}}}{2} \right\}. \tag{2}$$

3.° Possiamo anche trovare la *relazione tra lo spazio e la velocità*, mediante l'aquazione (261)

$$\frac{v\,dv}{ds} = \varphi = \frac{g'}{k^2}(k^2 - v^2) ;$$

dalla quale si deduce prima il valore differenziale

$$ds = \frac{k^2}{g'} \cdot \frac{v\,dv}{k^2 - v^2} = -\frac{k^2}{2g'} \cdot \frac{d(k^2 - v^2)}{k^2 - v^2} ,$$

e quindi il valore finito

$$s = -\frac{k^2}{2g'} \log(k^2 - v^2) + C' :$$

e siccome la costante C' viene uguale a $\frac{k^2}{2g'} \log(k^2)$, sussistendo insieme $v = 0$ ed $s = 0$; così la terza relazione tra gli elementi del moto sarà

$$s = \frac{k^2}{2g'} \log\left(\frac{k^2}{k^2 - v^2} \right). \tag{3}$$

Di tal modo a un dato istante o alla fine di un tempo qualunque t, si può determinare la posizione e la velocità del mobile; questa per mezzo dell'equazione (1), quella per mezzo dell'equazione (2) o (3): quanto al movimento dei gravi nell'aria, si può trascurare la perdita di peso fatta dal mobile, e quindi per l'accelerazione dovuta

al peso, invece di g' si può adoperare il valore g determinato di sopra.

280. **Ascesa verticale dei gravi in un mezzo resistente ed omogeneo.** Quando il moto dei gravi in un mezzo omogeneo presso la superficie della terra è ascendente, le forze g' e $\frac{g'v^2}{k^2}$ agiscono ambedue dall'alto al basso contro la direzione della velocità v_0, con cui il grave viene lanciato in alto secondo la verticale; e però in questo caso l'accelerazione totale sarà

$$\varphi = -g' - \frac{g'v^2}{k^2} = -\frac{g'}{k^2}(k^2+v^2).$$

Qui ancora, per determinare il movimento ascendente dei gravi, si cercano le relazioni tra la velocità, il tempo e lo spazio.

1.° *Relazione tra la velocità e il tempo*. Dalla equazione

$$\frac{dv}{dt} = \varphi = -\frac{g'}{k^2}(k^2+v^2)$$

proviene

$$dt = -\frac{k^2}{g'} \cdot \frac{dv}{k^2+v^2} = -\frac{k}{g'} \cdot \frac{d\frac{v}{k}}{1+\left(\frac{v}{k}\right)^2};$$

e poichè al cominciamento del moto si ha $t=0$ e $v=v_0$, perciò facendo l'integrazione conseguiremo (LXXXVIII) il valore

$$t = \frac{k}{g'}\left(\text{arc tang}\,\frac{v_0}{k} - \text{arc tang}\,\frac{v}{k}\right).$$

Quinci, mediante la formola trigonometrica che ci dà la tangente della differenza di due archi, nasce l'equazione

$$\operatorname{tang}\frac{g't}{k}=\frac{\frac{v_0}{k}-\frac{v}{k}}{1+\frac{v_0 v}{k^2}}=\frac{kv_0-kv}{k^2+v_0 v}\ ;$$

che risoluta rispetto a v, ci conduce alla prima relazione cercata

$$(1)\qquad v=\frac{kv_0-k^2\operatorname{tang}\frac{g't}{k}}{k+v_0\operatorname{tang}\frac{g't}{k}}=k\frac{v_0\cos\frac{g't}{k}-k\operatorname{sen}\frac{g't}{k}}{k\cos\frac{g't}{k}+v_0\operatorname{sen}\frac{g't}{k}}\ .$$

2.° *Relazione tra lo spazio e il tempo.* Nella equazione (1) mettiamo $\frac{ds}{dt}$ in luogo di v; otterremo

$$ds=k\frac{v_0\cos\left(\frac{g't}{k}\right)dt-k\operatorname{sen}\left(\frac{g't}{k}\right)dt}{k\cos\frac{g't}{k}+v_0\operatorname{sen}\frac{g't}{k}}$$

$$=\frac{k^2}{g'}\cdot\frac{d\left(v_0\operatorname{sen}\frac{g't}{k}+k\cos\frac{g't}{k}\right)}{v_0\operatorname{sen}\frac{g't}{k}+k\cos\frac{g't}{k}}\ ,$$

ed in conseguenza

$$s=\frac{k^2}{g'}\log\left(v_0\operatorname{sen}\frac{g't}{k}+k\cos\frac{g't}{k}\right)+\mathrm{C}:$$

ma nel principio del movimento si ha $t=0$ ed $s=0$, e risulta perciò la costante $\mathrm{C}=-\frac{k^2}{g'}\log(k)$; dunque la seconda relazione è questa

$$(2) \qquad s = \frac{k^2}{g'} \log\left(\frac{v_0}{k} \operatorname{sen} \frac{g't}{k} + \cos \frac{g't}{k} \right).$$

3.° *Relazione tra lo spazio e la velocità.* Dalla equazione (261)

$$\frac{v\,dv}{ds} = \varphi = -\frac{g'}{k^2}(k^2 + v^2)$$

si ricava il valore differenziale

$$ds = -\frac{k^2}{g'} \cdot \frac{v\,dv}{k^2 + v^2} = -\frac{k^2}{2g'} \cdot \frac{d(k^2 + v^2)}{k^2 + v^2},$$

e colla integrazione il valore finito

$$s = -\frac{k^2}{2g'} \log(k^2 + v^2) + C';$$

onde, poichè la costante C' deve determinarsi per la condizione che sussistano insieme $s = 0$ e $v = v_0$, la terza relazione nel moto ascendente sarà

$$(3) \qquad s = \frac{k^2}{2g'} \log\left(\frac{k^2 + v_0^2}{k^2 + v^2} \right).$$

Per conclusione osserviamo che se nelle due equazioni (3) ed (1) si fa $v = 0$, dovrà risultarne la massima altezza S a cui arriva un grave nel fluido resistente, e il tempo T che il medesimo grave impiega nel salire a quell'altezza: si avranno così le espressioni

$$S = \frac{k^2}{2g'} \log\left(\frac{k^2 + v_0^2}{k^2} \right), \quad T = \frac{k}{g'} \operatorname{arc\,tang} \frac{v_0}{k};$$

e la seconda di queste espressioni può servire a determinare per un

dato mobile in un fluido dato la quantità costante k, quando si conosca per mezzo di una o più esperienze il tempo T della salita del grave alla massima altezza.

281. L'accelerazione prodotta dalla resistenza del mezzo si esprime, come abbiamo dichiarato di sopra (278), col rapporto $\frac{g'v^2}{k^2}$: ora è manifesto che in questo rapporto dovrà farsi $g' = g$, e $k = \infty$, se si suppone nulla la densità o la resistenza del mezzo; e siccome in questa ipotesi il mobile non è più soggetto ad altra azione che a quella della gravità, perciò ponendo g in luogo di g', e facendo $k = \infty$ nelle formole del numero (279), dovremo trovare di nuovo le equazioni che rappresentano la discesa verticale dei gravi nel vuoto presso la superficie terrestre.

1.° Cangiata la g' in g, si consideri l'equazione (1) del numero (279), messa sotto la forma

$$v = \frac{k\left(e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}\right)}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}},$$

e in essa si sviluppino in serie i termini della frazione o le funzioni esponenziali: avendosi (LXVIII) le due serie convergenti

$$e^{\frac{gt}{k}} = 1 + \frac{gt}{k} + \frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{k^2} + \frac{1}{2.3}\frac{g^3t^3}{k^3} + \ldots,$$

$$e^{-\frac{gt}{k}} = 1 - \frac{gt}{k} + \frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{k^2} - \frac{1}{2.3}\frac{g^3t^3}{k^3} + \ldots,$$

si otterrà

$$e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}} = 2\left(\frac{gt}{k} + \frac{1}{2.3}\frac{g^3t^3}{k^3} + \dots\right),$$

$$e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}} = 2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{k^2} + \dots\right);$$

e quindi mediante la sostituzione di questi valori, l'equazione superiore diverrà

$$v = \frac{gt + \frac{1}{2.3}\frac{g^3t^3}{k^2} + \dots}{1 + \frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{k^2} + \dots},$$

e si ridurrà semplicemente alla formola $v = gt$, quando si ponga $k = \infty$.

2.° Anche nella formola (2) del numero (279) si cangi la quantità g' in g, e si sostituisca ai due esponenziali il loro sviluppo in serie: si avrà prima

$$s = \frac{k^2}{g}\log\left(1 + \frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{k^2} + \dots\right);$$

e quindi svolto in serie (CII) il logaritmo, sarà pure

$$s = \frac{k^2}{g}\left(\frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{k^2} + \dots - \frac{1}{4}\frac{g^4t^4}{2k^4} - \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2}gt^2 + \dots - \frac{1}{8}\frac{g^3t^4}{k^2} - \dots,$$

In questa equazione tutti i termini dell'ultimo membro, eccetto il primo, contengono la costante k nel denominatore, e si annullano

per $k=\infty$; dunquo a questo limite sussisterà $s=\frac{1}{2}gt^2$, che è l'altra equazione del moto verticale ed uniformemente accelerato dei gravi.

3.° La formota (3) del numero citato (279), fatta la mutazione di g' in g, si può mettere evidentemente sotto la forma

$$s=-\frac{k^2}{2g}\log\left(1-\frac{v^2}{k^2}\right);$$

e mediante lo svolgimento in serie del logaritmo, diviene

$$s=-\frac{k^2}{2g}\left(-\frac{v^2}{k^2}-\frac{v^4}{2k^4}-\ldots\right)=\frac{v^2}{2g}+\frac{v^4}{4gk^2}+\ldots:$$

per conseguenza, nella ipotesi di $k=\infty$, risulterà la terza relazione che appartiene alla discesa verticale dei gravi nel vuoto presso la superficie terrestre, vale a dire $s=\frac{v^2}{2g}$, ossia $v^2=2gs$.

Ecco in fine i problèmi che abbiamo promesso di proporre e di sciogliere, per fare una qualche applicazione delle formole relative al moto verticale dei gravi nel vuoto per altezze assai piccole in confronto del raggio terrestre.

282. **Problema** I. *Due palle perfettamente elastiche si trovano coi loro centri in una medesima retta verticale a diverse altezze sull'orizzonte: a uno stesso istante si abbandonano le due palle al proprio peso; le quali cadendo vanno a percuotere un piano* AB *inclinato di 45 gradi all'orizzonte, e dopo l'urto in* B *continuano a muoversi su di un piano orizzontale e ben levigato* BC, *che è contiguo e fa sèguito al piano* AB. *Si domanda lo spazio che le palle devono percorrere sul piano* BC, *innanzi che l'una di esse raggiunga l'altra.*

Sieno a, a' le altezze iniziali delle due palle al di sopra del piano orizzontale BC, ed x lo spazio che quelle devono percorrere su questo pia-

no innanzi al loro incontro. Attese le formole (*n.* 271), le palle giungeranno cadendo al punto B nei rispettivi tempi $\sqrt{\frac{2a}{g}}$, $\sqrt{\frac{2a'}{g}}$; ed ivi percuoteranno il piano inclinato AB colle rispettive velocità $\sqrt{2ag}$, $\sqrt{2a'g}$: siccome poi con queste medesime velocità (258. 2.°) le due palle rimbalzano dal piano AB e passano nel piano contiguo BC; così i tempi in cui esse percorrono rispettivamente con moto uniforme la distanza x, saranno $\frac{x}{\sqrt{2ag}}$ ed $\frac{x}{\sqrt{2a'g}}$; Quindi le due espressioni del tempo che deve passare dal cominciamento del moto sino al mutuo incontro delle palle, ci somministrano l'equazione

$$\sqrt{\frac{2a}{g}}+\frac{x}{\sqrt{2ag}}=\sqrt{\frac{2a'}{g}}+\frac{x}{\sqrt{2a'g}},$$

ovvero

$$\sqrt{\frac{2a}{g}}-\sqrt{\frac{2a'}{g}}=x\left(\frac{1}{\sqrt{2a'g}}-\frac{1}{\sqrt{2ag}}\right)$$

$$=x\left(\frac{\sqrt{2ag}-\sqrt{2a'g}}{2g\sqrt{aa'}}\right),$$

e da questa si ricava la lunghezza dello spazio domandato $x = 2\sqrt{aa'}$.

283. Problema II. *Un globo, lasciato a sè stesso, cade da una data altezza* a *sopra un piano orizzontale: si conosce l'elasticità* e *del globo, e si vuol trovare tutto lo spazio che il medesimo percorre innanzi di ridursi al riposo.*

Il globo nella prima caduta percuote il piano orizzontale con una velocità che (271) ha per espressione $\sqrt{2ag}$, e quindi rimbalza dal

medesimo piano con una velocità espressa (247. 2.°) dal prodotto $e\sqrt{2ag}$: inoltre poichè il globo acquista in ciascuna discesa quella medesima velocità (272) che ha perduto nella salita precedente; perciò lo stesso globo, dopo la seconda, la terza, ..., l'ennesima caduta e collisione, rimbalzerà dal piano orizzontale colle rispettive velocità $e^2\sqrt{2ag}$, $e^3\sqrt{2ag}$, ..., $e^n\sqrt{2ag}$. Quindi le altezze alle quali ascende il globo nei successivi rimbalzi, si esprimeranno (272. n'') coi rapporti

$$\frac{(e\sqrt{2ag})^2}{2g}, \quad \frac{(e^2\sqrt{2ag})^2}{2g}, \quad \frac{(e^3\sqrt{2ag})^2}{2g}, \ldots, \frac{(e^n\sqrt{2ag})^2}{2g};$$

ossia coi prodotti ae^2, ae^4, ae^6, ..., ae^{2n}: per conseguenza se si considera n come un numero indefinitamente grande, tutto lo spazio percorso dal corpo sino alla fine del movimento sarà

$$x = a + 2a(e^2 + e^4 + e^6 + \ldots + e^{2n}).$$

Ora i termini che sono contenuti nella parentesi, costituiscono una progressione geometrica indefinitamente prolungata, e a cagione di $e^2 < 1$, la somma di tutti que' termini ha per espressione $\frac{e^2}{1-e^2}$; dunque lo spazio domandato nel problema si determinerà colla formola

$$x = a + \frac{2ae^2}{1-e^2} = \frac{1+e^2}{1-e^2}a.$$

284. **Problema** III. *Due punti pesanti* A, B *sono situati sopra una stessa retta verticale, e la distanza delle loro posizioni iniziali è data ed è eguale ad* α; *in un medesimo istante si abbandona il punto superiore* A *al suo peso, e si lancia verticalmente da basso in alto il punto inferiore* B *con una velocità conosciuta* β. *Determinare il luo-*

go dove s'incontrano i due mobili, ed anche l'epoca del loro incontro scambievole.

Sia x la distanza del punto d'incontro dalla posizione iniziale del mobile superiore A, e si designi con t il tempo che deve passare dal principio del moto sino all'istante del mutuo incontro dei due mobili: per risolvere il problema, si avranno da determinare x e t.

Nel tempo t il punto pesante A discende senza velocità iniziale percorrendo verticalmente lo spazio x, e il punto B ascende con una velocità iniziale β ad una altezza $\alpha - x$ sopra il punto di partenza; dunque giusta la seconda formola (n) del numero (271), e la seconda formola (n') del numero seguente (272), avremo le due equazioni

$$x = \frac{1}{2} g t^2 \,, \quad \alpha - x = \beta t - \frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Eliminata la x dalle due equazioni, si trova il valore del tempo t; e sostituito questo valore nella prima equazione, si trova quello della distanza x: i due valori di tal modo determinati sono

$$t = \frac{\alpha}{\beta} \,, \quad x = \frac{g\alpha^2}{2\beta^2} \,.$$

285. **Problema** IV. *Si lascia cadere una pietra dentro a un pozzo; e dall'istante che si abbandona la pietra al suo peso fino al momento in cui si sente il suono del colpo sopra il fondo del pozzo, si contano un numero θ di minuti secondi: si vuole calcolare la profondità del pozzo, sapendosi che il suono nelle condizioni ordinarie dell'atmosfera percorre con moto uniforme* $340^m = a$ *per ogni secondo.*

Sia x la profondità del pozzo, o la quantità che si cerca: supposto che nel caso presente si possa trascurare senza errore sensibile la resistenza del mezzo, a norma della formola $s = \frac{1}{2} g t^2$, sarà $\sqrt{\frac{2x}{g}}$

l'espressione del tempo che mette la pietra per arrivare al fondo del pozzo; ed essendo a la velocità costante del suono nell'aria atmosferica, sarà $\frac{x}{a}$ l'espressione del tempo che impiega il medesimo suono a percorrere con moto equabile lo spazio x, e farsi sentire alla sommità del pozzo. Quindi il tempo totale della caduta della pietra e dell'arrivo del suono si esprimerà colla formola

$$\theta = \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{2x}{g}} \; ;$$

la quale dà luogo alla equazione

$$\frac{2x}{g} = \left(\theta - \frac{x}{a}\right)^2 = \theta^2 - \frac{2\theta x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \; ,$$

ossia

$$x^2 - 2a\left(\theta + \frac{a}{g}\right)x + x^2\theta^2 = 0 \, .$$

La risoluzione di questa equazione, che è di secondo grado rispetto alla x, ci porge i due valori evidentemente reali

$$x = a\left(\theta + \frac{a}{g}\right) \pm a\sqrt{\frac{a^2}{g^2} + 2\theta\frac{a}{g}} \; ;$$

i quali sono inoltre ambidue positivi, per la ragione che la medesima equazione ha i coefficienti alternamente positivi e negativi: ma dei due valori che può avere la x, uno solo conviene alla soluzione del problema proposto, ed è quello che risulta dal prendere negativamente il radicale. Infatti la x non può essere uguale o maggiore di $a\theta$, ma deve essere minore di questo prodotto: perchè il prodotto $a\theta$ rappresenta lo spazio, che sarebbe percorso dal suono

nell'aria in un numero θ di secondi; ma lo spazio x è percorso realmente dal suono in un tempo minore di θ, essendo θ il tempo totale della caduta della pietra sino al fondo del pozzo, e della salita del suono fino alla sommità del medesimo; dunque poichè gli spazii percorsi con moto uniforme dal suono devono essere proporzionali ai tempi corrispondenti, sarà necessariamente $x < a\theta$. Ora se nella doppia espressione dello spazio x si prendesse il segno positivo del radicale, non risulterebbe lo stesso spazio x minore, ma all'opposto riuscirebbe maggiore del prodotto $a\theta$; dunque in quella doppia espressione si dovrà adoperare il segno negativo del radicale, e così la profondità del pozzo verrà data dalla formola

$$x = a\left(\theta + \frac{a}{g} - \sqrt{\frac{a^2}{g^2} + 2\theta\,\frac{a}{g}}\right).$$

Aggiungiamo anche un problema che risguarda il moto verticale dei gravi nel pieno, ma supporremo che la resistenza del mezzo si eserciti con una legge diversa da quella che si è considerata precedentemente.

286. **Problema** V. *Determinare il movimento dei gravi nella discesa verticale in un mezzo che resista in ragione diretta della velocità, nella ipotesi che la forza di gravità rimanga costante.*

Espresso al solito con g' il valore a cui si riduce l'accelerazione prodotta dalla gravità nel mezzo resistente, e rappresentata con $\frac{g'v}{k}$ l'accelerazione proveniente dalla resistenza del mezzo, la forza acceleratrice totale nella discesa di un punto pesante sarà $\varphi = g' - \frac{g'v}{k}$: quindi attese le formole generali (n''. 261) avremo in primo luogo

$$\frac{dv}{dt} = g' - \frac{g'v}{k} = \frac{g'}{k}(k - v),$$

e ne dedurremo la formola differenziale

$$dt = \frac{k}{g'}\,\frac{dv}{k-v} = -\frac{k}{g'}\,\frac{d(k-v)}{k-v}\ .$$

L'integrazione di questa formola ci dà la relazione finita

$$t = -\frac{k}{g'}\log(k-v) + C\ :$$

e poichè $C = \frac{k}{g'}\log(k)$ nella ipotesi che sia nulla la velocità iniziale del mobile, perciò si avrà determinatamente

$$t = \frac{k}{g'}\log\left(\frac{k}{k-v}\right);$$

donde si ricava il valore della velocità in funzione del tempo, cioè

$$(1) \qquad v = k\left(1 - e^{-\frac{g't}{k}}\right).$$

Sostituendo adesso il rapporto differenziale $\frac{ds}{dt}$ in vece di v, moltiplicando per dt e integrando, otteniamo in secondo luogo

$$s = kt + \frac{k^2}{g'}e^{-\frac{g't}{k}} + C'\ \cdot$$

ora il valore della costante C' consiste nel rapporto $-\frac{k^2}{g'}$, giacchè si ha $s = 0$ per $t = 0$: dunque il valore dello spazio in funzione del tempo sarà

$$(2) \qquad s = kt - \frac{k^2}{g'}\left(1 - e^{-\frac{g't}{k}}\right).$$

Le due formole (1) e (2) sono sufficienti per determinare completamente il moto verticale dei gravi in un mezzo che resiste come la velocità: la formola (2) ci mostra che lo spazio s cresce indefinitamente col tempo, e la formola (1) ci dice che la velocità del mobile tende come a suo limite verso il valore finito e costante k.

CAPO IV.

MOTO RETTILINEO DEI GRAVI PER I PIANI INCLINATI.

287. **Formole di questo moto.** Passiamo adesso a dire del movimento rettilineo dei gravi sopra un piano inclinato all'orizzonte; cioè troviamo le formole che servono a determinare il moto di un corpo o di un punto pesante, il quale discenda ovvero ascenda per la lunghezza AC (fig. 146) di un piano inclinato.

Innanzi a tutto dimostriamo che *un tal moto varierà uniformemente, qualora si faccia astrazione dalla resistenza dell'aria e dall'attrito.* — Sieno infatti m la massa del corpo, ed α l'inclinazione del piano; e nella retta verticale GP, la quale passa pel centro di gravità del medesimo corpo, si prenda una porzione GE che rappresenti la forza motrice proveniente dalla gravità, ossia il peso mg. La forza GE si decomponga in due, una GH perpendicolare e l'altra GK parallela alla lunghezza del piano inclinato: la prima di queste componenti, quando cada nella base del corpo, viene distrutta dalla resistenza del piano inclinato e rappresenta la pressione che esercita il grave contro lo stesso piano; la seconda componente poi, cioè

$$\mathrm{GK} = \mathrm{GE} \cos \mathrm{GEH} = mg \operatorname{sen} \alpha,$$

sospinge continuamente il corpo a discendere lungo la retta AC, e solo ad essa debbono ascriversi le vicissitudini del movimento sul piano inclinato. Ora questa forza componente da cui dipende il moto del corpo grave, rimanendo ferma l'inclinazione del piano, produce un'accelerazione costante $g \operatorname{sen} \alpha$: dunque il moto dei gravi per i piani inclinati è un moto uniformemente vario; e per determinarne tutte le circostanze, basterà che nelle formole generali (m''', m^{IV}, m^{V}) del numero (269), si attribuisca il valore $g \operatorname{sen} \alpha$ alla forza acceleratrice φ.

Diamo pertanto a questa forza quel tale valore; e nelle formole citate adoperiamo le lettere θ, z ed u per indicare il tempo, lo spazio e la velocità relativamente al caso che stiamo contemplando. Nella discesa dei gravi lungo un piano inclinato, se la velocità iniziale è zero, avremo le tre formole

$$(o) \qquad u = g\theta \operatorname{sen} \alpha \,, \; z = \frac{1}{2} g\theta^2 \operatorname{sen} \alpha \,, \; u^2 = 2gz \operatorname{sen} \alpha \,;$$

e se al cominciare del moto risiede già nel mobile una velocità u_0 secondo la lunghezza del piano, avremo le tre formole

$$(o') \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = u_0 + g\theta \operatorname{sen} \alpha \,, \; z = u_0\theta + \frac{1}{2} g\theta^2 \operatorname{sen} \alpha \,, \\ \qquad u^2 - u_0^2 = 2gz \operatorname{sen} \alpha \,: \end{array} \right.$$

quanto poi alla salita dei medesimi gravi, lanciati su pel piano CA colla velocità u_0, varranno le tre formole

$$u = u_0 - g\theta \operatorname{sen} \alpha \,, \; z = u_0 \theta - \frac{1}{2} g\theta^2 \operatorname{sen} \alpha \,, \; u_0^2 - u^2 = 2gz \operatorname{sen} \alpha \,.$$

288. Confrontiamo adesso tra loro le formole (o) del numero precedente, e le formole (n) del numero (271), cioè paragoniamo il

moto dei gravi per un piano inclinato col moto verticale e libero dei medesimi: stabiliremo facilmente queste cinque conclusioni.

1.° *Discendendo due gravi durante un medesimo tempo, l'uno per la verticale e l'altro per un piano inclinato, le velocità da essi acquistate, ed anche gli spazii percorsi nella discesa perpendicolare ed obliqua, stanno tra loro come la lunghezza del piano sta alla sua altezza.* — Sieno infatti v, u le velocità che acquistano rispettivamente i due gravi; ed s, z gli spazii che percorrono in un tempo comune t, l'uno nella retta verticale AB (fig. 146) e l'altro pel piano inclinato AC: si avranno le equazioni

$$v = gt\ ,\ u = gt \operatorname{sen} \alpha\ ,$$

$$s = \frac{1}{2}\, gt^2\ ,\ z = \frac{1}{2}\, gt^2 \operatorname{sen} \alpha\ ;$$

e perciò sussisteranno le proporzioni

$$v : u = 1 : \operatorname{sen} \alpha = \mathrm{AC} : \mathrm{AC} \operatorname{sen} \alpha = \mathrm{AC} : \mathrm{AB}\ ,$$

$$s : z = 1 : \operatorname{sen} \alpha = \mathrm{AC} : \mathrm{AB}\ .$$

2.° *Partendo nel medesimo istante due gravi dalla sommità di un piano inclinato, e andando l'uno per l'altezza e l'altro per la lunghezza di esso piano; quando il primo avrà descritto tutta l'altezza, il secondo si troverà a quel punto della lunghezza che viene determinato dalla normale condotta sul piano dal piede della stessa altezza.* — Sia BD (fig. 147) la perpendicolare condotta dall'estremità dell'altezza AB sulla lunghezza AC del piano inclinato; e si dinoti con z lo spazio che un grave movendosi dal punto A sul piano percorre in quel tempo, nel quale cadendo liberamente percorrerebbe l'altezza AB. Si avrà (1.°) la proporzione AB : z = AC : AB, e quindi l'equazione

$$z = \frac{\overline{AB}^2}{AC} :$$

ma essendo BD un perpendicolo abbassato dal vertice dell'angolo retto B sulla ipotenusa AC, sussiste ancora la proporzione AC : AB = AB : AD, e perciò l'equazione

$$AD = \frac{\overline{AB}^2}{AC} ;$$

sarà dunque $z = AD$, e però è vera la proposizione affermata.

3.° Quindi *in un circolo tutte le corde* AD, DB *condotte dall'estremità superiore o inferiore del diametro verticale* AB, *sono descritte dai gravi in uno stesso tempo, cioè in quel tempo in cui si descriverebbe il medesimo diametro verticale.* — In vero se si prolunga la corda AD, fino a tanto che incontri nel punto C la tangente orizzontale BC condotta per l'estremità B, la retta AC rappresenterà un piano inclinato, e il diametro AB ne sarà l'altezza: onde essendo la retta BD perpendicolare ad AC, ne segue (2.°) che dai gravi nello stesso tempo si descriveranno la corda AD e il diametro verticale AB. Di più tirata dalla estremità superiore A un'altra corda AD′ parallela a DB, ancora essa sarà percorsa nello stesso tempo che il diametro AB : ma stante l'uguaglianza dei triangoli ABD′ ed ABD, la corda parallela AD′ è anche uguale alla corda DB ; e d'altronde due rette uguali e parallele evidentemente si percorrono da un grave in un medesimo tempo: dunque nel circolo anche le corde DB condotte alla estremità inferiore del diametro verticale vengono descritte dai gravi in pari tempo che questo medesimo diametro.

4.° *Un grave dopo di aver percorso tutta la lunghezza di un piano inclinato, ha la stessa velocità come se fosse caduto liberamente dall'altezza del medesimo piano.* — Esprimiamo con u, v le velocità che acquista rispettivamente il grave percorrendo la lunghezza AC, e cadendo dall'altezza AB di un piano inclinato: avremo

$$u^2 = 2g \cdot AC \operatorname{sen} \alpha = 2g \cdot AB \;, \quad v^2 = 2g \cdot AB \;;$$

è dunque $u = v$. Quindi se parecchi piani diversamente inclinati all'orizzonte abbiano un'altezza comune AB, è chiaro che movendosi per essi dal punto A diversi corpi pesanti, perverranno tutti con una medesima velocità all'orizzonte BC.

5.° *I tempi che impiegano due gravi a scendere, l'uno per la lunghezza di un piano inclinato e l'altro per l'altezza, stanno fra loro come la medesima lunghezza sta all'altezza del piano.* – Essendo θ e t i tempi nei quali si percorrono rispettivamente la lunghezza AC e l'altezza AB, u e v le velocità acquistate dai gravi alla fine dell'una e dell'altra discesa, hanno luogo i valori

$$u = g\theta \operatorname{sen} \alpha \;, \quad v = gt \;:$$

ma per la conclusione precedente sono uguali tra loro le due velocità u, v; si avrà dunque $\theta \operatorname{sen} \alpha = t$, e conseguentemente sarà

$$\theta : t = 1 : \operatorname{sen} \alpha = AC : AB \,.$$

289. **Discesa dei gravi per una serie di piani diversamente inclinati all'orizzonte.** Discendendo un grave per una serie continua di piani fra loro inclinati, vogliamo determinare la parte della velocità attuale che perde il grave nel suo passaggio da un piano qualunque AC (fig. 148) all'altro piano contiguo CC'; chè determinata una tal perdita, potremo poi conoscere facilmente le altre cose che appartengono alla discesa dei gravi per un numero qualunque di piani contigui.

Chiamiamo ω *l'angolo di contingenza* ECC', cioè l'angolo che forma il prolungamento di un piano AC col piano susseguente CC'; e rappresentiamo colla retta CE la velocità v, che ha il grave alla fine di quel primo piano giusta la direzione ACE. Se questa velocità si risolve nelle due CH e CK, delle quali l'una sia normale al nuovo piano CC' e l'altra abbia la direzione di questo stesso piano; è evidente che la prima componente $CH = v \operatorname{sen} \omega$, ove il corpo non

sia elastico, resterà interamente distrutta nell'urto contro il nuovo piano, e la seconda componente $CK = v\cos\omega$, rimanendo intatta, sarà la sola velocità con cui il corpo comincerà a muoversi nel piano CC': laondo un grave, nel passare da un piano a un altro diversamente inclinato all'orizzonte, perde sempre una porzione della sua velocità attuale; questa perdita poi, ottenendosi colla differenza tra la velocità che avea il grave alla fine del primo piano e quella che ha nel principio del secondo, si esprimerà manifestamente colla quantità

$$p = v(1-\cos\omega) = v\,\frac{1-\cos^2\omega}{1+\cos\omega} = \frac{v}{1+\cos\omega}\,\mathrm{sen}^2\omega\,.$$

Ora cotesta espressione, nella ipotesi che l'angolo ω sia infinitamente piccolo, rappresenta una quantità infinitesima di secondo ordine, la quale si può trascurare rispetto alla velocità finita v; dunque *nel passaggio dei gravi da un piano in un altro sarà come nulla la perdita fatta in velocità, quando è infinitamente piccolo l'angolo di contingenza o l'angolo acuto compreso dai due piani.*

290. Di qui s'inferisce che *scendendo un mobile in virtù della sola gravità per una superficie o per una curva qualunque verticale, acquista in qualsiasi punto quella medesima velocità, che acquisterebbe cadendo verticalmente dall'altezza dell'arco percorso.*

In vero la curva verticale ACC'C''... (fig. 149), per la quale discende un punto pesante, può riguardarsi come un poligono composto di un numero infinito di lati infinitamente piccoli AC, CC', C'C'', . . . , i quali lati sono bensì inclinati diversamente all'orizzonte, ma formano ciascuno col lato susseguente un angolo infinitesimo di contingenza: adunque per quello che si è dimostrato poc'anzi, il punto pesante, mentre passa da un lato all'altro, non farà veruna perdita della velocità già concepita; cioè il mobile entrerà successivamente nei singoli lati della curva con quella medesima velocità, che avea alla fine del lato precedente. Pertanto se dai punti A, C, C', C'', ... conduciamo le rette orizzontali CB, C'B',

C″B″, . . . , e le rette verticali AB″, CD, C′D′, . . . , e se dinotiamo colle lettere u', u'', u''', . . . le velocità che acquista il grave nel percorrere uno, due, tre,... lati della curva; attese le formole (o) ed (o') del numero (287), avremo

$$u'^2 = 2g\,.\,\mathrm{AC\,sen\,ACB} = 2g\,.\,\mathrm{AB}\,,$$

$$u''^2 = u'^2 + 2g\,.\,\mathrm{CC'sen\,CC'D} = 2g\,.\,\mathrm{AB} + 2g\,.\,\mathrm{CD} = 2g\,.\,\mathrm{AB'}\,.$$

$$u'''^2 = u''^2 + 2g\,.\,\mathrm{C'C''senC'C''D'} = 2g\,.\,\mathrm{AB'} + 2g\,.\,\mathrm{C'D'} = 2g\,.\,\mathrm{AB''}\,,$$

e così di seguito. Da queste espressioni si deduce che allorquando il grave sarà disceso per un numero infinito di lati ed avrà percorso un arco qualunque finito, la velocità da esso acquistata sarà $u = \sqrt{2ag}$, significandosi con a l'altezza dell'arco: ma (271) è pur questa l'espressione della velocità, che acquisterebbe il grave cadendo liberamente dall'altezza a dell'arco percorso sopra la curva; apparisce dunque manifesta la verità della proposizione, che abbiamo tolto a dimostrare.

291. Vogliamo anche dichiarare quest'altra proposizione: *se un punto materiale, non soggetto all' azione di alcuna forza continua, venga astretto a muoversi in una linea* o *superficie curva in virtù di una velocità* v *che gli è impressa da principio, conserverà sempre questa medesima velocità e procederà per la curva con moto uniforme.*

Infatti nel passaggio del punto materiale da ciascun lato della curva nel lato seguente, la perdita di velocità consiste, come abbiamo veduto di sopra, in una quantità infinitesima di secondo ordine: dunque dopo che il mobile avrà descritto un numero infinito di lati o percorso un arco qualunque finito, la perdita di velocità arriverà a una quantità infinitesima di primo ordine; la quale potendosi trascurare in confronto della quantità finita v, ne segue che nel punto mobile risiederà sempre quella velocità che gli è stata comunicata da principio, e che perciò sarà uniforme il suo movimento sulla linea o superficie curva.

Ma intorno al movimento libero o impedito di un punto materiale in una curva, diremo più a lungo nei capi seguenti: per ora diamo la soluzione di tre problemi, relativi alle cose discorse nel presente capo.

292. **Problema** I. *Un punto pesante si muove, discendendo in una retta inclinata all'orizzonte: quale dovrà essere l'inclinazione della retta, affinchè lo spazio percorso in un dato tempo, e stimato secondo la direzione orizzontale, sia il più grande possibile?*

Chiamiamo α l'inclinazione della retta, nella quale si muove il punto pesante; esprimendosi (287) col prodotto $\frac{1}{2}g\theta^2 \operatorname{sen}\alpha$ lo spazio percorso dal mobile sulla retta in un tempo θ, sarà

$$x = \frac{1}{2}\, g\theta^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

lo spazio descritto nel medesimo tempo secondo la direzione orizzontale. Questa espressione, quando venga differenziata rispetto alla variabile α, ci porge (LVII) l'equazione

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{2} g\theta^2 (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) \; :$$

ora perchè lo spazio x percorso nella direzione orizzontale sia un *maximum*, è necessario (LXX) che si abbia $\frac{dx}{d\alpha} = 0$; dunque pel medesimo effetto deve essere

$$\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 0 \, .$$

Quindi ricavandosi $\operatorname{tang}\alpha = 1$, l'inclinazione cercata sarà $\alpha = 45.°$

293. **Problema** II. *Due punti pesanti* P, P' *sono legati a un filo invariabile e di una lunghezza determinata* γ, *e giacciono insieme col medesimo filo* PAP' *su due piani* AC, AC' (fig. 150), *inclinati all'orizzonte e addossati l'uno all'altro: si vuole trovare la posi-*

zione dei due mobili e la loro velocità comune a una data epoca, nella ipotesi che l'intersezione dei due piani predetti sia orizzontale, e il sistema rimanga costantemente sopra il piano CAC′ *perpendicolare alla intersezione dei due piani inclinati.*

Sieno m ed m' le masse rispettive dei due mobili, z e z' le loro distanze dal punto fisso A alla fine di un tempo qualunque dato θ; dinotino inoltre α ed α' gli angoli che i due piani inclinati formano rispettivamente colla retta orizzontale CC′, ε ed ε' gli angoli che fanno i medesimi piani colla retta verticale AB. Trascurando il peso del filo, sappiamo (287) che i due punti del sistema vengono sollecitati a discendere per le lunghezze dei piani inclinati dalle rispettive forze $mg \operatorname{sen} \alpha$, $m'g \operatorname{sen} \alpha'$: per conseguenza la forza motrice onde è animato tutto il sistema, si esprimerà colla differenza $mg \operatorname{sen} \alpha - m'g \operatorname{sen} \alpha'$, ovvero $mg \cos \varepsilon - m'g \cos \varepsilon'$; e il moto dello stesso sistema sarà uniformemente vario, e si farà coll'accelerazione costante

$$\frac{mg \cos \varepsilon - m'g \cos \varepsilon'}{m + m'} .$$

Ora se si chiamano u_0 ed u le velocità del sistema al principio e alla fine del tempo dato θ, e se si designa inoltre con z_0 il valore iniziale della distanza z, sarà u la velocità eziandio del punto pesante P alla fine del detto tempo θ, e $z - z_0$ sarà lo spazio percorso sul piano AC dal medesimo punto in questo intervallo di tempo: quindi a norma delle equazioni del moto rettilineo uniformemente vario (269), si avranno le due formole

$$u = u_0 + \frac{m \cos \varepsilon - m' \cos \varepsilon'}{m + m'} g\theta ,$$

$$z = z_0 + u_0 \theta + \frac{m \cos \varepsilon - m' \cos \varepsilon'}{m + m'} \cdot \frac{g\theta^2}{2} ;$$

e per mezzo di queste formole conosceremo determinatamente per

un tempo dato θ la velocità del sistema, e le rispettive distanze z, e $z' = \lambda - z$ dei due punti mobili dal punto fisso A.

Se poniamo $\varepsilon = 0 = \varepsilon'$, il sistema si ridurrà allora e rappresenterà la macchina di Atwood, sulla quale perciò sussiste $u = \frac{m - m'}{m + m'} g\theta$ nella ipotesi che ogni velocità iniziale sia nulla. Su questa macchina si potrà dunque diminuire quanto si vuole la forza acceleratrice $\frac{m - m'}{m + m'} g$ dei gravi che cadono verticalmente, e la loro velocità u corrispondente a un tempo qualunqne θ; e questo giova sì a trascurare senza errore sensibile la resistenza dell'aria, e sì ancora a verificare esattamente le leggi (271) della caduta verticale dei gravi.

294. **Problema** III. *Due punti, uguali di massa e dotati della medesima elasticità* e, *vengono posti nella periferia di un circolo verticale, alla distanza di* 60 *gradi di qua e di là dalla estremità inferiore del diametro verticale; e quindi abbandonati al proprio peso a un medesimo istante, si lasciano cadere sulla curva circolare, dove si urtano a vicenda nella estremità sopraddetta del diametro: si vuol determinare la somma delle corde di tutti gli archi diversi, che l'uno o l'altro mobile descriverà sino alla estinzione del moto.*

Innanzi tratto osserviamo che le velocità u ed u' acquistate da un grave nella discesa per diversi archi circolari AA'B, A'B'B (fig. 151) sino al punto infimo B, stanno tra loro come le corde c e c' degli archi medesimi. Infatti chiamando a il raggio del circolo, e dinotando con h ed h' le altezze HB ed H'B dei due archi, abbiamo (290) la proporzione

$$u : u' = \sqrt{2gh} : \sqrt{2gh'} = \sqrt{2ah} : \sqrt{2ah'} = c : c' .$$

Ciò posto, l'arco di 60° pel quale discendono da principio i due mobili, è sotteso da una corda $= a$, ed ha un'altezza $= a$ sen. v. 60° $= \frac{1}{2} a$; perciò la prima collisione tra i due punti nella estre-

mità del diametro verticale, si farà (290) colla velocità comune $\sqrt{ag}$. Quindi le successive velocità, colle quali i due punti o ritornano indietro ascendendo per archi sempre più piccoli, ovvero si urtano scambievolmente alla fine delle discese consecutive in B, si esprimeranno (246. l'') coi prodotti

$$e\sqrt{ag}\ ,\ e^2\sqrt{ag}\ ,\ e^3\sqrt{ag}\ ,\ldots,\ e^n\sqrt{ag}\ ;$$

e così giusta l'osservazione che abbiamo messa innanzi, le corde degli archi differenti che percorre l'uno o l'altro mobile dopo le successive collisioni, avranno per valore le espressioni

$$ae\ ,\ ae^2\ ,\ ae^3\ ,\ldots,\ ae^n\ .$$

Laonde se si considera n come un numero indefinitamente grande, la somma delle corde di tutti gli archi che descrive sulla curva circolare l'uno o l'altro punto sino al terminare del movimento, sarà

$$x=a+a(e+e^2+e^3+\ldots+e^n):$$

ma dalla teoria delle progressioni abbiamo

$$e+e^2+e^3+\ldots+e^n=\frac{e}{1-e}\ ;$$

sarà dunque

$$x=a+\frac{ae}{1-e}=\frac{a}{1-e}\ .$$

CAPO V.

MOVIMENTO CURVILINEO DI UN PUNTO MATERIALE LIBERO PER L'AZIONE DI UNA FORZA QUALUNQUE.

295. Se la direzione della forza ond'è sollecitato continuamente un punto materiale, non rimane sempre la stessa, ovvero non coincide colla direzione della velocità iniziale, il movimento del punto succederà allora in una linea curva. La qual cosa perchè meglio apparisca, immaginiamo che un dato tempo t sia diviso in un numero qualunque di parti uguali ciascuna a θ, e supponiamo che la forza agisca sul mobile solamente al principio dei singoli intervalli θ: in questa ipotesi è chiaro che negli istanti in cui a un intervallo di tempo succede l'altro, il punto materiale si troverà determinato dalla velocità preconcepita e dall'impulso istantaneo della forza a percorrere con moto uniforme due rette diverse; fatta dunque la composizione dei movimenti, nei successivi intervalli θ si descriveranno dal mobile altrettante rette (38) inclinate tra loro a vicenda, e nel tempo t si descriverà per conseguente un poligono diverso secondo la differente intensità e direzione della forza. Immaginiamo adesso che si accresca indefinitamente il numero degli intervalli θ, e che si diminuisca nello stesso modo la loro grandezza: le azioni consecutive della forza verranno accostandosi senza fine l'una all'altra, e come s'ingrandirà il numero così si accorcierà in infinito la lunghezza dei lati del poligono descritto; sicchè quando invece della forza che agisce con intermittenza, si abbia in fine una forza continua nella sua azione e soggetta a certe leggi quanto alla intensità e alla direzione, in luogo del poligono percorso dal mobile si avrà una linea curva, la quale rivolgerà naturalmente la sua concavità verso la parte dove è diretta l'azione della forza medesima.

Vuolsi qui osservare che divenendo infinito nel numero de' suoi elementi il poligono descritto dal mobile e rappresentando per tal modo una linea curva, i prolungamenti dei suoi lati infinitesimi non sono altro che le tangenti nei diversi punti della curva stessa: ora se

in qualcuno di questi punti cessasse l'azione della forza, il punto materiale che incede per la curva, a cagione della sua inerzia, continuerebbe a muoversi nel prolungamento del lato in cui si trova attualmente; dunque ove in qualche punto della curva si rimanga la forza dall'agire sul mobile, trascorrerà questo per la tangente della curva in quel medesimo punto.

Poste queste cose, dobbiamo trovare le equazioni e dimostrare le proprietà del moto curvilineo: per maggior chiarezza, tratteremo in due capi distinti del moto prodotto in linea curva da una forza di qualunque direzione, e di quello che si effettua in particolare per l'azione di una forza diretta costantemente a un centro.

296. **Espressione della velocità nel movimento curvilineo.** La curva sulla quale si muove un punto materiale, venga riferita a tre assi coordinati e rettangolari OX, OY, OZ; e si chiami v la velocità alla fine del tempo t, ed s l'arco percorso nello stesso tempo dal mobile che ha per coordinate le rette x, y, z. Nel tempo infinitesimo dt il punto materiale percorre sulla curva un arco infinitamente piccolo ds; e questo suo movimento si può considerare come rettilineo ed uniforme, dacchè la velocità v concepita nel moto precedente non varia nell'intervallo dt quanto alla direzione e alla grandezza, se non di una quantità infinitesima che si trascura: dunque come nel moto rettilineo, così anche nel moto curvilineo avrà luogo l'espressione $v = \frac{ds}{dt}$.

Oltre a ciò, nel punto (x, y, z) la velocità ha la direzione della tangente o dell'elemento ds della curva; ed essendo questo elemento la diagonale di un parallelepipedo rettangolo che ha per lati contigui gl'incrementi dx, dy, dz, i coseni degli angoli fatti dalla direzione della velocità coi rispettivi assi ortogonali, si esprimeranno (29) coi rapporti

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} \quad .$$

Moltiplicando cosiffatti rapporti per la velocità $\frac{ds}{dt}$, otterremo (38),

le componenti di questa parallele agli assi; ciò sono

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}:$$

risulterà quindi (38) una seconda espressione della medesima velocità

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2};$$

la quale si riduce evidentemente alla formola più semplice

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

se la curva descritta dal mobile è piana, e gli assi OX, OY si prendono nel piano stesso della curva.

297. Equazioni differenziali del moto curvilineo. Alla fine del tempo t, e nella posizione (x, y, z) del punto mobile, si concepisca decomposta la forza acceleratrice φ in tre altre X, Y, Z parallele agli assi coordinati. Sappiamo che gli effetti di più forze, le quali agiscono simultaneamente su di un punto materiale, sono indipendenti tra loro; cioè sappiamo che ciascuna di quelle forze produce lo stesso effetto, come se fosse sola ed agisse separatamente dalle altre (10): ora le tre forze componenti X, Y, Z hanno rispettivamente una stessa direzione collè velocità componenti $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; e perciò sul punto materiale (x, y, z) producono, ciascuna da sè, un movimento rettilineo che si determina con equazioni della stessa forma di quelle che abbiamo trovato nel numero (261. m''): attesa dunque la forma di queste equazioni, nel movimento curvilineo prodotto dalla forza φ o dalle sue componenti combinate insieme, oltre alla espressione della velocità v o delle sue componenti notate di sopra, si avranno ancora le formole

$$(p)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X}\,,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y}\ ,\ \frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z}.$$

Queste tre equazioni appartengono al moto di un punto materiale, che descrive una curva qualunque nello spazio: se la curva fosse posta in un piano, e si prendessero in questo gli assi p. es. OX ed OY, le equazioni del moto si ridurrebbero a due sole

$$(p')\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X}\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y}\ ,$$

dove è sempre la quantità t che si considera come variabile ed indipendente.

298. Due cose abbiamo qui a notare. 1.° Nelle equazioni generali (p) ovvero (p') del moto curvilineo, le singole componenti della forza acceleratrice si prendono positivamente, se tendono a far crescere la corrispondente coordinata del mobile; se poi tendono a far diminuire questa coordinata, allora si prendono negativamente: la ragione si è, perchè quelle componenti nel primo caso si dirigono verso la parte positiva dell' asse a cui sono parallele, nel secondo caso poi sono dirette verso la parte opposta.

2.° Nelle medesime equazioni si trovano contenute tutte le circostanze del movimento; e per mezzo di esse sotto le debite condizioni si risolvono tutte le quistioni, che possono proporsi intorno al moto di un punto materiale. Così data la forza acceleratrice, sicchè possano integrarsi per es. le equazioni (p') differenziali di secondo ordine; con una prima integrazione verremo a conoscere le componenti rettangolari $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ della velocità del mobile, e quindi ne ritrarremo la stessa velocità v che risiede nel punto materiale alla fine di un tempo qualunque t: di più con una seconda integrazione si scopriranno le relazioni tra le due coordinate x, y, e il tempo t; onde a qualsiasi istante si potrà sapere la posizione del mobile nella sua curva o *traiettoria:* eliminata finalmente la quantità t, risulterà una sola equazione tra le coordinate x ed y,

la quale ci farà conoscere la natura della linea che descrive il punto materiale col suo moto. Le quantità costanti che vanno congiunte coi singoli integrali, si determinano per lo stato iniziale del punto mobile; cioè mediante le componenti della velocità e le coordinate del punto, le quali corrispondono al valore $t = 0$. Viceversa quando vengono date due equazioni finite fra il tempo t e le coordinate x, y di un punto che si muova in una curva piana, con due differenziazioni successive troveremo le componenti della velocità e della forza accaleratrice secondo le direzioni degli assi; ed eliminando dalle due equazioni la quantità con cui si esprime il tempo, troveremo anche la curva che è percorsa dal mobile. Queste cose s'intenderanno meglio dagli esempii, che soggiungeremo alla fine del capo presente.

299. **Componenti tangenziale e normale della forza acceleratrice.** Il metodo da noi esposto nei numeri precedenti consiste, come è chiaro, nel decomporre a ogni istante la velocità preconcepita dal mobile e la forza acceleratrice in altre velocità e forze, parallele a due o tre assi fissi, riducendosi così lo studio del movimento curvilineo alle formole del moto rettilineo: questo metodo fu introdotto nella Meccanica ai tempi di Mac-Laurin, il quale ne parlò per il primo nel suo *Trattato delle Flussioni*; e innanzi a una tale epoca, le questioni del moto curvilineo erano tutte risolute col metodo delle componenti tangenziali e normali. Quest' altro metodo, quantunque non si accommodi così bene come il primo alle trasformazioni dell' analisi, è nondimeno più conforme alla natura del movimento curvilineo, e da essa più immediatamente si deriva; non sarà quindi inutile che considerando il movimento di un punto materiale e libero per una curva piana, cerchiamo in questo luogo le due formole, sulle quali é fondato il metodo delle componenti tangenziali e normali.

Nel punto (x, y) dove si trova il mobile alla fine del tempo t, sieno λ e θ gli angoli rispettivi che coll' asse OX formano da parti opposte la tangente o il prolungamento dell' arco elementare ds, e la normale o il raggio r del circolo osculatore. Di già sappia-

mo che la componente della forza acceleratrice φ secondo l' asse predetto, ha per espressione

$$X = \frac{d^2x}{dt^2} \ :$$

ma la componente della velocità v secondo il medesimo asse, la quale si esprime con $\frac{dx}{dt} = v \cos\lambda$, ci dà

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(v\cos\lambda)}{dt} = \frac{dv}{dt}\cos\lambda + v\,\frac{d.\cos\lambda}{dt} \ ;$$

sarà dunque

$$X = \frac{dv}{dt}\cos\lambda + v\,\frac{d.\cos\lambda}{dt} \ .$$

Ora attesa la penultima espressione, contenuta nel numero (XCVII) dell' Introduzione e relativa al raggio di curvatura, abbiamo evidentemente

$$\frac{d.\cos\lambda}{dt} = -\frac{\operatorname{sen}\lambda\, d\lambda}{dt} = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \theta)}{dt} \ . \ \frac{ds}{r} = \frac{v}{r}\cos\theta :$$

adunque si otterrà in fine l' equazione

$$X = \frac{dv}{dt}\cos\lambda + \frac{v^2}{r}\cos\theta \ ;$$

nella quale rappresentando il primo membro X la proiezione della forza acceleratrice sopra un asse qualunque OX, e i due termini del secondo membro essendo sul medesimo asse le proiezioni di due forze $\frac{dv}{dt}$ e $\frac{v^2}{r}$ rispettivamente dirette secondo la tan-

gente e la normale, ne segue che conforme al teorema delle proiezioni (34. 3°.), quella prima forza debba essere la risultante di queste ultime forze. Così nel movimento di un punto libero in linea curva, la forza acceleratrice φ si decompone a ciascuno istante in due forze, l'una nella direzione della tangente e l'altra nella direzione della normale o del raggio di curvatura: la prima componente si chiama *forza tangenziale*, e la seconda si distingue col nome di *forza centipreta*, siccome quella che tende al centro di curvatura; e designando coteste componenti colle lettere T ed N, avremo per le loro espressioni le due formole

$$(p'') \qquad T=\frac{dv}{dt}\ ,\ N=\frac{v^2}{r}\ .$$

300. Le medesime formole possono anche stabilirsi nel modo seguente. Risguardando la curva CC′ (fig. 152.ª), descritta dal mobile, come un poligono composto di un numero infinito di lati, rappresentiamo con ω l'angolo di contingenza nel punto M, cioè l'angolo infinitamente piccolo TMT′ che fanno in M due lati consecutivi del poligono, o le due tangenti MT ed MM′T′ della curva in M ed M′: sia v la velocità, che alla fine di un tempo t ha il mobile M nella direzione della tangente MT; sarà $v+dv$ la velocità che nella direzione della tangente MM′T′ ha lo stesso mobile, dopo di avere percorso nell'intervallo susseguente dt l'elemento infinitesimo $MM'=ds$.

Ciò posto, si risolva questa ultima velocità $v+dv$ in due componenti rettangolari, rispettivamente dirette secondo MT ed MD, cioè secondo la tangente e la normale alla curva nel punto M; saranno (38)

$$(v+dv)\cos\omega\ ,\ (v+dv)\operatorname{sen}\omega$$

le rispettive espressioni delle due velocità componenti: se ora in queste espressioni si sostituiscono prima ai due fattori $\cos\omega$, $\operatorname{sen}\omega$

i loro sviluppi (LVIII), cioè $1-\frac{\omega^2}{2}+\ldots$, $\omega-\frac{\omega^3}{2.3}+\ldots$, e se si trascurano dipoi nei due prodotti risultanti le quantità infinitesime di ordine superiore al primo, le predette velocità componenti diverranno semplicemente $v+dv$, ωv. E poichè chiamando r il raggio CD del circolo osculatore o di curvatura presso il punto M, abbiamo (XCVII) il valore $r=\frac{ds}{\omega}$, e quindi $\omega=\frac{ds}{r}$; perciò le medesime velocità componenti si rappresenteranno in fine colle espressioni $v+dv$, $\frac{v}{r}ds$.

Se queste sono le componenti della velocità, nelle direzioni della tangente MT e della normale MD, alla fine del tempo $t+dt$; è chiaro che le velocità acquistate dal mobile giusta le medesime direzioni nell'istante dt, saranno dv e $\frac{v}{r}ds$: dividendo queste due velocità per l'incremento stesso dt, otterremo (261) le componenti *tangenziale* e *centripeta* dell'accelerazione in un punto qualunque M della curva o della traiettoria percorsa dal mobile, vale a dire le componenti già trovate in un altro modo

$$T=\frac{dv}{dt}, \quad N=\frac{v}{r}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{v^2}{r}.$$

Stabilite le formole generali del moto curvilineo di un punto materiale libero, veniamo adesso a considerare il movimento di un punto libero, nella ipotesi che tutta la forza agisca sempre nella direzione della tangente, ovvero nella ipotesi che la forza riesca costantemente normale alla traiettoria.

301. **Movimento prodotto da una forza che agisce sempre nella direzione della tangente alla traiettoria.** Un tal movimento sarà rettilineo: la verità di questa asserzione è evidente per sè medesima, ma per esercizio di calcolo si può anche dimostrare nel seguente modo

Sieno λ, μ, ν, gli angoli che in un punto (x, y, z) fa la tangente cogli assi ortogonali; e λ', μ', ν' sieno pure gli angoli che coi medesimi assi forma generalmente la direzione della forza acceleratrice φ : si avranno (296. 29. 297) le espressioni

$$\cos\lambda=\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{v\,dt}\,,\ \cos\mu=\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{v\,dt}\,,\ \cos\nu=\frac{dz}{ds}=\frac{dz}{v\,dt}\,;$$

$$\cos\lambda'=\frac{X}{\varphi}=\frac{d^2x}{\varphi\,dt^2}\,,\ \cos\mu'=\frac{Y}{\varphi}=\frac{d^2y}{\varphi\,dt^2}\,,\ \cos\nu'=\frac{Z}{\varphi}=\frac{d^2z}{\varphi\,dt^2}\,.$$

Quando la direzione della forza coincide costantemente colla tangente, come si suppone nel caso presente; allora essendo identici gli angoli λ e λ', μ e μ', ν e ν', saranno uguali tra loro le corrispondenti espressioni dei coseni: quindi eliminando le due quantità φ e v, otterremo le uguaglianze

$$\frac{d^2x}{dt^2}:\frac{dx}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}:\frac{dy}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}:\frac{dz}{dt}$$

tra i rapporti delle seconde e delle prime derivate rispetto al tempo, ed anche le uguaglianze conseguenti

$$d\frac{dx}{dt}:\frac{dx}{dt}=d\frac{dy}{dt}:\frac{dy}{dt}=d\frac{dz}{dt}:\frac{dz}{dt}\,.$$

L'integrale del primo di questi rapporti è $\log\left(\frac{dx}{dt}\right)+\log(h)$, ossia $\log\left(h\,\frac{dx}{dt}\right)$; e somiglianti a questa espressione sono gli integrali degli altri rapporti uguali: facendo dunque l'integrazione e indicando con h, h' h'' tre costanti arbitrarie, avremo

$$\log\left(h\,\frac{dx}{dt}\right)=\log\left(h'\frac{dy}{dt}\right)=\log\left(h''\frac{dz}{dt}\right),$$

ovveramente

$$h\frac{dx}{dt}=h'\frac{dy}{dt}=h''\frac{dz}{dt}\ . \tag{1}$$

Fatta di nuovo l'integrazione, e dinotate con k, k', k'' tre nuove costanti, verranno le relazioni finite tra le coordinate del punto mobile

$$hx+k=h'y+k'=h''z+k'';$$

le quali relazioni si riducono alle due equazioni di primo grado

$$\left\{\begin{aligned} y&=\frac{h}{h'}x+\frac{k-k'}{h'}=ax+b\ ,\\ y&=\frac{h''}{h'}z+\frac{k''-k'}{h'}=a'z+b'\ ,\end{aligned}\right. \tag{2}$$

e ci rappresentano (XXXIV) una linea retta nello spazio.

Laonde nella ipotesi che abbiamo fatto intorno alla direzione della forza, la traiettoria del punto da essa sollecitato è una linea retta. La posizione iniziale del mobile sarà un punto di questa retta, e le componenti iniziali della velocità ci faranno conoscere, mediante le equazioni (1), i rapporti delle quantità costanti h, h' ed h'', ossia i coefficienti angolari a ed a' delle equazioni (2): di tal modo conoscendosi un punto e la direzione della retta rappresentata da queste ultime equazioni, sarà compiutamente determinata la posizione della medesima retta; e basterà quindi sapere la legge con cui agisce la forza, per risolvere tutte le questioni del movimento colle formole del capo II.

302. **Movimento prodotto da una forza costantemente normale alla traiettoria.** Un tal movimento sarà uniforme. Per darne la prova, ripigliamo le espressioni del numero precedente, cioè

$$\cos\lambda=\frac{dx}{v\,dt}\ ,\ \cos\mu=\frac{dy}{v\,dt}\ ,\ \cos\nu=\frac{dz}{v\,dt}\ ,$$

$$\cos\lambda' = \frac{d^2x}{\varphi dt^2} \;,\; \cos\mu' = \frac{d^2y}{\varphi dt^2} \;,\; \cos\nu' = \frac{d^2z}{\varphi dt^2} \;;$$

e sono queste le espressioni dei coseni degli angoli, che la tangente e la direzione della forza formano rispettivamente cogli assi coordinati. Ora per ipotesi essendo la forza costantemente normale alla curva o perpendicolare alla sua tangente, in ogni punto si deve verificare (31. 3.°) l'equazione.

$$\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = 0;$$

dunque nella medesima ipotesi sussisterà pure in ogni punto della curva la equazione

$$\frac{2dx\,d^2x}{dt^2} + \frac{2dy\,d^2y}{dt^2} + \frac{2dz\,d^2z}{dt^2} = 0,$$

la quale ha generalmente (LXXXVII) per suo integrale

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \text{Cost.}.$$

Il primo membro di questa ultima equazione non esprime altro (296) che il quadrato della velocità del mobile nel punto (x, y, z); dunque quando la direzione della forza è normale alla curva, la velocità si conserva costantemente la stessa, e per conseguenza il moto del punto materiale è uniforme.

303. Alle due conclusioni degli ultimi numeri possiamo arrivare più speditamente, facendo uso delle formole (p''. 300), relative alle componenti tangenziale e normale della forza acceleratrice. In vero se la forza agisce sempre nella direzione della tangente, allora sarà nulla la componente normale N, e in ciascun punto della traiettoria

si avrà $\frac{v^2}{r} = 0$: ciò vuol dire che in ciascun punto il raggio di curvatura è infinito, e che per conseguenza la traiettoria è una linea retta. Se poi la forza agisce costantemente nella direzione della retta normale, allora sarà nulla la componente tangenziale T, e si avrà sempre $\frac{dv}{dt} = 0$: ciò vuol dire che la velocità v è costante, e che quindi è uniforme il moto del punto materiale nella sua traiettoria.

304. Ha luogo questo ultimo caso, allorquando il punto materiale descrive liberamente una periferia circolare con una accelerazione che tenda costantemente al centro del circolo; giacchè in tale ipotesi la forza operando sempre nella direzione del raggio, riesce pur sempre normale alla curva descritta. In cotesto movimento circolare ed uniforme, la forza acceleratrice φ si confonde colla forza centripeta N, e la sua espressione ci vien data dalla seconda formola (p''); sicchè chiamando v la velocità costante del mobile, ed a il raggio del circolo, avremo

$$\varphi = \frac{v^2}{a} .$$

Adunque *nel moto circolare, dimorando il centro delle forze nel centro stesso del circolo, l'accelerazione è sempre uguale al rapporto tra il quadrato della velocità e il raggio della curva.*

Oltre a ciò si dinoti con T il tempo periodico, cioè quel tempo che spende il mobile a percorrere tutta la periferia del circolo: per la uniformità del movimento essendo $v = \frac{2\pi a}{T}$, si avranno rispetto a due punti che si muovono in diverse circonferenze, le espressioni

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a}{T^2} \ , \ \varphi' = \frac{4\pi^2 a'}{T'^2} .$$

Onde se si suppone $T = T'$, sussisterà la proporzione

$$\varphi : \varphi' = a : a';$$

se poi si suppone $\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3}$, sussisterà l'altra proporzione

$$\varphi : \varphi' = a'^2 \cdot a^2.$$

Vale a dire *nelle periferie circolari descritte con moto equabile, le forze acceleratrici stanno tra loro come i raggi corrispondenti, se sono uguali i tempi periodici; stanno poi nella ragione inversa dei quadrati dei raggi, qualora i quadrati dei tempi periodici sieno proporzionali ai cubi dei medesimi raggi.*

Veniamo ad altri esempii o problemi, per applicarvi direttamente le formole (p'), siccome abbiamo promesso di fare alla fine del numero (298).

305. **Problema** I. *Un punto materiale descrive una cicloide per l'azione di una forza costantemente parallela alla base della curva: si vuole determinare l'intensità della forza acceleratrice, onde il mobile è sollecitato in qualunque punto della sua traiettoria.*

Computate le ascisse dal vertice nell'asse della cicloide descritta, la velocità del punto materiale stimata secondo il medesimo asse è data dall'integrale della equazione $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$, e si conserva sempre la stessa: per la qual cosa chiamando β cotesta componente costante della velocità, ed Y la forza che cerchiamo, avremo le due formole

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \beta, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y.$$

Le equazioni finite della cicloide (XXXI) sono queste

$$x = a(1 - \cos\theta), \quad y = a(\theta + \operatorname{sen}\theta);$$

dove la lettera a dinota il raggio del circolo generatore, e il prodotto $a\theta$ esprime il supplemento di quell'arco che nel medesimo circolo è compreso tra la base della cicloide e il punto (x, y): la prima di cosiffatte equazioni, sottoposta a una differenziazione, mediante la prima formola (1) ci porge il valore

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a \operatorname{sen} \theta \, d\theta}{dt} = \beta ,$$

e ci dà per conseguenza la relazione

$$(2) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\beta}{a \operatorname{sen} \theta} ;$$

la seconda poi, differenziata per due volte consecutive, ci porge mediante questa stessa relazione (2) i valori

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a\, d\theta}{dt} + \frac{a \cos \theta \, d\theta}{dt} = \frac{\beta}{\operatorname{sen} \theta} + \frac{\beta \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} ,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{\beta \cos \theta \, d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta \, dt} - \frac{\beta \, d\theta}{\operatorname{sen}^2 \theta \, dt} = - \frac{\beta^2 \cos \theta}{a \operatorname{sen}^3 \theta} - \frac{\beta^2}{a \operatorname{sen}^3 \theta} .$$

Sostituito questo ultimo valore nella seconda formola (1), si ottiene quanto al valore assoluto la forza che produce il moto del punto libero per una curva cicloidale, cioè

$$Y = \frac{\beta^2 (1 + \cos \theta)}{a \operatorname{sen} \theta (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{\beta^2}{a \operatorname{sen} \theta (1 - \cos \theta)}$$

$$= \frac{2\beta^2}{a(2 \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen} 2\theta)} .$$

Se il punto materiale descrivesse la ellisse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

sotto l'azione di una forza parallela all'asse coniugato $2b$, si troverebbe per somigliante modo la espressione

$$Y = \frac{b^4 \beta^2}{a^2 y^3} \quad ;$$

e se la ellisse si riducesse a un circolo di raggio a, la forza diverrebbe

$$Y = \frac{a^2 \beta^2}{y^3} \quad .$$

In queste espressioni colla lettera β è sempre designata la componente costante della velocità secondo l'asse delle ascisse, e però si conchiude che in quella ellisse e in questo circolo la forza acceleratrice sta nella sola ragione inversa del cubo delle ordinate y.

306. **Problema** II. *Un punto materiale descrive la parabola* $y^2 = 2px$ *sotto l'azione di due forze, delle quali una è parallela all'asse della curva ed è incognita, l'altra agisce secondo la perpendicolare abbassata sopra l'asse ed è proporzionale alla lunghezza di questa medesima perpendicolare. È data la velocità* β *del mobile al vertice della parabola, e si domanda di determinare la forza incognita* X, *e la posizione* (x, y) *del mobile alla fine di un tempo qualunque* t.

Chiamata μ la forza perpendicolare all'asse della traiettoria rispetto all'unità di distanza, sarà $Y = -\mu y$ l'espressione della medesima forza rispetto alla distanza y; quindi per rappresentare il moto, si avranno (297. p') nel presente caso le due equazioni

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X \, , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y \, .$$

La seconda di queste equazioni, moltiplicata per $2dy$ e integrata, ci dà $\frac{dy^2}{dt^2}=-\mu y^2+C$: ma siccome nel vertice della parabola si ha $y=0$, e tutta la velocità del mobile si riduce alla sola componente $\frac{dy}{dt}=\beta$; così la costante C risulterà uguale a β^2, e per conseguenza si avrà l'equazione

$$(2) \qquad \frac{dy^2}{dt^2}=\beta^2-\mu y^2 .$$

Quanto alla prima parte del problema, l'equazione della traiettoria $y^2=2px$, quando sia differenziata due volte di seguito in ordine alla quantità che ci dinota il tempo, diviene successivamente

$$y\frac{dy}{dt}=p\frac{dx}{dt} ,$$

$$\frac{dy^2}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}=p\frac{d^2x}{dt^2} ;$$

e sostituendo in quest'ultima formola i valori delle derivate seconde che ci vengono dati dalle equazioni (1), avremo la nuova formola

$$\frac{dy^2}{dt^2}=\mu y^2+pX :$$

si confronti adesso questa formola colla equazione (2); si otterrà immediatamente il valore domandato della forza parallela all'asse della traiettoria, cioè

$$X=\frac{\beta^2-2\mu y^2}{p}=\frac{\beta^2}{p}-4\mu x .$$

Quanto alla seconda parte del problema, crescendo insieme le quantità t ed y, l'equazione (2) si può mettere sotto la forma

$$dt=\frac{dy}{\sqrt{\beta^2-\mu y^2}}=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{d\frac{y\sqrt{\mu}}{\beta}}{\sqrt{1-\left(\frac{y\sqrt{\mu}}{\beta}\right)^2}},$$

e per mezzo della integrazione diviene

$$t=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\operatorname{arcsen}\frac{y\sqrt{\mu}}{\beta}+C':$$

ma preso per origine del tempo l'istante in cui il mobile passa per il vertice della parabola, si hanno simultaneamente $t=0$ ed $y=0$, e perciò il valore della costante C' è nullo; sarà dunque

$$t=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\operatorname{arc\,sen}\frac{y\sqrt{\mu}}{\beta},$$

Da questa ultima equazione si ricava prima il valore della ordinata

$$y=\frac{\beta}{\sqrt{\mu}}\operatorname{sen}(t\sqrt{\mu});$$

e quindi attesa l' equazione della parabola e la formola trigonometrica $2\operatorname{sen}^2 a=1-\cos 2a$, si ricava ancora il valore della ascissa

$$x=\frac{y^2}{2p}=\frac{\beta^2}{2p\mu}\operatorname{sen}^2(t\sqrt{\mu})=\frac{\beta^2}{4p\mu}\left[1-\cos(2t\sqrt{\mu})\right].$$

I valori delle due coordinate x ed y risolvono la seconda parte

del problema, determinando la posizione del mobile a una data epoca; e l'espressione della forza X, mediante la sostituzione del valore x, si riduce a quest'altra $X = \frac{\beta^2}{p}\cos(2t\sqrt{\mu})$.

307. **Problema** III. *Un punto materiale è lanciato con una data velocità β parallelamente a una retta fissa OX, ed è insieme attratto continuamente verso questa retta con una forza proporzionale alla distanza: vogliamo determinare la posizione del mobile a un istante qualunque, e trovare anche l'equazione della curva da esso percorsa.*

Sia b la distanza iniziale del punto materiale dalla retta OX, e μ^2 sia l'attrazione all'unità di distanza del punto dalla retta: si prenda OX per asse delle ascisse, e per asse delle ordinate si prenda la retta perpendicolare OY che passa per la posizione iniziale del mobile. La traiettoria giacerà tutta nel piano XOY, e le componenti della forza secondo gli assi, in una posizione qualunque saranno

$$X = 0 \,, \; Y = -\mu^2 y \,;$$

onde si avranno nel movimento del punto le due equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \,, \; \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 y \,.$$

Integrando due volte queste equazioni, e determinando le costanti delle successive integrazioni per le condizioni iniziali del mobile, otterremo

$$\frac{dx}{dt} = C = \beta \,, \; x = \beta t + C' = \beta t \,,$$

$$\frac{dy^2}{dt^2} = -\mu^2 y^2 + C'' = \mu^2(b^2 - y^2) \,,$$

$$dt = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{-d\frac{y}{b}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} ,$$

$$t = \frac{1}{\mu}\text{arc}.\cos\frac{y}{b} + C''' = \frac{1}{\mu}\text{arc}.\cos\frac{y}{b} .$$

È quindi manifesto che la posizione del punto materiale, alla fine di un tempo t, si determina colle due formole

$$x = \beta t , \quad y = b\cos(\mu t) ;$$

e che la curva descritta dal mobile si rappresenta colla equazione trascendente

$$y = b\cos\frac{\mu x}{\beta} .$$

308. **Problema** IV. *Un altro punto materiale è pur lanciato colla velocità β nella direzione* OX, *ed è attratto nel medesimo tempo verso un centro che si muove equabilmente nella retta perpendicolare* OY: *se la forza acceleratrice si suppone proporzionale alla distanza del mobile dal medesimo centro, qual sarà la posizione del punto materiale in quell'istante, in cui il suo movimento diviene parallelo alla direzione* OY ?

Sieno b la distanza iniziale del centro di azione dall'origine O, β' la velocità uniforme del medesimo centro, μ^2 l'accelerazione all'unità di distanza, x ed y le coordinate del punto mobile rispetto agli assi OX ed OY. Il centro di attrazione percorre nel tempo t lo spazio $\beta' t$: perciò alla fine del medesimo tempo, x e $(b+\beta' t-y)$ saranno le distanze del punto materiale dal detto centro nella direzione degli assi; e le due espressioni $-\mu^2 x$, $\mu^2(b+\beta' t-y)$ rappresenteranno giusta i medesimi assi le componenti dell'attrazione, le quali tendono la prima a diminuire l'ascissa x, e la seconda ad ingrandire

l'ordinata y. Pertanto le due equazioni generali (p'. 297) del moto curvilineo, divengono nel caso presente

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x\,, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = \mu^2(b+\beta' t-y)\,. \end{cases}$$

Presi gli integrali e designate con A e B due costanti arbitrarie, dalla prima equazione (1) verranno ordinatamente queste altre

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\mu^2 x^2 + \mu^2 C^2\,,$$

$$dt = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{-d\,\dfrac{x}{C}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{C}\right)^2}}\,,\quad t = \frac{1}{\mu}\,\text{arc}\,.\cos\frac{x}{C} + C'$$

$$(2)\qquad x = C\cos(\mu t - \mu C') = A\cos(\mu t) + B\,\text{sen}(\mu t)\,;$$

e di pari modo dalla seconda equazione (1) che si può scrivere sotto la forma

$$\frac{d^2(y-b-\beta' t)}{dt^2} = -\mu^2(y-b-\beta' t)\,,$$

risulterà evidentemente l'altra equazione

$$(3)\qquad y = A'\cos(\mu t) + B'\text{sen}(\mu' t) + b + \beta' t\,.$$

Per determinare le costanti, abbiamo i valori particolari

$$x=0\ ,\ y=0\ ,\ \frac{dx}{dt}=\beta\ ,\ \frac{dy}{dt}=0$$

i quali corrispondono al valore $t=0$: onde le formole (2) e (3) insieme coi loro differenziali ci danno nel principio del moto

$$A=0\ ,\ B=\frac{\beta}{\mu}\ ,\ A'=-b\ ,\ B'=-\frac{\beta'}{\mu}\ ;$$

e perciò la posizione del punto materiale alla fine di un tempo qualunque t si determinerà per mezzo delle coordinate

$$x=\frac{\beta}{\mu}\operatorname{sen}(\mu t)\ ,$$

$$y=b+\beta' t-b\cos(\mu t)-\frac{\beta'}{\mu}\operatorname{sen}(\mu t)\ .$$

Quando il moto del punto materiale diviene parallelo all'asse OY, allora l'ascissa x acquista un valore massimo; e così in questa condizione si hanno i valori

$$\operatorname{seu}(\mu t)=1\ ,\ t=\frac{\pi}{2\mu}\ ,\ \cos(\mu t)=0\ :$$

adunque la posizione del punto attratto verso un centro mobile con forza proporzionale alla distanza, nell'istante in cui il suo movimento riesce parallelo al moto uniforme del medesimo centro, corrisponderà alle coordinate particolari

$$x'=\frac{\beta}{\mu}\ ,\ y'=b+\frac{\beta'}{2\mu}(\pi-2)\ .$$

Ma del movimento generato in un punto materiale da quelle forze che tendono costantemente a un centro mobile o fisso, ne dobbiamo trattare distintamente e più di proposito nel capo che viene appresso.

CAPO VI.

MOVIMENTO CURVILINEO DI UN PUNTO LIBERO PER L'AZIONE DI UNA FORZA CENTRALE.

309. Innanzi ad ogni altra cosa dobbiamo stabilire che *se la forza è centrale*, vale a dire se la sua direzione passa costantemente per un punto o centro fisso, *la curva descritta dal mobile sarà tutta in un piano*.

Infatti posta l' origine delle coordinate nel centro delle forze, saranno (29)

$$\frac{x}{\rho}\,,\ \frac{y}{\rho}\,,\ \frac{z}{\rho}$$

i coseni degli angoli, che fa il raggio vettore ρ coi tre assi ortogonali; e saranno pure (301)

$$\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\,,\ \frac{1}{\varphi}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\,,\ \frac{1}{\varphi}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}$$

i coseni degli angoli che coi medesimi assi forma la direzione della forza accelerarrice φ: ma per ipotesi la direzione della forza acceleratrice e il raggio vettore formano coi singoli assi uno stesso angolo, ovvero due angoli supplementari l'uno dell'altro; si avranno dunque le tre uguaglianze

$$\frac{x}{\rho}=\pm\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\,,\quad \frac{y}{\rho}=\pm\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\,,$$

$$\frac{z}{\rho}=\pm\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\,.$$

Da queste uguaglianze, eliminando il rapporto $\frac{\varphi}{\rho}$, si ricavano prima le equazioni

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{y} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} ,$$

e dipoi anche le tre formole

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = 0 , \quad \frac{y\,d^2z - z\,d^2y}{dt^2} = 0 ,$$

$$\frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{dt^2} = 0 ;$$

le quali moltiplicate per la quantità infinitesima dt, ed integrate per parti (XC) rispetto al tempo t, divengono

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = C'' , \quad \frac{y\,dz - z\,dy}{dt} = C ,$$

$$\frac{z\,dx - x\,dz}{dt} = C' .$$

In fine se queste ultime equazioni, nelle quali le quantità C, C′, C″ sono costanti ed arbitrarie, si moltiplicano rispettivamente per quella coordinata onde ciascuna è priva, e si raccolgono poi insieme colla somma, ne verrà l'equazione di primo grado

$$Cx + C'y + C''z = 0$$

tra le tre coordinate del punto mobile in qualunque posizione della sua traiettoria: ora una tale equazione rappresenta (XXXVII) una superficie piana, la quale passa per l'origine delle coordinate; dunque quando un punto materiale è sollecitato a ciascun istante da una forza diretta costantemente a un centro fisso, si muoverà sempre in

un piano condotto pel medesimo centro; cioè la curva descritta dal mobile si troverà tutta in quel piano, che passa pel centro delle forze e per la direzione della velocità iniziale.

La quale verità s'intende *a priori* anche da questo che le forze agiscono tutte nel piano prenominato, e non vi ha cagione la quale tenda a rimuovere il punto materiale dal medesimo piano.

310. **Equazioni generali del moto di un punto intorno a un centro fisso di azione.** Poichè la curva descritta da un punto materiale M che è sottoposto all'azione di una forza centrale, giace tutta nel piano determinato dal centro di azione e dalla direzione dell'impulso iniziale; perciò preso per origine delle coordinate rettangolari x ed y lo stesso centro O (fig. 153), e condotti nel piano della curva MN percorsa dal mobile i due assi OX ed OY, basteranno (297) le due equazioni generali

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

per determinare nel caso attuale il movimento del punto M. Dinotiamo adesso con ρ il raggio vettore OM, e con ω l'angolo MOX che fa questo raggio coll'asse positivo OX: le componenti della forza acceleratrice φ parallele agli assi, saranno (26. 2.°, 298. 1.°)

$$X = \varphi \cos\omega = \varphi \frac{x}{\rho}, \quad Y = \varphi \operatorname{sen}\omega = \varphi \frac{y}{\rho},$$

quando la forza φ agisce nel verso OM e tende ad allontanare il punto materiale dal centro O; saranno poi le medesime componenti

$$X = -\varphi \cos\omega = -\varphi \frac{x}{\rho}, \quad Y = -\varphi \operatorname{sen}\omega = -\varphi \frac{y}{\rho},$$

quando la forza φ agisce nel verso MO e tende ad avvicinare il

punto materiale allo stesso centro O. Pertanto nella ipotesi in cui ci troviamo, le equazioni generali del moto si trasformano nelle altre due

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \pm \varphi \frac{x}{\rho}\ , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \pm \varphi \frac{y}{\rho}\ ;$$

e in queste equazioni dovranno adoperarsi i segni superiori ovvero gl'inferiori, secondo che la forza centrale è ripulsiva ovvero è attrattiva.

Del rimanente se la forza acceleratrice φ si risguardi come positiva nel caso della attrazione, e coma negativa nel caso della ripulsione, potremo in ambidue i casi usare soltanto i segni inferiori : di tal guisa le equazioni generali del moto centrale saranno queste due.

$$(q) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi \frac{x}{\rho}\ , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi \frac{y}{\rho}\ .$$

311. **Proprietà delle aree nel moto centrale.** Nel moto curvilineo che si effettua sotto l'azione di una forza centrale, ha sempre luogo una proprietà o un *principio* detto *delle aree*, il quale è riposto nel seguente teorema: *se la forza dalla quale è sollecitato un punto materiale, si dirige costantemente verso un dato centro, le aree descritte dal raggio vettore del mobile intorno al centro di azione, saranno proporzionali ai tempi corrispondenti ; viceversa se le aree che descrive in un piano il raggio vettore di un mobile intorno a un polo o punto fisso, sono proporzionali ai tempi, la forza da cui è animato il punto mobile sarà sempre diretta al punto fisso come a proprio centro.*

Conserviamo tutte le denominazioni del numero precedente, prendendo per origine delle coordinate rettangolari il centro o il punto fisso O (fig. 153.a); e di più chiamiamo α il settore curvilineo MNO , ossia l'area descritta dal raggio vettore del mobile nel tempo t. Le due equazioni (q) del moto centrale si moltiplichino, la

prima per y, la seconda per x, e si sottraggano quindi l'una dall' altra: ne verrà la formola

$$(1) \qquad \frac{xd^2y - y\,d^2x}{dt^2} = 0\ ;$$

la quale moltiplicata prima per dt, e dipoi integrata rispetto alla variabile indipendente t, ci darà

$$(2) \qquad x\,dy - y\,dx = C\,dt\ .$$

Ora col primo membro di questa ultima equazione si esprime (XCV) il doppio del differenziale del settore curvilineo α; si avrà dunque $2d\alpha = C\,dt$, e fatta una nuova integrazione, risulterà la formola finita

$$\alpha = \frac{1}{2} C t$$

senza una nuova costante: così rimane dimostrata la prima parte della proposizione; vale a dire nella supposizione di una forza diretta costantemente a un centro O, le aree descritte dal raggio vettore OM sono proporzionali ai tempi.

Quanto alla seconda parte inversa, se le aree descritte nel piano XOY dal raggio vettore OM intorno al punto O sono proporzionali ai tempi corrispondenti, sussisterà la formola finita $\alpha = {}^1/_2 Ct$, ovvero la formola differenziale $d\alpha = {}^1/_2\, C\,dt$: quindi colla sostituzione del valore $d\alpha$ espresso in coordinate rettilinee, si avrà da prima l'equazione (2), che differenziata ci darà da poi l'equazione (1). Ora in questa ultima equazione, le due espressioni $\frac{d^2x}{dt^2}$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$ appartengono alle componenti X ed Y, nelle quali si risolve la forza acceleratrice φ secondo gli assi coordinati; sarà dunque

$$Yx - Xy = 0\ , \text{ ovvero } \frac{Y}{X} = \frac{y}{x}\ :$$

ciò vuol dire che, quanto al valore numerico, sono uguali tra loro le tangenti degli angoli che nel punto (x, y) fanno coll'asse delle ascisse OX la forza acceleratrice e il raggio vettore ; perciò gli angoli stessi o riusciranno uguali tra loro, o saranno l'uno supplemento dell'altro, e così in ogni caso la direzione della forza coinciderà col raggio vettore e passerà costantemente per l'origine O.

312. La medesima proposizione si può anche dimostrare geometricamente nel modo seguente. Giusta il concetto espresso nel numero (295), noi possiamo risguardare la curva ABC ... (fig. 154.ª) descritta dal mobile, come un poligono di un numero infinito di lati infinitamente piccoli, e possiamo inoltre supporre che ciascuno di questi lati venga percorso in uno stesso tempo infinitesimo θ con moto uniforme, in virtù della velocità preconcepita e della forza che agisce continuamente per impulsi al principio dei tempi θ: giunto il mobile per es. nel punto B, dopo di avere percorso il lato AB, nel tempo susseguente θ in virtù della velocità già concepita descriverebbe con moto uniforme la retta BH uguale e posta per dritto con AB, e in virtù di un nuovo impulso della forza continua descriverebbe pure con moto uniforme lo spazio BK; dunque in virtù di quella velocità combinata con questa forza il mobile descriverà di fatto nel medesimo tempo e con moto uniforme il lato BC, ossia la diagonale del parallelogrammo BHCK costruito sopra le due rette BH e BK.

Ciò posto, supponiamo in primo luogo che la forza continua tenda sempre a un punto O, come a proprio centro : tirati i raggi vettori dal centro alle posizioni A, B, C, e condotta ancora la retta OH, sono equivalenti tra loro i due triangoli AOB e BOH, i quali hanno un vertice comune O, e le basi AB, BH uguali e situate sopra una medesima retta ABH ; sono anche equivalenti i due triangoli BOH e BOC, per avere una medesima base BO, ed i vertici H, C in una retta parallela a questa base : saranno dunque uguali tra loro le due aree AOB e BOC, descritte dal raggio vettore del punto mobile in due tempi θ, o istanti uguali. Quindi se un tempo finito t si compone di un numero n di tempi infinitesimi uguali ciascuno a θ, e un

altro tempo finito t' si compone di un numero n' di tempi θ, anche le aree α ed α', descritte dal raggio vettore rispettivamente nei tempi t e t', si comporranno dei rispettivi numeri n ed n' di aree equivalenti ciascuna all' area triangolare AOB: si avrà dunque la relazione

$$\alpha : \alpha' = n : n' = t : t' ;$$

e così quando la forza tende costantemente a un centro, le aree descritte dal raggio vettore del mobile sono proporzionali ai tempi nei quali si descrivono.

Supponiamo in secondo luogo che le aree descritte in un piano dal raggio vettore di un mobile intorno al punto O, sieno proporzionali ai tempi corrispondenti: in questa ipotesi saranno equivalenti le aree AOB e BOC, descritte dal raggio vettore in due istanti qualunque uguali e successivi. Si prolunghi fino in H la retta AB, percorsa dal mobile nel primo dei due istanti, sicchè la retta BH riesca uguale alla stessa AB ; saranno equivalenti tra loro eziandio le aree triangolari AOB e BOH : sussisterà dunque l'equivalenza tra i triangoli BOH e BOC ; e poichè questi due triangoli hanno comune la base BO e devono trovarsi tra due rette parallele, perciò la retta HC che congiunge i loro vertici H e C, sarà parallela alla detta base BO. Ora condotta da C sopra BO la retta CK parallela a BH, e compiuto così il parallelogrammo BHCK, è chiaro che il movimento per la diagonale BC risulterà dai due movimenti simultanei per i lati BH e BK : ma il movimento per BC è quello che prende di fatto il punto materiale, e che deve risultare dai movimenti dovuti alla velocità preconcepita e all'impulso della forza continua nel secondo dei due istanti che consideriamo ; dunque dovendo manifestamente attribuirsi il moto per la retta BH alla velocità già concepita dal mobile secondo ABH, si conchiude che l'altro moto componente per BK viene prodotto dall'azione della forza continua, e che la direzione di questa forza sarà conseguentemente la retta BKO, la quale passa per il punto O. Di tal modo rimane dimostrata la proposizione inversa alla precedente ; vale a dire se le aree descritte in un piano

dal raggio vettore di un mobile intorno a un punto fisso sono proporzionali ai tempi corrispondenti, la forza che sollecita il mobile sarà sempre diretta al punto fisso come a proprio centro.

313. Ripigliando (311) la formola finita $\alpha = {}^1/_2\, Ct$, ovvero la formola differenziale $d\alpha = {}^1/_2\, Cdt$, colla quale si esprime analiticamente il principio delle aree, osserviamo che in questa formola la quantità costante C rappresenta, come è manifesto, il doppio del rapporto tra l'area descritta dal raggio vettore e il tempo in cui l'area si descrive, ovvero rappresenta il doppio dell'area descritta nell'unità di tempo.

Oltre a ciò, se nella espressione analitica del principio si vogliono introdurre le coordinate polari $\rho =$ MO ed $\omega =$ MOX del punto mobile M (fig. 153.a), basterà (XCV) fare $d\alpha = {}^1/_2\, \rho^2 d\omega$ nella equazione $d\alpha = {}^1/_2\, C\, dt$: di tal guisa il principio delle aree che abbiamo dimostrato di sopra, si esprimerà colla formola

$$(q') \qquad \rho^2 d\omega = C\, dt\,,$$

dove la costante C ha sempre quel significato che abbiamo detto poc'anzi.

314. **Espressione della velocità nel moto centrale.** Sia v la velocità del mobile, e p il perpendicolo condotto dalla origine o dal centro delle forze sulla tangente della curva nel punto (x, y), ovvero (ρ, ω). L'area triangolare $d\alpha$ che si descrive dal raggio vettore nel tempo infinitesimo dt, ha per base l'elemento ds della curva, e per altezza ha lo stesso perpendicolo p : sarà dunque

$$d\alpha = \frac{1}{2} p\, ds\,, \text{ ovvero } ds = \frac{2\, d\alpha}{p}\;;$$

ma in qualunque movimento è $v = \dfrac{ds}{dt}$; dunque nel moto centrale avremo (313)

$$(q'') \qquad v = \frac{2\,dz}{p\,dt} = \frac{C}{p} \ .$$

Con questa formola si stabilisce la seguente proposizione : *se le forze tendono costantemente a un centro fisso, la velocità del mobile in qualunque punto della curva sarà inversamente proporzionale al perpendicolo che dal centro delle forze si abbassa sulla direzione della tangente.*

315. Ma per determinare nel moto centrale la medesima velocità, più di sovente si adopera un'altra formola differenziale che dobbiamo ora trovare.

In qualsiasi movimento, se la traiettoria è piana, ha luogo generalmente (296) la equazione

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$$

tra la velocità del mobile e i differenziali delle sue coordinate rettangolari e del tempo: ora nel moto centrale le due relazioni (II)

$$x = \rho\cos\omega \ , \ \ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\omega$$

tra le coordinate rettilinee e polari del mobile M (fig. 153a) ci dànno

$$dx = \cos\omega\,d\rho - \rho\,\mathrm{sen}\,\omega\,d\omega \ , \ \ dy = \mathrm{sen}\,\omega\,d\rho + \rho\cos\omega\,d\omega \ ,$$

e conseguentemente

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 \ ;$$

di più la formola (q' , 313) ci somministra il valore

$$dt^2 = \frac{\rho^4 d\omega^2}{C^2} \ .$$

Dunque nel moto centrale si avrà

$$v^2 = \frac{C^2(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2)}{\rho^4 d\omega^2} = C^2 \left\{ \frac{1}{\rho^2} + \frac{\left(\frac{d\rho}{\rho^2}\right)^2}{d\omega^2} \right\},$$

ossia

$$(q''') \qquad v^2 = C^2 \left\{ \frac{1}{\rho^2} + \frac{\left(d\,\frac{1}{\rho}\right)^2}{d\omega^2} \right\}.$$

316. **Espressione della forza acceleratrice nel moto centrale.** Ripigliamo le due equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi\,\frac{x}{\rho}\;, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi\,\frac{y}{\rho}$$

relative (310) al moto centrale; e dopo di averle moltiplicate, l'una per dx e l'altra per dy, uniamole insieme mediante la somma: nascerà la formola

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} = -\frac{\varphi}{\rho}\,(x\,dx + y\,dy)\;;$$

la quale a cagione del valore

$$x\,dx + y\,dy = \rho\,d\rho$$

che risulta dalla relazione $x^2 + y^2 = \rho^2$, si cangia poi nella equazione

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y}{dt^2} = -\varphi\,d\rho\,.$$

Ora il primo membro di questa equazione non è che il differenziale della quantità

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right),$$

la quale ci rappresenta la metà del quadrato della velocità; presi dunque gli integrali, e atteso il valore della velocità v trovato poc'anzi, si otterrà la formola

$$(q^{\text{IV}})\qquad \int \varphi\, d\rho = -\frac{1}{2}v^2 = -\frac{C^2}{2}\left\{\frac{1}{\rho^2}+\frac{\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2}{d\omega^2}\right\}.$$

dove la costante arbitraria della integrazione è compresa nell'integrale indefinito $\int \varphi\, d\rho$. Differenziando da ultimo l'equazione (q^{IV}), rispetto alla quantità ρ considerata come funzione della variabile ω, otterremo anche la formola

$$\varphi\, d\rho = -\frac{C^2}{2}\left\{\frac{-2\rho\, d\rho}{\rho^4}+\frac{2\left(d\frac{1}{\rho}\right)\left(d^2\frac{1}{\rho}\right)}{d\omega^2}\right\},$$

ovvero

$$(q^{\text{V}})\qquad \varphi = \frac{C^2}{\rho^2}\left\{\frac{1}{\rho}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega^2}\right\}.$$

La formola (q^{IV}) ci offre un'altra espressione integrale della velocità nel movimento di un punto intorno a un centro fisso: inoltre per mezzo della stessa formola (q^{V}), data la forza φ in funzione della distanza ρ, si potrà conoscere la relazione tra le coordinate polari ρ ed ω, e determinare così la traiettoria del mobile; viceversa quando si conosce la natura della curva descritta dal mobile, mediante la formola (q^{V}) si potrà trovare la forza centrale φ in una posizione qualunque dello stesso punto mobile.

317. **Applicazione al caso di una forza che agisce in ragione inversa del quadrato della distanza da un cen-**

tro fisso. Per vedere come si applica a qualche caso p. es. la formola (q^{IV}), consideriamo la legge che ha luogo generalmente nella natura; cioè *ammettiamo che la forza agisca in ragione inversa del quadrato delle distanze, e cerchiamo tutte le curve che può descrivere un punto materiale, attratto verso un centro fisso nella ragione sopraddetta.*

Si chiami μ l'accelerazione all'unità di distanza; sarà $\frac{\mu}{\rho^2}$ la forza acceleratrice a qualunque distanza ρ dal centro di azione, e la formola generale (q^{IV}) nel caso presente diverrà

$$C^2\left\{\frac{1}{\rho^2}+\frac{\left(d\,\frac{1}{\rho}\right)^2}{d\omega^2}\right\}=v^2=-2\int\frac{\mu}{\rho^2}\,d\rho=\frac{2\mu}{\rho}+C'.$$

In questa formola particolare colla lettera C' è significata una costante arbitraria, e dalla medesima si deduce quindi l'equazione

$$d\omega^2=\frac{\left(d\,\frac{1}{\rho}\right)^2}{\frac{2\mu}{C^2\rho}-\frac{1}{\rho^2}+\frac{C'}{C^2}}\;;$$

la quale, posto $\frac{1}{\rho}=r$, $\frac{\mu}{C^2}=h$, $\frac{C'}{C^2}=k$, si può anche scrivere

$$d\omega=\frac{\pm dr}{\sqrt{2hr-r^2+k}}=\frac{\pm dr}{\sqrt{h^2+k-(r-h)^2}}\;.$$

Quando le due coordinate ω e ρ variano inversamente, allora crescono o diminuiscono insieme le due quantità ω ed r; perciò in questo caso gl'incrementi $d\omega$ e dr avranno lo stesso segno, e nell' ultima formola converrà adoperare il segno positivo: quando poi ω e ρ variano nel medesimo verso, allora i due incrementi $d\omega$

e dr saranno tra loro opposti, e nella detta formola bisognerà quindi far uso del segno negativo. Supponendo questo secondo caso, supponendo p. es. che le coordinate ρ ed ω crescano insieme a partire dalla posizione iniziale del mobile, potremo mettere l'ultima equazione sotto la forma

$$d\omega=\frac{-d\dfrac{r-h}{\sqrt{h^2+k}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{r-h}{\sqrt{h^2+k}}\right)^2}}$$

e quinci, designando con C″ una nuova costante, per mezzo della integrazione otterremo

$$\omega=\text{arc}\cos\frac{r-h}{\sqrt{h^2+k}}+C'',$$

ossia

$$r=h+\sqrt{h^2+k}\cos(\omega-C'').$$

Restituiti i valori alle tre quantità r, h e k, verrà in fine l'equazione

$$\rho=\frac{1}{\dfrac{\mu}{C^2}+\sqrt{\dfrac{\mu^2}{C^4}+\dfrac{C'}{C^2}}\cos(\omega-C'')}$$

$$=\frac{\dfrac{C^2}{\mu}}{1+\sqrt{1+\dfrac{C^2C'}{\mu^2}}\cos(\omega-C'')};$$

la quale (XXX) ci rappresenta una sezione conica che ha per

foco il centro stesso delle forze, per semi-parametro la quantità $\frac{C^2}{\mu}$, e per eccentricità la espressione $\sqrt{1+\frac{C^2 C'}{\mu^2}}$: nella medesima equazione la differenza (ω — C″) deve essere l' angolo che fa il raggio vettore coll'asse della curva, dalla parte del vertice più vicino al centro delle forze ; per conseguenza la costante C″ sarà l'angolo, che col medesimo asse della curva forma l'asse polare, ossia una retta arbitraria condotta per il polo o pel centro di azione.

Le quali cose essendo così, come abbiamo detto, si conchiude che un punto materiale, attratto verso un centro da una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, potrà descrivere una parabola, una ellisse, ovvero una iperbola, col foco o con uno dei due fochi situato nel centro stesso di attrazione. Descriverà poi il mobile di fatto la parabola, o la ellisse, ovvero la iperbola, secondo che l' eccentricità e determinata per mezzo della formola

$$e=\sqrt{1+\frac{C^2C'}{\mu^2}} ,$$

risulterà $= 1$, < 1, ovvero >1 ; cioè secondo che la costante C' sarà $= 0$, <0, ovvero > 0 : ora se u ed r' sono nel principio del moto la velocità e la distanza del punto materiale dal centro delle forze, l'equazione trovata da principio, cioè $v^2 = \frac{2\mu}{\rho} + C'$, ne porge il valore

$$C'=u^2-\frac{2\mu}{r'} ;$$

dunque il mobile descriverà la parabola, o la ellisse, ovvero l'iperbola, secondo che si avrà

$$u^2 = \frac{2\mu}{r'} \text{ , ovvero } u^2 < \frac{2\mu}{r'} \text{ , oppure } u^2 > \frac{2\mu}{r'} \text{ .}$$

Del resto vede ognuno che la natura della traiettoria non dipende affatto dalla direzione della velocità iniziale u, colla quale il mobile viene lanciato nello spazio; ma dipende solo dalla grandezza della medesima velocità, o dalla distanza iniziale r'. Nel caso della ellisse o della iperbola, si vede pure che il semi-asse trasverso a dovrà determinarsi (XVI. XXIV) colla equazione

$$\frac{C^2}{\mu} = p = \pm a(1 - e^2) \text{ .}$$

Da ultimo è anche manifesto che la velocità $v = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho} + C'}$ diviene maggiore o minore, diminuendosi inversamente o crescendo la distanza del mobile dal centro delle forze; epperò la medesima velocità sarà massima nella minima distanza dal centro, e viceversa sarà minima nella distanza massima.

318. **Movimento di un punto materiale intorno a un centro mobile di azione.** In generale il moto di un punto materiale rispetto a una origine mobile, e a due o a tre assi che rimangano costantemente paralleli a sè stessi, si può determinare nella medesima maniera che il moto assoluto, purchè alle diverse quantità assolute si sostituiscano le corrispondenti quantità relative. In vero sieno φ' e φ'' le forze acceleratrici, che sollecitano rispettivamente il punto materiale M, e l'origine O delle coordinate: il moto del punto M relativamente all' origine mobile O e agli assi sempre paralleli, avviene nella stessa guisa come se, fermati gli assi, il punto O restasse in riposo e il punto M fosse sollecitato dalla risultante φ delle due forze φ', $-\varphi''$; dunque quel moto relativo sarà lo stesso che il moto assoluto, prodotto in pari circostanze nel punto materiale dalla

forza φ composta di due, che sono l'una la forza acceleratrice realmente applicata al punto materiale, e l'altra una forza uguale, contraria e parallela a quella che agisce sopra l'origine O. Laonde se tutte le quantità e gli elementi del moto si riferiscano sempre alla origine e agli assi mobili, le formole spettanti al moto assoluto di un punto libero, apparterranno ancora a un suo moto relativo, e ne determineranno le varie circostanze; e tutte le proprietà di quel primo movimento, avranno anche luogo e potranno applicarsi al moto relativo del punto materiale.

Così in particolare se la forza relativa di un punto materiale M tende costantemente a un centro mobile O, il medesimo punto M col suo moto relativo percorrerà una curva situata tutta in un piano, e il raggio vettore OM descriverà delle aree proporzionali ai tempi e viceversa, appunto come succede nel moto centrale assoluto. Di più anche nel caso attuale in cui supponiamo che il centro sia mobile, varranno tutte quelle formole che abbiamo di sopra stabilito pel movimento di un punto materiale intorno a un centro fisso di azione: solo è da avvertire che nelle medesime formole le due quantità x ed y saranno le coordinate rettilinee del punto M rispetto a due assi ortogonali, che passano pel centro mobile O, e si conservano sempre paralleli a sè stessi; che le altre due quantità ρ ed ω ci dinoteranno la lunghezza della retta che in ciascun istante congiunge il punto M con O, e la grandezza dell' angolo che fa la medesima retta coll'asse delle ascisse; in fine che le quantità φ e v ci esprimeranno l'accelerazione del punto materiale, e la sua velocità relativa al centro mobile di azione.

Poniamo per es. che due punti materiali di massa m ed m', si attraggano scambievolmente in ragion diretta delle masse e in ragione inversa del quadrato delle distanze: essendo k la mutua attrazione che esercitano l' una sull' altra due masse prese per unità a una distanza $=1$, saranno

$$\frac{km'}{\rho^2}\,,\quad -\frac{km}{\rho^2}\,.$$

le forze acceleratrici opposte, colle quali a una distanza ρ il punto m tende verso m', e viceversa m' tende verso il punto m; e perciò il moto del punto m relativamente al punto m' considerato come immobile, verrà prodotto dalla forza acceleratrice

$$\frac{k(m+m')}{\rho^2}.$$

Ora cotesta forza relativa si dirige costantemente, come è chiaro, verso il centro m', e di più agisce nella ragione inversa del quadrato delle distanze dal medesimo centro, siccome apparisce dalla sua espressione: dunque il punto materiale m descriverà col suo moto relativo, appunto come abbiamo veduto intervenire (317) nel moto assoluto, una parabola o una ellisse ovvero una iperbola; e la curva relativa che si descrive dal punto m, avrà il suo foco ovvero uno de' suoi fochi nell'altro punto m'.

Per esercizio dei giovani scolari nell'uso delle formole che spettano al movimento centrale, aggiungiamo qui in fine alcuni altri esempi o problemi.

319. **Problema** I. *Trovare l'espressione dell'accelerazione nel movimento di un punto materiale che descrive la curva* $\rho = e^{\frac{\omega}{a}}$, *ed è sollecitato da una forza diretta costantemente al polo della medesima curva.*

La curva che viene rappresentata dalla equazione proposta

$$\rho = e^{\frac{\omega}{a}},$$

dicesi *spirale logaritmica*; ed è tale che con un numero infinito di giri si rivolge intorno al suo polo, da una parte discostandosi e dall'altra avvicinandosi sempre più allo stesso polo, senza però che mai lo raggiunga: infatti al valore $\omega = 0°$ corrisponde $\rho = 1$; crescendo poi in infinito il valore numerico dell'angolo ω al di sopra o

al di sotto dello zero, cresce pure o si diminuisce indefinitamente il raggio vettore ρ.

Ora l' equazione della curva, scritta in questo altro modo

$$\frac{1}{\rho}=e^{-\frac{\omega}{a}},$$

e differenziata successivamente per due volte, ci dà (LII) i valori

$$d\frac{1}{\rho}=-\frac{1}{a}e^{-\frac{\omega}{a}}d\omega\,,\quad d^2\frac{1}{\rho}=\frac{1}{a^2}e^{-\frac{\omega}{a}}d\omega^2:$$

quindi messa in opera la formola (q^{v}. 316), risulterà l' espressione

$$\varphi=\frac{C^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{e^{-\frac{\omega}{a}}}{a^2}\right)=\frac{C^2(1+a^2)}{a^2\rho^3}\,,$$

e così la forza acceleratrice è inversamente proporzionale al cubo delle distanze del punto materiale dal centro delle forze.

La costante C si potrà determinare facilmente, quando si conosca la velocità v_0 ond'è animato il mobile a una data distanza ρ_0 dal centro di azione: dacchè avendosi per le cose ora dette

$$\frac{\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2}{d\omega^2}=\frac{1}{a^2}e^{-\frac{2\omega}{a}}=\frac{1}{a^2\rho^2}\,;$$

attesa la formola (q''') del numero (315), otterremo nella distanza ρ il valore

$$v^2=C^2\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{a^2\rho^2}\right)=C^2\,\frac{1+a^2}{a^2\rho^2}\,,$$

e nella distanza particolare ρ_0 l'espressione

$$v_0^2 = C^2 \frac{1+a^2}{a^2 \rho_0^2} \ .$$

Quindi il valore della costante C si determinerà colla formola

$$C^2 = \frac{a^2 v_0^2 \rho_0^2}{1+a^2} \ ,$$

e per conseguenza in qualunque punto della curva l'accelerazione e la velocità del mobile saranno

$$\varphi = \frac{v_0^2 \rho_0^2}{\rho^3} \ , \quad v = \frac{v_0 \rho_0}{\rho} \ .$$

320. **Problema** II. *Un punto materiale descrive un' iperbola equilatèra sotto l'azione di una forza diretta castantemente al centro della curva: si cerca la legge, a cui è soggetta la forza acceleratrice.*

Essendo gli assi uguali per condizione, l'equazione della curva tra le coordinate rettilinee, computate dal centro, sarà (XXII) la seguente

$$x^2 - y^2 = a^2 \ ;$$

e adoperate le coordinate polari rispetto al medesimo centro, si ridurrà a quest'altra

$$\rho^2 (\cos^2\omega - \mathrm{sen}^2\omega) = a^2 \ , \quad \text{ossia} \quad \rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\omega} \ .$$

Nasceranno quindi con ordine successivo le formole seguenti:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 = \frac{\cos 2\omega}{a^2} \ , \quad \frac{1}{\rho} \, . \, d\,\frac{1}{\rho} = - \frac{\mathrm{sen}\, 2\omega \, d\omega}{a^2} \ ,$$

$$\frac{\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2}{d\omega^2}=\frac{\rho^2}{a^4}\operatorname{sen}^2 2\omega\,;$$

ma abbiamo evidentemente

$$\operatorname{sen}^2 2\omega=1-\cos^2 2\omega=1-\frac{a^4}{\rho^4}=\frac{\rho^4-a^4}{\rho^4}\;;$$

sarà dunque

$$\frac{\left(d\frac{1}{\rho}\right)^2}{d\omega^2}=\frac{\rho^4-a^4}{a^4\rho^2}\;.$$

Un tal valore si sostituisca adesso nella formola (q^{v}) del numero (316): per determioare nel presente caso la forza acceleratrice, si avrà l'equazione

$$\int\varphi\,d\rho=-\frac{C^2}{2}\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{\rho^4-a^4}{a^4\rho^2}\right)=-\frac{C^2}{2}\cdot\frac{\rho^2}{a^4}\;;$$

che differenziata ci darà immediatamente l'espressione

$$\varphi=-\frac{C^2}{a^4}\rho\,.$$

In fine se si chiami μ l'accelerazione all'unità di distanza, risulterà

$$\mu=-\frac{C^2}{a^4}\;,\quad\varphi=\mu\rho\;;$$

e così conchiudesi che la forza proveniente dal centro della iperbola, siccome negativa, respinge il mobile dal medesimo centro,

e la sua azione segue la legge determinata dalla ragione diretta delle distanze.

321. **Problema** III. *Dinotandosi con* ρ, a *ed* h *la distanza di un punto mobile da un centro fisso, e due quantità costanti; supponiamo che il punto mobile sia attratto verso il centro fisso da una forza espressa in questo modo:*

$$\varphi = \frac{2a^2 h^2}{\rho^5} + \frac{h^2}{\rho^3}\ .$$

Cerciamo di determinare la curva che descriverà lo stesso mobile, quando nella distanza a *venga lanciato con una velocità uguale ad* $\frac{h}{a}\sqrt{2}$, *secondo una direzione inclinata di* 45 *gradi al raggio vettore,*

Sia v la velocità del punto materiale nella posizione $(\rho\ ,\ \omega)$: dalla formola $(q^{IV}.\,316)$ e dalla espressione data della forza φ, si ricava.

$$v^2 = -2\int \varphi d\rho = -4a^2 h^2 \int \frac{d\rho}{\rho^5} - 2h^2 \int \frac{d\rho}{\rho^3}$$

$$= \frac{a^2 h^2}{\rho^4} + \frac{h^2}{\rho^2} + c\ ;$$

ma alla distanza $\rho = a$ corrispondendo per ipotesi il valore $v^2 = \left(\frac{h}{a}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2h^2}{a^2}$, la quantità costante c è nulla; dunque attesa la formola $(q'''.\,315)$, si avrà l' equazione

$$C^2\left\{\frac{1}{\rho^2} + \frac{\left(d\,\frac{1}{\rho}\right)^2}{d\omega^2}\right\} = v^2 = \frac{a^2 h^2}{\rho^4} + \frac{h^2}{\rho^2}\ .$$

Adesso a fine di determinare la costante C, immaginiamo che dal centro delle forze sia condotto un perpendicolo sulla tan-

gente della curva nel punto di proiezione, o alla estremità della distanza a: un tal perpendicolo si esprimerà col prodotto $a \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}$; e perciò a cagione della formola (q''. 214], nel medesimo punto di proiezione sussistendo la relazione

$$\frac{h}{a}\sqrt{2} = \frac{C}{\frac{a}{\sqrt{2}}} ,$$

sarà $C = h$. Mediante la sostituzione di questo valore, l'equazione trovata poc'anzi diverrà

$$h^2 \left\{ \frac{1}{\rho^2} + \frac{\left(d \frac{1}{\rho}\right)^2}{d\omega^2} \right\} = \frac{a^2 h^2}{\rho^4} + \frac{h^2}{\rho^2} ,$$

e ci darà quindi la relazione differenziale

$$a^2 \, d\omega^2 = \rho^4 \left(d \, \frac{1}{\rho}\right)^2 = d\rho^2 :$$

infine se ammettiamo che si annullino nello stesso tempo l'angolo polare ω, e la distanza ρ del punto materiale dal centro delle forze, integrando otterremo tra le due coordinate la relazione finita

$$\rho = a\omega .$$

Ora cotesta equazione rappresenta una curva a spire; ed in ispecie ci rappresenta la *spirale* detta *di Archimede*, nella quale il raggio vettore ρ varia sempre in ragione diretta dell'angolo polare ω: tale è dunque la curva descritta dal mobile nelle condizioni del problema; e s'intende facilmente che la medesima

curva, avendo il suo cominciamento nel polo e quinci da esso sempre più allontanandosi, si rivolge senza fine intorno al medesimo polo o centro di attrazione.

Nei due capi che seguono, faremo un' applicazione tutta speciale delle formole del moto curvilineo in genere e del moto centrale ai gravi lanciati in una direzione obliqua all'orizzonte, e al movimento dei pianeti intorno al sole.

CAPO VII.

MOTO DEI GRAVI LANCIATI OBLIQUAMENTE ALL'ORIZZONTE.

322. **Traiettoria dei gravi lanciati in direzione obliqua nel vuoto.** Un grave M lanciato obliquamente colla velocità β secondo la direzione AY' (fig. 155a), se facciamo astrazione dalla resistenza dell'aria, si troverà animato allo stesso tempo da due movimenti; l'uno equabile per la retta obliqua AY' a cagione dell'impulso ricevuto, l'altro uniformemente accelerato per la retta verticale AX' o per una retta parallela a cagione della forza di gravità: dunque (295) con un moto composto di quo' due movimenti simultanei descriverà il grave, il quale può essere un punto materiale pesante o il centro di gravità di un corpo solido, una linea curva ACB che ha per tangente in A la stessa retta di proiezione AY'. Ora cotesta curva è tutta posta nel piano verticale che passa per la direzione della velocità iniziale, giacchè in tal piano agiscono tutte le forze; e la sua natura è quella di una parabola, che ha per asse la retta verticale CC'.

A fine di dimostrare questa ultima cosa col calcolo elementare, si riferisca la curva ai due assi obliqui AX' ed AY', dei quali l'uno è la retta verticale condotta pel punto di proiezione nel verso della gravità, l'altro poi è la retta stessa di proiezione. Chiamate x' ed y' le coordinate del punto M, e compiuto il parallelogrammo ADME, il mobile per la sola forza di proiezione percor-

rerebbe lo spazio rettilineo AD, e per la sola forza di gravità percorrerebbe lo spazio AE in quel medesimo tempo t, nel quale in virtù di ambedue le forze descrive realmente con moto composto (38) lo spazio curvilineo AM: sussistono quindi (271. 9) le due formole

$$x' = AE = \frac{1}{2} g t^2 , \quad y' = AD = \beta t .$$

Il valore $t^2 = \frac{2x'}{g}$, ricavato dalla prima formola, si sostituisca nel quadrato della seconda; e detta h l'altezza dovuta alla velocità di proiezione, si ponga (271) dipoi $\beta^2 = 2gh$: resterà eliminata la variabile t, e tra le due coordinate x' ed y' si otterra l'equazione

$$y'^2 = \frac{2\beta^2}{g} x' = 4hx' .$$

Or bene questa equazione è quella di una parabola (XII), la quale nel punto A ha per diametro la retta AX′, e per tangente la retta AY′: la quantità costante $4h$ rappresenta, rispetto al diametro, il parametro della parabola descritta dal grave; e l'asse della medesima curva, siccome parallelo ad AX′, è verticale.

L'equazione tra le coordinate oblique x' ed y' si può facilmente trasfoımare in un'altra equazione tra le coordinate rettangolari x ed y, cioè tra le coordinate del punto M, riferito ai due assi AX ed AY, che si conducono per il punto di proiezione nel piano della curva, l'uno orizzontale e l'altro verticale nel verso opposto alla gravità. Infatti espresso con α l'angolo di proiezione Y′AX, e prolungata la retta verticale DM fino all'incontro dell'asse AX nel punto K, il triangolo rettangolo ADK ci darà

$$x = AD \cos DAK = y' \cos \alpha , \quad y = DK - DM = y' \operatorname{sen} \alpha - x' :$$

onde risultano i valori

$$y' = \frac{x}{\cos\alpha}\ ,\ x' = y' \operatorname{sen}\alpha - y = x \operatorname{tang}\alpha - y\ ;$$

e per mezzo di essi l'equazione tra x' ed y' che abbiamo trovato poc'anzi, si trasforma in quest'altra equazione

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} = \frac{2\beta^2}{g}(x \operatorname{tang}\alpha - y) = 4h(x \operatorname{tang}\alpha - y)\ ,$$

ossia

$$(r) \qquad y = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{gx^2}{2\beta^2\cos^2\alpha} = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{x^2}{4h\cos^2\alpha}\ ,$$

la quale rappresenta ancora una parabola, e racchiude in sè tutto ciò che spetta al moto dei gravi lanciati obliquamente all'orizzonte nel vuoto.

323. Si può dimostrare la stessa cosa, e trovare l'equazione (r) col calcolo superiore nel modo seguente.

Si conducano, come abbiamo detto di sopra, per il punto A di proiezione e nel piano della curva percorsa dal grave due assi, l'uno orizzontale AX e l'altro verticale AY nel verso opposto alla gravità: saranno $X = 0$ ed $Y = -g$ le componenti della forza acceleratrice parallele ai medesimi assi; e perciò chiamando x, y le coordinate del punto mobile M alla fine del tempo t, avremo (297) per le due equazione del moto nel caso attuale le formole

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0\ ,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

Fatta la moltiplicazione per la quantità infinitesima dt, e presi gli integrali, verranno

$$\frac{dx}{dt} = c\ ,\quad \frac{dy}{dt} = -gt + c'\ ,$$

che sono (296) le componenti della velocità in direzioni parallele agli assi coordinati: ma chiamata β come nel numero precedente la velocità di proiezione, ed espresso pure con α l'angolo di proiezione Y'AX, le due componenti della velocità nel principio del moto sono $\beta \cos \alpha$, β sen α; e così posto $t = 0$, risultano per le due costanti i valori $c = \beta \cos \alpha$, $c' = \beta$ sen α: dunque in qualunque punto della curva descritta dal grave si avranno le equazioni

$$\frac{dx}{dt} = \beta \cos \alpha , \quad \frac{dy}{dt} = \beta \operatorname{sen} \alpha - gt .$$

Al valore $t = 0$ corrispondono $x=0$, ed $y=0$; onde fatta un'altra integrazione, nasceranno le equazioni finite

$$x = \beta t \cos \alpha , \quad y = \beta t \operatorname{sen} \alpha - \frac{gt^2}{2} ,$$

senza che si abbia ad apporvi alcuna altra costante: in fine eliminando fra le due equazioni la variabile t, e chiamando h l'altezza dovuta alla velocità di proiezione, sicchè abbiasi $\beta^2 = 2gh$; otterremo di nuovo la relazione tra le coordinate x ed y, ossia l'equazione della traiettoria

$$(r) \qquad y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx^2}{2\beta^2 \cos^2 \alpha} = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha} ,$$

la quale è una parabola avente per asse una retta verticale, o parallela all'asse delle ordinate AY.

324. **Ampiezza e altezza del tiro.** Ritenuti gli assi rettangolari AX ed AY (fig. 155ª), *la portata* o *l'ampiezza del tiro* dicesi la distanza orizzontale AB $= a$ tra i due punti A e B, in cui la parabola descritta dal grave interseca l'asse delle ascisse AX, ossia la distanza alla quale è portato il mobile sul piano orizzontale che passa per il punto A di partenza; *l'altezza* poi *del tiro* è la massima ordinata CH $= b$, ossia l'ordinata del vertice C, la

quale coincide coll'asse della curva e corrisponde perciò (IX) come ad ascissa alla metà dell'ampiezza AH.

Per trovare l'ampiezza del tiro, nella equazione superiore (r) che rappresenta la parabola descritta dal grave, si faccia $y = 0$; se ne dedurrà

$$x^2 - 4\,hx \,\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 0.$$

In questa nuova equazione di secondo grado rispetto all' ascissa x, una delle due radici, cioè $x = 0$, appartiene al punto A di partenza; l'altra radice poi, cioè $x = 4h \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$, appartiene al punto B di caduta dove il mobile incontra di nuovo l'asse orizzontale AX, e il suo valore sarà quello dell'ampiezza stessa del tiro: pertanto espressa con a questa ampiezza, e attesa la relazione trigonometrica $2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$, si avrà

$$(r') \qquad a = 4h \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 2h \operatorname{sen} 2\alpha.$$

Se ora la metà di questo valore dell'ampiezza, cioè $2h \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$, si sostituisce nella predetta equazione (r) in luogo della ascissa x, ne risulterà l'ordinata del vertice, ossia l'altezza b del tiro; la quale altezza, avuto anche riguardo alla relazione trigonometrica $2 \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$, ci verrà data conseguentemente dalla formola

$$(r'') \qquad b = h \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{h}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

Da cosiffatte espressioni s'inferisce 1.° che per una medesima velocità β, o per un medesimo valore h, si ha la massima ampiezza o portata dal tiro, quando l'angolo α di proiezione è uguale a 45 gradi; ed una tale ampiezza risulta allora uguale alla quantità $2h$: 2.° che rimanendo pur costante la velocità di proiezione, si avranno uguali ampiezze con due tiri fatti sotto gli angoli α e $(90° - \alpha)$, i quali sono equidistanti dall'angolo semi-retto: 3.° che l'altezza del

tiro, per un medesimo valore β ovvero h, diviene massima ed uguale ad h, quando l'angolo α di proiezione è di 90 gradi, vale a dire quando il grave viene lanciato su in alto giusta la verticale AY; e che perciò la massima altezza del tiro, sotto le dette condizioni, sarà sempre la metà della massima ampiezza secondo la retta orizzontale AX.

325. Le due formole (r') ed (r''), relative alla ampiezza e all'altezza del tiro, si possono anche stabilire, applicando alla equazione (r) la teoria dei massimi valori di una data funzione y. Infatti se l'altezza del tiro è la massima ordinata della curva o quella del vertice C, e corrisponde alla metà della ampiezza come ad ascissa; è chiaro che l'ampiezza del tiro sarà il doppio della ascissa x, per la quale l'ordinata y, espressa colla equazione (r) del numero (323), diviene massima, e che il valore di questa massima ordinata sarà quindi il valore dell'altezza del tiro. Ciò posto, l'equazione (r), mediante la differenziazione, ci porge l'espressione della derivata

$$\frac{dy}{dx} = \tang \alpha - \frac{x}{2h \cos^2 \alpha} \ ;$$

e affinchè l'ordinata y acquisti un valore massimo, deve compiersi (LXX) la condizione $\frac{dy}{dx} = 0$: dunque il valore della ascissa x, pel quale l'ordinata diviene un *maximum*, deve ricavarsi dalla equazione

$$\tang \alpha - \frac{x}{2h \cos^2 \alpha} = 0 \, ,$$

e sarà $x = 2h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$. Duplicando questo valore, otterremo di nuovo l'ampiezza del tiro

$$(r') \qquad a = 4h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2h \operatorname{sen} 2\alpha \ ;$$

e sostituendolo nella equazione (r) in luogo della x, otterremo pure l'altezza del tiro

$$(r'') \qquad b = h\,\mathrm{sen}^2 \alpha = \frac{h}{2}(1 - \cos 2\alpha)\ .$$

Dall'una e dall'altra di queste espressioni si deducono le conseguenze già notate nel numero precedente.

326. **Espressione del tempo, nel quale il proiettile arriva a un dato punto.** L'espressione del tempo, nel quale un grave lanciato in direzione obliqua arriva sulla sua traiettoria a un punto corrispondente alla ascissa x, si ritrae immediatamente dalla relazione già trovata nel numero (323) tra lo stesso tempo t e la medesima ascissa x; ma si può anche trovare più semplicemente nel modo seguente.

Abbiamo già detto che il proiettile descrive l'arco parabolico AM (fig. 155ª) e dal punto A perviene al punto M in quel medesimo tempo, nel quale per la sola velocità di proiezione percorrerebbe con moto uniforme la retta obliqua AD : adunque atteso il teorema (9) del moto uniforme la retta obliqua AD: adunque atteso il teorema (9) del moto uniforme, e considerato il triangolo rettangolo ADK, avremo l'espressione richiesta del tempo

$$t = \frac{\mathrm{AD}}{\beta} = \frac{x}{\beta \cos \alpha} = \frac{x}{\sqrt{2gh}\cos \alpha}\ .$$

Quindi ne viene 1.° che il movimento del proiettile fino al suo ritorno sull'orizzonte in B, si compirà (324) nel tempo

$$\mathrm{T} = \frac{4h}{\sqrt{2gh}}\,\mathrm{sen}\,\alpha = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\mathrm{sen}\,\alpha\ ;$$

e che perciò un tal moto durerà tanto più a lungo, quanto maggiore è la velocità di proiezione o l'altezza h dovuta alla mede-

sima, e quanto più si accosta a 90 gradi l'angolo α. — 2.° Ne viene ancora che nell'ascesa e nella discesa due archi qualunque, per es. AM ed M_1B, compresi tra le medesime rette orizzontali AB ed MM_1, saranno descritti dal grave in tempi uguali. Infatti i tempi, nei quali il grave ascende per l'arco AM e discende poi per l'arco $M_1B = AM_1B - AM_1$, si esprimono rispettivamente colle quantità

$$\frac{AK}{\beta\cos\alpha}\,,\quad \frac{AB}{\beta\cos\alpha} - \frac{AK_1}{\beta\cos\alpha} = \frac{BK_1}{\beta\cos\alpha}\ :$$

ma queste due quantità sono tra loro uguali; giacchè dividendo l'asse della parabola le corde orizzontali AB ed MM_1 per metà in H ed F, si ha $AK = AH - MF = BH - M_1F = BK_1$: dunque sono pure uguali tra loro i tempi della ascesa e discesa del proiettile per gli archi predetti.

327. **Velocità del proiettile in un punto qualunque della sua traiettoria.** Si chiami v la velocità alla fine del tempo t, ossia nel punto $(x\,,\,y)$ della parabola descritta dal grave: saranno (323)

$$\frac{dx}{dt} = \beta\cos\alpha\,,\quad \frac{dy}{dt} = \beta\,\mathrm{sen}\,\alpha - gt$$

le componenti della medesima velocità secondo gli assi coordinati AX, AY (fig. 155a), e si avrà

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = \beta^2 - 2\beta g t\,\mathrm{sen}\,\alpha + g^2 t^2\,.$$

Se ora invece della variabile t, si metta il valore $\beta\cos\alpha$ trovato nel numero precedente, ne risulterà

$$v^2 = \beta^2 - 2gx\,\mathrm{tang}\,\alpha + \frac{g^2x^2}{\beta^2\cos^2\alpha}$$

$$=\beta^2-2g\left(x\,\text{tang}\,\alpha-\frac{gx^2}{2\beta^2\cos^2\alpha}\right);$$

ossia a cagione della prima espressione (323. r) della ordinata y,

$$v=\sqrt{\beta^2-2gy}\,.$$

Da questa formola si raccoglie 1.° che la velocità diviene tanto minore o maggiore, quanto più il mobile s'innalza sull'orizzonte AX nell'ascendere per l'arco AC, ovvero quanto si accosta più al medesimo orizzonte nel discendere per l'altro arco CB; e che perciò il moto parabolico del grave è ritardato nella salita, ed è accelerato nella discesa. 2.° Che la velocità del proiettile nel vertice della parabola si riduce alla sola componente orizzontale e costante della velocità iniziale; giacchè (324. r'') nel punto più elevato della parabola si ha $y=h\,\text{sen}^2\alpha$, e per conseguente si ha ancora

$$v=\sqrt{\beta^2-2gh\,\text{sen}^2\alpha}=\sqrt{\beta^2-\beta^2\,\text{sen}^2\alpha}=\beta\cos\alpha\,.$$

3.° Che il mobile M in generale si trova animato da una stessa velocità, quando nella salita e nella discesa per la parabola ACB viene ad attraversare una data retta orizzontale MM_1; ed in particolare arriverà di nuovo sull'orizzonte AX, e lo percuoterà in B con quella medesima velocità colla quale è stato lanciato dal punto A.

328. **Determinazione della velocità di proiezione.** Se supponiamo che sia conosciuto l'angolo α di proiezione, e la posizione di un punto (x_1, y_1) nella parabola descritta da un grave, si potrà determinare facilmente la velocità iniziale β. Imperocchè l'equazione generale della parabola (322. r), rispetto al dato punto diviene

$$y_1=x_1\,\text{tang}\,\alpha-\frac{gx_1^2}{2\beta^2\cos^2\alpha}\;;$$

e risolvendola in ordine alla quantità incognita β, otterremo

$$(x_1 \tang\alpha\cos^2\alpha - y_1\cos^2\alpha)\beta^2 = \frac{gx_1^2}{2},$$

ossia

$$\beta = \left(\frac{gx_1^2}{2x_1\,\sen\alpha\cos\alpha - 2y_1\cos^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se il punto dato fosse situato sull'asse orizzantale AX, più agevolmente si determinerebbe allora la velocità β; perocchè in tal caso (324) avendosi $y_1=0$ ed $x_1=a$, si avrebbe ancora

$$\beta = \sqrt{\frac{ag}{2\,\sen\alpha\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{ag}{\sen 2\alpha}};$$

e questa espressione si rende anche più semplice, divenendo $\beta = \sqrt{ag}$, quando si fa il tiro sotto l'angolo $\alpha = 45.°$

329. **Angolo sotto il quale si deve fare il tiro per colpire un dato scopo.** Sieno x_1, y_1 le coordinate del punto M_1 da colpirsi: dovendo queste due coordinate soddisfare alla equazione (*r.* 322) della parabola, che descriverà il grave lanciato obliquamente all'orizzonte, si avrà nella questione presente la formola

$$y_1 = x_1 \tang\alpha - \frac{x_1^2}{4h\cos^2\alpha},$$

dalla quale si potrà ricavare l'angolo α che si cerca. Infatti a cagione della nota relazione $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha = 1 + \tang^2\alpha$, quella formola si cangia prima in questa altra

$$4hy_1 = 4hx_1\tang\alpha - x_1^2 - x_1^2\tang^2\alpha,$$

che si può anche scrivere

$$\tang^2\alpha - \frac{4h}{x_1}\tang\alpha + \frac{4hy_1 + x_1^2}{x_1^2} = 0 :$$

e risoluta poi in ordine alla quantità $\tang\alpha$, ci somministra i valori

$$\tang\alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - (4hy_1 + x_1^2)}}{x_1}$$

Quindi 1.° se col calcolo si trova $4h^2 < 4hy_1 + x_1^2$, la quantità $\tang\alpha$ sarà immaginaria; e perciò qualunque sia la direzione del tiro, non potrà mai colpirsi lo scopo M_1, qualora non si muti il punto o la forza della proiezione. 2.° Se poi risulta $4h^2 = 4hy_1 + x_1^2$, allora la funzione $\tang\alpha$ avrà un solo valore. e perciò sotto un solo angolo il proiettile potrà andare al dato scopo. 3.° Infine ove si abbia $4h^2 > 4hy_1 + x_1^2$, risulteranno due valori diversi per la medesima funzione $\tang\alpha$; e così il grave potrà lanciarsi sotto due angoli differenti, perchè vada a colpire lo scopo: quando si vuol percuotere un piano verticale o far breccia ne' muri, converrà lanciare il grave sotto l'angolo minore, affinchè descriva la parabola più bassa ed ottusa, e per tal modo giunga ad urtare con maggior forza il piano o il muro verticale; quando poi si vuol percuotere un piano orizzontale o sfondare una vôlta, allora conviene fare uso del maggior angolo di proiezione, perchè il proiettile scorra per la parabola più acuta e più alta, e sia maggiore la velocità dell'urto contro il piano orizzontale o la vôlta. Nell'uno e nell'altro caso la velocità del proiettile presso il punto (x_1, y_1) è la stessa (327), cioè $v = \sqrt{\beta^2 - 2gy_1}$: ma nel primo caso, essendo l'angolo α minore che nel secondo, riuscirà maggiore la componente orizzontale $\beta\cos\alpha$, colla quale succede efficacemente l'urto contro il piano verticale; e nel secondo caso riuscirà maggiore per conseguenza la componente verticale, colla quale dal mobile si fa l'urto efficace contro il piano orizzontale.

330. Giova qui determinare la curva o *trovare il luogo geome-*

trico di tutti i punti (x_1, y_1) , *che sotto una sola direzione possono essere colpiti dal grave lanciato con una data velocità.*

La condizione perchè ciascuno dei punti (x_1, y_1) possa esser colpito dal grave sotto un solo angolo di proiezione, consiste, come abbiamo detto più sopra, nell'adempimento della equazione

$$4h^2 = 4hy_1 + x_1^2$$

tra le coordinate variabili x_1 ed y_1 : or bene questa equazione si riduce facilmente alla forma

$$x_1^2 = 4h(h - y_1),$$

e rappresenta così (VIII) una parabola che ha per parametro la costante $4h$, per asse proprio una retta coincidente coll'asse AY delle ordinate, e per foco la stessa origine A; tale sarà dunque il luogo geometrico o la curva, nella quale si trovano tutti i punti (x_1, y_1) che possono essere tocchi dal mobile sotto un solo angolo di proiezione. E poichè ad $x_1 = 0$ corrisponde il valore $y_1 = h$, e viceversa per $y_1 = 0$ si hanno due valori uguali e contrarii $x_1 = \pm 2h$; perciò la detta parabola interseca l'asse positivo delle ordinate alla distanza h dalla origine ed ha in quella intersezione il suo vertice, e di più taglia l'asse delle ascisse in due punti che sono situati alle distanze $2h$, e $-2h$ di qua e di là dalla medesima origine A.

Del resto quanto ai punti (x_1, y_1) posti fuori della parabola che abbiamo determinato, è chiaro che dovrà sussistere l'ineguaglianza $4h^2 < 4hy_1 + x_1^2$; e per contrario quanto ai punti (x_1, y_1) collocati dentro la medesima parabola, si dovrà avere $4h^2 > 4hy_1 + x_1^2$: dunque per quello che si è detto nel numero precedente, i primi punti non potranno esser tocchi per veruna guisa dal grave lanciato con una velocità $\beta = \sqrt{2gh}$, e i secondi punti all' opposto potranno colpirsi sotto due angoli diversi di proiezione. Di più se si fa girare la stessa parabola intorno all'asse verticale AY, sicchè

generi la superficie chiusa di una paraboloide, avrà luogo una conclusione identica a quella che abbiamo ora stabilito, per rispetto ai punti situati nella vôlta parabolica, e fuori o dentro della medesima.

331. **Moto dei gravi lanciati obliquamente in un mezzo resistente, o nell'aria.** Se i gravi vengono lanciati con gran velocità nell'aria, la resistenza del mezzo che si esercita continuamente sul mobile secondo la tangente della curva e contro la direzione del moto, non è sì piccola che possa trascurarsi; e il movimento dei medesimi proiettili succederà allora per una curva ACB (fig. 156ª) non poco diversa da quella, che abbiamo veduto descriversi dai gravi nel vuoto o nella ipotesi di una resistenza non apprezzabile: generalmente *la curva percorsa dai gravi nel pieno è meno elevata, e meno larga che nel vuoto.*

Infatti disposti gli assi coordinati come nei numeri precedenti, la componente verticale della resistenza agisce verso il basso nella direzione della gravità, quando il mobile ascende in alto; la componente poi orizzontale, sì nella salita come nella discesa del mobile, è sempre diretta verso la parte negativa delle ascisse: laonde risoluta la velocità di proiezione in due, una verticale e l'altra orizzontale, la prima componente verrà diminuita sì dalla gravità e sì dalla resistenza dell'aria dal principio della curva sino al punto supremo C, la cui altezza sull'orizzonte sarà per conseguenza alquanto minore che nel vuoto; la seconda componente poi verrà incessantemente diminuita per tutto il tempo del moto dalla medesima resistenza del mezzo, e però l'ampiezza della curva deve essere più piccola che nel vuoto.

332. Ne segue ancora che *la discesa dei gravi proietti pel ramo* CB, *si farà con un movimento che tende sempre più a divenire verticale ed uniforme, e* che *lo stesso ramo discendente* CB *avrà per asintoto una certa retta verticale* LL′.

La qual cosa perchè meglio apparisca nella supposizione di un mezzo omogeneo e di una resistenza proporzionale (278) al quadrato della velocità, sieno α e β l'angolo e la velocità di proiezione, s e v l'arco percorso e la velocità del mobile alla fine di un

tempo t, o presso il punto (x, y): il rapporto $\frac{dx}{ds}$ rappresenterà il coseno dell'angolo, che fa la direzione ds col positivo asse delle ascisse; e però espresso con k il rapporto tra la resistenza del mezzo e il quadrato della velocità, rispetto a una massa $= 1$, sarà $-kv^2 \frac{dx}{ds}$ la componente della medesima resistenza secondo una retta parallela all'asse orizzontale AX. Onde (297) l'equazione del moto, la quale adesso si deve unicamente considerare per giugnere allo scopo che ci siamo proposto, è la seguente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kv^2 \frac{dx}{ds} ;$$

e una tale equazione, attesa la relazione $v = \frac{ds}{dt}$ si può anche scrivere in questa forma:

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{ds^2}{dt^2} \frac{dx}{ds} ,$$

ovvero

$$d\frac{dx}{dt} = -kds\frac{dx}{dt} , \quad d\frac{dx}{dt} : \frac{dx}{dt} = -kds .$$

Presi gli integrali, e dinotata con C una costante arbitraria, ne verrà l'equazione

$$\log\left(\frac{dx}{dt}\right) = -ks + C :$$

e siccome la costante C nel caso attuale assume il valore particolare $\log(\beta \cos \alpha)$, per la ragione che nel principio del moto ad $s = 0$ cor-

risponde la componente orizzontale della velocità $\frac{dx}{dt} = \beta \cos \alpha$;
così al termine di un arco qualunque s sussisterà generalmente

$$\log\left(\frac{dx}{dt} : \beta \cos \alpha\right) = -ks ;$$

ossia

$$\frac{dx}{dt} = \beta \cos \alpha \, . \, e^{-ks} \quad . \tag{2}$$

Crescendo indefinitamente l'arco s, si diminuirà in infinito il valore del fattore e^{-ks}; e diminuendosi con esso anche la velocità orizzontale $\frac{dx}{dt}$, tenderà questa continuamente verso un limite $= 0$: per la qual cosa nel pieno o nell'aria, il moto dei gravi pel ramo discendente della traiettoria si accosterà sempre più a confondersi con quello che è prodotto (279. 1.°) dall'altra componente $\frac{dy}{dt}$, cioè tenderà a divenire verticale ed uniforme; e vi sarà per conseguenza una rerta retta verticale LL', alla quale come a proprio asintoto si avvicini indefinitamente lo stesso ramo discendente CB, senza che però mai la raggiunga.

333. Passiamo ora a trovare le formole, colle quali si possono conoscere tutte le circostanze del moto dei gravi nell'aria, e si risolva completamente il problema di un tale movimento. Il rapporto $\frac{dy}{ds}$ rappresenta il coseno dell'angolo, che la direzione ds, o la tangente presso il punto (x, y), forma coll'asse positivo delle ordinate; perciò rispetto a una massa $= 1$, la quantità $-kv^2 \frac{dy}{ds}$ $= -k \frac{ds^2}{dt^2} \frac{dy}{ds}$ ossia $-k \frac{ds}{dt} \frac{dy}{dt}$, sarà la componente della resistenza del mezzo giusta una retta parallela all'asse verticale AX:

e siccome riguardo all'aria si può adoperare il valore g per la forza acceleratrice costante, che sollecita il mobile in virtù della gravità; così, oltre all'equazione considerata nel numero precedente, si avrà nel moto del grave anche l'altra equazione (297)

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g-k\frac{ds}{dt}\frac{dy}{dt}.$$

Per integrare questa equazione, chiamiamo θ l'angolo formato dalla tangente della curva presso il punto (x, y) coll'asse positivo delle ascisse, ed esprimiamo colla lettera p la tangente trigonometrica di questo angolo, o la derivata (LXXIV) della ordinata y che è funzione della ascissa corrispondente x: sussisterà $p=\text{tang}\,\theta=\frac{dy}{dx}$; ed essendo funzioni del tempo t le tre qualità p, x, y, sussisteranno ancora le espressioni differenziali di primo e secondo ordine

$$(3)\qquad dy=pdx\,,\quad \frac{dy}{dt}=p\frac{dx}{dt}\,,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt}+p\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Per mezzo di questi valori l'equazione superiore prenderà la seguente forma

$$\frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt}+p\frac{d^2x}{dt^2}=-g-kp\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt}.$$

e attesa l'equazione (1) del numero precedente, si ridurrà quindi alla forma più semplice

$$(4)\qquad \frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt}=-g.$$

Dividendo ora una tale equazione per l'equazione (2) innalzata al quadrato, otterremo

$$(5)\quad \frac{dp}{dt}:\frac{dx}{dt}=-\frac{g}{\beta^2\cos^2\alpha}e^{2ks}\,,\quad \text{ossia}\quad \frac{dp}{dx}=-\frac{ge^{2ks}}{\beta^2\cos^2\alpha}\,;$$

e moltiplicando questa ultima formola per l'identità $\sqrt{1+p^2}\,dx = ds$, otterremo ancora

$$\sqrt{1+p^2}dp=-\frac{ge^{2ks}ds}{\beta^2\cos^2\alpha}=-\frac{g}{2k}\frac{e^{2ks}d.2ks}{\beta^2\cos^2\alpha}\ .$$

In questa equazione, nella quale sono separate le due variabili p ed s, l'integrazione del primo membro ci dà per parti

$$\int\sqrt{1+p^2}dp=p\sqrt{1+p^2}-\int\frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$=p\sqrt{1+p^2}-\int\frac{(1+p^2)dp}{\sqrt{1+p^2}}+\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$=p\sqrt{1+p^2}-\int\sqrt{1+p^2}\,dp+\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}\ ,$$

e conseguentemente (LXXXIV)

$$\int\sqrt{1+p^2}\,dp=\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

$$=\frac{1}{2}p\sqrt{1+p^2}+\frac{1}{2}\log\left(p+\sqrt{1+p^2}\right);$$

l'integrale poi dell'ultimo membro è uguale evidentemente al prodotto del fattore costante per la funzione esponenziale e^{2ks}: sarà dunque

$$(6)\qquad p\sqrt{1+p^2}+\log(p+\sqrt{1+p^2})=-\frac{g}{k}\,\frac{e^{2ks}}{\beta^2\cos^2\alpha}+c\,;$$

e in questa formola il valore della quantità costante c consiste nella espressione

$$c=\frac{g}{k\beta^2\cos^2\alpha}+\operatorname{tang}\alpha\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha}$$

$$+\log(\operatorname{tang}\alpha+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha})\,,$$

per la ragione che al principio del moto si hanno insieme $s=0$, $p=\operatorname{tang}\alpha$.

334. Ciò posto, dalla seconda formola (5), dalla prima formola (3), e dalla formola (4) si ricavano rispettivamente le tre espressioni differenziali

$$dx=-\frac{\beta^2\cos^2\alpha}{ge^{2ks}}\,dp\,,\quad dy=p\,dx\,,\quad dt^2=-\frac{dp\,dx}{g}\,.$$

Se ora dalla prima espressione si elimina l'esponenziale $-e^{2ks}$ mediante la formola (6), e se quindi nelle altre due espressioni si sostituisce il valore risultante dx, nasceranno le tre equazioni

$$(r'')\qquad\left\{\begin{aligned}dx&=\frac{1}{k}\,\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}+\log(p+\sqrt{1+p^2})-c}\\ dy&=\frac{1}{k}\,\frac{p\,dp}{p\sqrt{1+p^2}+\log(p+\sqrt{1+p^2})-c}\,,\\ dt&=-\frac{1}{\sqrt{gk}}\,\frac{dp}{[c-p\sqrt{1+p^2}-\log(p+\sqrt{1+p^2})]^{\frac{1}{2}}}\,.\end{aligned}\right.$$

Nell'ultima equazione, omesso il segno positivo, si ritiene solo il segno negativo del radicale, perchè gli incrementi dt e dp sono di segni tra loro opposti: di più i secondi membri di tutte e tre le equazioni sono funzioni differenziali della sola variabile p, e per conseguenza sono anche funzioni della variabile θ; giacchè si ha $p = \tan\theta$, e $dp = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$. Di tal modo i valori x, y, t, che si deducono per mezzo d'integrazioni dalle equazioni (r'''), avranno la forma $\int \varphi\,(\theta)\,d\theta$; e li potremo determinare con approssimazione, calcolando la medesima forma, ossia prendendo l'integrale approssimato della espressione $\varphi\,(\theta)\,d\theta$, coll'avvertenza che un tale integrale deve svanire alla origine A (fig. 155a), dove l'angolo θ diventa uguale all'angolo α di proiezione: coi valori x ed y si costruirà per punti la traiettoria del grave; e dal valore t si conoscerà l'istante in cui il mobile passa per uno di questi punti, ovvero il tempo che lo stesso mobile impiega a percorrere l'arco corrispondente s.

Per avere le coordinate del punto più alto o del vertice C della traiettoria, e determinare così l'altezza CH del tiro, basterà integrare le due prime equazioni (r'''), ovvero $dx = f(\theta)\,d\theta$ e $dy = F\,(\theta)\,d\theta$, tra i limiti $\theta = \alpha$ e $\theta = 0°$; per ottenere poi l'ampiezza AB del tiro, converrà che si trovi dapprima per mezzo della seconda equazione (r''') quel valore negativo $-\alpha'$ dell'angolo θ, il quale corrisponde ad $y = 0$, e che si estenda dipoi l'integrale della prima equazione (r''') da $\theta = \alpha$ sino al valore $\theta = -\alpha'$. In fine la velocità v del proiettile in un punto qualunque (x, y) della sua traiettoria, si potrà sempre esprimere esattamente in funzione di p, ovvero di θ: poichè, attesa la prima formola (3) e la formola (4) del numero precedente sussiste l'equazione

$$v^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = (1+p^2)\,\frac{dx^2}{dt^2} = (1+p^2)\,g^2\,\frac{dt^2}{dp^2}\ ;$$

quindi, mediante il valore della quantità dt^2 che ci viene dato dalla terza formola (r'''), risulterà la espressione

$$v^2 = \frac{g}{k} \frac{1+p^2}{c - p\sqrt{1+p^2} - \log(p+\sqrt{1+p^2})} .$$

335. Supponiamo che sia piccolissimo l'angolo di proiezione α: in questo caso il grave non s'innalzerà che di una altezza assai piccola sopra l'asse orizzontale AX, condotto per il punto A di partenza; ed essendo pochissimo inclinata all'orizzonte la tangente in tutta quella parte della traiettoria che è situata al di sopra del medesimo asse AX, potremo trascurare il quadrato della quantità p che è molto piccola, e quindi trovare con approssimazione sufficiente l'equazione in x ed y della predetta parte di traiettoria.

Infatti poichè in confronto delle altre quantità finite si può trascurare p^2, ossia $\frac{dy^2}{dx^2}$, si avrà prossimamente

$$ds = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\, dx = dx \text{ , ed } s = x ;$$

per conseguenza l'equazione (5) del numero (333) diventerà nel caso presente

$$dp = -\frac{ge^{2kx}}{\beta^2\cos^2\alpha} dx = -\frac{ge^{2kx} d.2kx}{2k\beta^2\cos^2\alpha} ,$$

e il suo integrale sarà

$$\frac{dy}{dx} = p = -\frac{ge^{2kx}}{2k\beta^2\cos^2\alpha} + C :$$

la costante C si deve determinare in modo che ad $x = 0$ corrisponda $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\alpha$; sarà dunque $C = \text{tang}\,\alpha + \frac{g}{2k\beta^2\cos^2\alpha}$ e quindi

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\alpha + \frac{g}{2k\beta^2\cos^2\alpha}(1 - e^{2kx}) .$$

Moltiplicando questa ultima formola per dx, e integrandola in modo che ad $x=0$ corrisponda pure $y=0$, risulterà l'equazione finita

$$(r^{\text{IV}}) \qquad y=x\left(\operatorname{tang}\alpha+\frac{g}{2k\beta^2\cos^2\alpha}\right)+\frac{g}{4k^2\beta^2\cos^2\alpha}\left(1-e^{2kx}\right),$$

la quale appartiene a quella parte di traiettoria che abbiamo detto di sopra. Se si pone tang θ, ossia $\frac{dy}{dx}=0$, la penultima equazione ci farà conoscere l'ascissa del vertice; e l'equazione (r^{IV}) ci darà poi l'ordinata corrispondente a una tale ascissa, ossia l'altezza del tiro: l'ampiezza o la portata del tiro si ricaverà dalla medesima equazione (r^{IV}), ponendo $y=0$. Quando si conoscono due punti, per i quali passa il proiettile, le due equazioni che quinci risultano sopra la forma (r^{IV}), potranno servire a determinare le due costanti k e β.

Volendo anche trovare l'espressione del tempo che il mobile nella ipotesi fatta da principio impiega a descrivere un arco della sua traiettoria sopra l'orizzonte, riprendiamo l'equazione (4) del numero (333); e ridottala alla forma $dt^2=-\frac{dx\,dp}{g}$, poniamo nella medesima il valore della quantità dp, trovato al principio del presente numero: si avrà

$$dt=\frac{e^{kx}d.kx}{k\beta\cos\alpha}\ ,\ t=\frac{e^{kx}}{k\beta\cos\alpha}+C'\ .$$

Ora sussistono insieme i valori $t=0$, $x=0$, e perciò è la costante $C'=-\frac{1}{k\beta\cos\alpha}$; sarà dunque

$$t=\frac{e^{kx}-1}{k\beta\cos\alpha}$$

l'espressione del tempo, in cui il proiettile nella sua traiettoria perviene al punto (x, y). Seguono al solito alcuni problemi, e la loro soluzione.

336. **Problema** I. *Due proiettili vengono lanciati a un medesimo istante colle rispettive velocità* u *ed* u' *in uno stesso piano verticale e nel vuoto, sotto le inclinazioni* α *ed* α'. *Oltre il punto di partenza, le traiettorie hanno anche comune un altro punto* M, *pel quale passeranno i due mobili in due epoche differenti: si domanda qual sarà l'intervallo di tempo, che separa l'una dall'altra queste due epoche.*

Sieno x ed y le coordinate del punto M per rispetto a due assi, uno orizzontale e l'altro verticale, condotti pel punto di proiezione nel piano delle curve paraboliche; i valori numerici dei tempi nei quali i due proiettili dalla posizione iniziale pervengono successivamente alla posizione (x, y), si esprimono (326) coi rispettivi rapporti $\frac{x}{u\cos\alpha}$ ed $\frac{x'}{u'\cos\alpha'}$; perciò i due istanti, nei quali i medesimi proiettili passano pel punto M, saranno separati dall'intervallo di tempo

$$T = \frac{x}{u\cos\alpha} - \frac{x}{u'\cos\alpha'} = \frac{u'\cos\alpha' - u\cos\alpha}{uu'\cos\alpha\cos\alpha'}\,x.$$

Ora per eliminare l'ascissa x, in virtù della formola (r) del numero (322) abbiamo

$$x\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha} = y = x\,\mathrm{tang}\,\alpha' - \frac{gx^2}{2u'^2\cos^2\alpha'}:$$

donde si ricava

$$\frac{g}{2}\left(\frac{1}{u^2\cos^2\alpha} - \frac{1}{u'^2\cos^2\alpha'}\right)x^2 - (\mathrm{tang}\,\alpha - \mathrm{tang}\,\alpha')\,x = 0,$$

ossia

$$x^2 - \frac{2}{g}\,\frac{u^2 u'^2 \cos^2\alpha \cos^2\alpha'}{u'^2\cos^2\alpha' - u^2\cos^2\alpha}\;\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\alpha')}{\cos\alpha\cos\alpha'}\,x = 0\,.$$

Delle due radici di questa equazione, l'una $x = 0$ appartiene al punto di partenza dei gravi lanciati obliquamente; l'altra poi, cioè

$$x = \frac{2}{g}\,\frac{u^2u'^2\cos\alpha\cos\alpha'\operatorname{sen}(\alpha-\alpha')}{(u'\cos\alpha'+u\cos\alpha)\,(u'\cos\alpha'-u\cos\alpha)}\;,$$

rappresenta l'ascissa del punto M, e deve essere sostituita nella espressione dell'intervallo T: fatta pertanto una tale sostituzione, si otterrà

$$\mathrm{T} = \frac{2}{g}\,\frac{uu'\operatorname{sen}(\alpha-\alpha')}{u\cos\alpha + u'\cos\alpha'}\;.$$

337. **Problema** II. *Un piccolo globo, pesante e perfettamente elastico, senza alcuna velocità iniziale percorre su di un piano inclinato* AB *una data lunghezza* k , *e passa quindi in un piano orizzontale* BC *che fa séguito al primo: cerchiamo qual debba essere l'inclinazione del piano* AB , *affinchè sia un* maximum *l'ampiezza della parabola che nel vuoto descriverà il globo rimbalzando dal piano* BC.

Si chiami α l'inclinazione del piano AB all'orizzonte: la velocità acquistata dal mobile alla fine della data lunghezza k , si esprimerà (287) con $u = \sqrt{2gk\operatorname{sen}\alpha}$; e siccome (258. 2.°) il globo rimbalza quindi dal piano orizzontale BC sotto lo stesso angolo α, e colla medesima velocità u, così (324) sarà

$$x = \frac{2u^2}{g}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 4k\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha$$

l'espressione dell'ampiezza nella parabola che descrive il mobile

dopo il rimbalzo. La derivata di una tale espressione, rispetto alla variabile α, è questa

$$\frac{dx}{d\alpha} = 4k(2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha) ;$$

in conseguenza (LXX) il valore α, pel quale diviene massima l'ampiezza x, deve soddisfare all'equazione

$$\operatorname{sen} \alpha(2 \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) = 0 ,$$

oppure all'una o all'altra delle due equazioni

$$\operatorname{sen} \alpha = 0 \ , \ 2(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) - \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 .$$

Ora è manifesto che la portata x non diviene massima pel valore di α che renda soddisfatta la prima delle ultime equazioni; dunque il valore della inclinazione α, a cui corrisponde la massima ampiezza x, si ricaverà dalla seconda equazione, e sarà
$\alpha = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{2}{3}}$.

338. **Problema** III. *Un punto pesante sotto una data inclinazione α viene lanciato con una determinata velocità β in un mezzo omogeneo, la cui resistenza è proporzionale alla semplice velocità: si cerca l'espressione del tempo che sarà necessario al mobile, per arrivare salendo alla sua massima altezza.*

L'asse delle ordinate al solito sia verticale, e diretto dal basso all'alto nel verso opposto alla gravità; e si esprima colla lettera k il rapporto costante della resistenza alla velocità $v = \frac{ds}{dt}$. Sarà $\frac{dy}{ds}$ il coseno dell'angolo, che forma la direzione ds coll'asse positivo delle ordinate; epperò l'espressione $-kv\frac{dy}{ds}$ ovvero $k\frac{dy}{dt}$ rappresenterà la componente verticale della resistenza, e tutt'insieme (297) si avrà

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - k\frac{dy}{dt}$$

per la seconda equazione del movimento, della quale dobbiamo solo occuparci nel risolvere la questione proposta. Ora quella equazione può scriversi prima in questo modo

$$k\,d\,\frac{dy}{dt} = -k\,dt\left(g + k\,\frac{dy}{dt}\right),$$

e si trasforma dipoi nell'altra equazione

$$\frac{d\left(g + k\,\frac{dy}{dt}\right)}{g + k\,\frac{dy}{dt}} = -k\,dt\,,$$

la quale ha per proprio integrale la formola

$$\log\left(g + k\,\frac{dy}{dt}\right) = -kt + C:$$

e poichè quando t è uguale a zero, la velocità componente $\frac{dy}{dt}$, secondo l'asse verticale, ha il valore β sen α; perciò la costante C risulterà $= \log\,(g + k\,\beta \operatorname{sen} \alpha)$, e si avrà conseguentemente

$$\log\frac{g + k\beta \operatorname{sen} \alpha}{g + k\,\frac{dy}{dt}} = kt.$$

Il mobile allora cesserà dal salire per la curva che descrive, e si troverà alla massima altezza, quando abbiasi $\frac{dy}{dt} = 0$; dunque

il tempo che lo stesso mobile impiega per giungere al punto più elevato della sua traiettoria, sarà

$$T = \frac{1}{k}\log\left(1 + \frac{k}{g}\beta \operatorname{sen}\alpha\right).$$

Passiamo adesso a fare intorno alle formole generali del moto centrale l'altra applicazione particolare, che abbiamo ricordato alla fine del numero (321); cioè trattiamo del movimento dei pianeti intorno al sole e della gravitazione universale, tenendoci in quei limiti ristretti che si convengono alla Meccanica.

CAPO VIII.

DEL MOTO DEI PIANETI INTORNO AL SOLE E DELLA GRAVITAZIONE UNIVERSALE.

339. **Leggi di Keplero relative al moto dei pianeti.** Intorno al moto dei pianeti il celebre Kepler osservò pel primo e scoprì tre leggi generali, che riferite al centro di gravità dei medesimi pianeti sono le seguenti:

1.ª *Le aree che il raggio vettore di ciascun pianeta descrive intorno al centro del sole, sono poste in uno stesso piano, e sono insieme proporzionali ai tempi nei quali si descrivono.*

2.ª *Le traiettorie e le orbite piane, per le quali i singoli pianeti si muovono intorno al sole, sono ellittiche, e in un foco di queste ellissi risiede il centro stesso del sole.*

3.ª *Nelle orbite dei diversi pianeti i quadrati dei tempi periodici, cioè di que' tempi in cui si compiono i rispettivi giri, sono tra loro come i cubi degli assi trasversi o maggiori.*

Da queste leggi di Keplero, confermate dipoi da numerose osservazioni di altri Astronomi, Newton fu condotto alla teoria della gravitazione universale, traendone in prima tre conseguenze relativamente alla forza, onde i pianeti sono sollecitati del con-

tinuo e ritenuti nelle orbite proprie. Queste conseguenze e conclusioni vogliamo ora enunciare e dimostrare distintamente in diversi numeri: le quantità che in tali conclusioni verremo considerando, non sono assolute ma relative al centro del sole, e risguardano, come le tre leggi esposte, il centro dei medesimi pianeti.

340. Direzione della forza che ritiene i pianeti nelle loro orbite. Dalla prima legge di Keplero si deduce che *la forza acceleratrice, dalla quale sono animati i pianeti nelle loro orbite, è diretta costantemente al centro del sole.*

Infatti, conforme alle cose dette nei numeri (311 e 318), se un mobile procede nello spazio per una curva piana di tal guisa, che le aree descritte dal suo raggio vettore intorno a un dato punto sieno proporzionali ai tempi corrispondenti, la forza acceleratrice ond'è sollecitato il mobile e ritenuto nella sua curva, si dirige costantemente a quel punto come a proprio centro: ma giusta la prima legge di Keplero, i pianeti si muovono in orbite piane, e le aree descritte dal raggio vettore di ciascun pianeta intorno al centro del sole sono proporzionali ai tempi in cui si descrivono; dunque la forza acceleratrice che sollecita e ritiene i pianeti nelle loro orbite, è diretta constantemente al centro del sole.

Questa forza, siccome abbiamo avvertito poc'anzi, non è assoluta ma relativa al centro solare, che sappiamo d'altronde essere animato da un certo movimento: la medesima forza è attrattiva, e varia in una ragione determinata, come ora diremo considerando le curve che i singoli pianeti descrivono intorno al sole.

341. Natura e intensità della forza dei pianeti. Dalla seconda legge di Keplero s'inferisce che *la forza acceleratrice, alla quale è dovuto il moto relativo dei pianeti intorno al sole, tende ad avvicinare i medesimi pianeti al centro solare, e varia nella ragione inversa del quadrato delle distanze di ciascun pianeta dallo stesso centro del sole.*

Nella ellisse che, giusta la seconda legge di Keplero, descrive un pianeta qualunque intorno al sole posto col suo centro in un foco della curva, sieno $2a$ l'asse traverso, e l'eccentrità, ρ il raggio

vettore o la distanza del pianeta dal centro del sole, ed ω l'angolo che fa lo stesso raggio vettore coll'asse trasverso dalla parte del vertice più vicino al sole: sarà (XVIII)

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega}$$

l'equazione polare della curva rispetto a quel foco, dove è situato il centro del sole. Ciò posto, la forza acceleratrice φ a cui è soggetto il pianeta, come abbiamo veduto nel numero precedente, si dirige costantemente al centro del sole; e però la sua espressione generale consiste nella formola (q^v) del numero (316), cioè nella formola

$$\varphi = \frac{C^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega^2}\right).$$

Ora l'equazione superiore della curva potendo scriversi in questo modo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1+e\cos\omega}{a(1-e^2)},$$

e porgendoci così per mezzo della differenziazione il valore

$$d^2\frac{1}{\rho} = -\frac{e\cos\omega}{a(1-e^2)}d\omega^2;$$

sussiste evidentemente in ordine all'orbita del pianeta

$$\frac{1}{\rho} + \frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\omega^2} = \frac{1}{a(1-e^2)}:$$

sarà dunque la forza acceleratrice

$$\varphi = \frac{C^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{1}{\rho^2} .$$

Abbiamo già detto altrove, come la costante C rappresenti il doppio del rapporto tra l'area descritta dal raggio vettore e il tempo corrispondente; laonde se si chiama T il tempo periodico, cioè il tempo nel quale il pianeta percorre l'intera ellissi e il raggio vettore descrive tutta l'area ellittica che (XCIV. 1.°) si esprime col prodotto $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$, si avrà

$$C^2 = \frac{4\pi^2 a^4(1-e^2)}{T^2} .$$

e l'espressione della forza acceleratrice si ridurrà a quest'altra

$$(s) \qquad \varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} .$$

Pertanto la forza φ, da cui in ogni istante è sollecitato il pianeta, risultando positiva, sarà una forza attraente e tenderà del continuo verso il sole: è poi chiaro dalla formola trovata che l'intensità della medesima forza, da una posizione all'altra di un pianeta nella sua orbita, deve variare nella ragione inversa del quadrato della distanza che s'interpone tra il centro dello stesso pianeta e quello del sole. Questa conseguenza sarebbe pur vera, se le traiettorie dei corpi celesti non fossero ellissi, ma parabole ovvero iperbole.

342. **Paragone tra le forze con cui i diversi pianeti gravitano nel sole.** In fine dalla terza legge di Keplero si ritrae questa terza conclusione, che cioè *la forza acceleratrice colla quale i diversi pianeti tendono nel sole, varia da un pianeta all'altro nella sola ragione inversa del quadrato delle distanze dal centro del medesimo sole.*

E vaglia il vero. Attesa la formola trovata nel numero precedente, i valori della forza acceleratrice per due pianeti diversi sono questi:

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \frac{1}{\rho^2} , \varphi' = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} \frac{1}{\rho'^2} ;$$

e fatta la divisione dell'uno per l'altro, ne nasce la proporzione

$$\varphi : \varphi' = \frac{a^3}{T^2} \frac{1}{\rho^2} : \frac{a'^3}{T'^2} \frac{1}{\rho'^2} .$$

Ma giusta la terza legge di Keplero, sono uguali tra loro i due rapporti $\frac{a^3}{T^2}$ ed $\frac{a'^3}{T'^2}$; si avrà dunque la proporzione più semplice

$$\varphi : \varphi' = \frac{1}{\rho^2} : \frac{1}{\rho'^2} ,$$

che ci mostra la verità di ciò che abbiamo testè asserito.

Si vede quindi che il centro del sole può riguardarsi come la sede di una forza attrattiva, la quale si estende per ogni verso all'infinito, ed agisce su tutti i pianeti nella ragione inversa del quadrato delle loro distanze dal medesimo centro: a distanze uguali, la forza acceleratrice sarebbe la stessa per tutti i pianeti; e le forze motrici, come i pesi dei corpi alla superficie della terra, sarebbero proporzionali soltanto alle masse dei pianeti diversi. È ora facile e tutto naturale il passaggio alla legge della mutua attrazione dei corpi, o della gravitazione universale.

343. **Gravitazione universale.** Da quanto si è detto finora apparisce che dinotando m la massa di un pianeta qualunque primario, e k una quantità costante, la forza motrice $m\varphi$, colla quale il sole attira a sè i diversi pianeti, si può esprimere col rap-

porto $\frac{km}{\rho^2}$, ed è perciò direttamente proporzionale alla massa di ciascun pianeta e insieme è reciproca al quadrato della distanza ρ tra i centri del pianeta e del sole: ma nella natura ha sempre luogo il principio dell'uguaglianza tra l'azione e l'opposta reazione, sia che i corpi agiscano a contatto gli uni sopra gli altri, sia che comunque di lontano si determinino a vicenda a qualche mutamento di stato; dunque i singoli pianeti attraggono a sè il sole con quella stessa forza, con cui ciascuno di loro è attratto dal sole medesimo. Vale a dire il sole, la cui massa chiameremo M, tende del continuo verso ciascuno dei pianeti, sui quali agisce alla sua volta per attrazione; e così la forza motrice — $\frac{km}{\rho^2}$, come anche la forza acceleratrice — $\frac{km}{M\rho^2}$ di quella tendenza o gravità, segue la ragione diretta dalle masse onde sono formati i singoli pianeti, e la ragione inversa del quadrato delle distanze che separano il centro del sole dai centri degli stessi pianeti.

Oltre a ciò si sa dalle osservazioni astronomiche che alle leggi, dalle quali è regolato il moto dei pianeti intorno al sole, sono anche sottoposti i movimenti delle comete intorno al sole, e dei pianeti secondarii o satelliti intorno al rispettivo pianeta primario, e delle stelle doppie o multiple intorno alla propria stella centrale: dunque quelle tre conclusioni che nei numeri precedenti abbiamo dedotto dalle leggi di Keplero per i pianeti rispetto al sole, valgono pure per questi altri corpi celesti relativamente al corpo centrale, intorno a cui si muovono; ed in conseguenza le comete, i satelliti dei pianeti, e le stelle multiple sono attratte ed attraggono a vicenda il rispettivo centro di azione nella ragione diretta della propria massa, e nella ragione inversa del quadrato delle distanze.

Questa identica legge di mutua attrazione si esercita eziandio tra i corpi terrestri da una parte, e la terra medesima dall'altra; perchè, come mostreremo nel numero susseguente, sono di una stessa specie la gravità terrestre e la forza centrale dei corpi

celesti, e però deve essere identico in ambedue le forze il modo di agire.

Che poi la medesima forza si eserciti scambievolmente colla stessa legge tra tutti i corpi terrestri, tra tutti i pianeti e le comete e le stelle multiple, insomma tra tutte le particelle della materia a vicenda, si arguisce 1.° per analogia dai molti casi particolari, in cui già abbiamo scorto la mutua attrazione: si conferma 2.° dalle aberrazioni del pendolo o del filo a piombo che nelle vicinanze di una gran montagna s'inchina verso di questa, deviando dalla direzione verticale; come anche si conferma dai movimenti che nella bilancia di torsione del Cavendish producono due grosse sfere, quando si accostino da parti opposte alle piccole palle da cui è terminata l'asta orizzontale dello stromento: si prova 3.° e ponesi fuori di ogni dubbio dalle perturbazioni, che soffrono i corpi celesti ne' loro movimenti. Imperocchè se noi facciamo questa ipotesi che i corpi celesti si attirino tutti a vicenda secondo la legge ricordata più volte, dobbiamo anche ammettere per conseguenza che i loro movimenti non si effettuino precisamente giusta le leggi di Keplero, ma sieno soggetti a qualche perturbazione ed irregolarità più o meno notabile: ora l'osservazione ci assicura da una parte che i movimenti dei corpi celesti vanno soggetti realmente ad alcune perturbazioni ed irregolarità, e dall'altra parte ci dimostra il calcolo che le perturbazioni osservate sono appunto tali, quali dovrebbero risultare dalla supposta attrazione scambievole dei corpi: dunque una tale attrazione esiste e si esercita di fatto tra i corpi celesti; ed è ciò così vero che fondati sulla esistenza di questa forza e sulla legge della sua azione, gli Astronomi dalle irregolarità avvertite nel moto di un pianeta sono stati condotti a scoprire la presenza di altro pianeta, come nel 1846 avvenne rispetto al pianeta Nettuno che dietro i calcoli dei sigg. Leverrier e Adams sulle cagioni perturbatrici del moto di Urano, fu scoperto a Berlino dal sig. Galle nel sito indicato prossimamente dalla teoria.

Dopo tutti questi fatti ed argomenti, ci è permesso di conchiudere generalmente che *tutti i corpi onde si compone il sistema del mon-*

do, ed anche tutte le particelle e gli elementi della materia gravitano a vicenda gli uni sugli altri in ragione diretta delle masse attraenti ed inversa del quadrato delle distanze.

344. **Identità della gravità terrestre colla forza che sollecita la luna verso il centro della terra.** La gravità terrestre e le forze centrali dei corpi celesti, come abbiamo asserito nel numero precedente, sono di una medesima specie e seguono lo stesso modo di azione; giacchè *quella forza che sospinge la luna verso la terra, non è altro che la gravità terrestre diminuita nella ragione inversa del quadrato della distanza lunare dal centro della terra medesima.*

In vero la distanza media della luna dal centro della terra è uguale in circa a 60 raggi terrestri; epperò nella supposizione che la gravità agisca nella ragione inversa del quadrato delle distanze, l'accelerazione g dovuta alla stessa forza presso la superficie della terra, dovrà diminuirsi di 3600 volte nella regione lunare, ed esprimersi col rapporto $\frac{g}{3600}$. Ora tale appunto si è l'espressione della forza acceleratrice φ, che attira la luna verso il centro della terra, e la rattiene nella sua orbita.

Infatti sia r il raggio medio del globo terrestre, ed R il raggio dell'orbita lunare che a cagione della poca eccentrità possiamo considerare come circolare: essendo T il tempo che impiega la luna a compire un giro intorno al centro della terra, dal numero (303), ovvero dalla formola (s. 341) nella ipotesi del circolo ossia di $a = \rho = \mathrm{R}$, si avrà la espressione

$$\varphi = \frac{4\pi^2 \mathrm{R}}{\mathrm{T}^2} = \frac{4.60\pi^2 r}{\mathrm{T}^2}$$

relativamente alla accelerazione, con cui la luna in un minuto secondo cade o tende verso il detto centro di azione che è il centro stesso della sua orbita. Ma dalla geometria e dalla astronomia abbiamo i valori numerici $\pi = 3{,}1416$; $r = 6366739^m$; T $= 27^g\ 7^{or.}\ 43' = 60.39343''$: sarà dunque.

$$\varphi = \frac{(3,1416)^2 . 6366739^m}{15.(39343'')^2} - 0^m, 0027 \text{ circa},$$

e un tal valore non differisce sensibilmente dal valore numerico $\frac{g}{3600}$, ciò che dovea provarsi.

345. Si può anche procedere in altro modo, dimostrando direttamente che la forza la quale attira i gravi alla superficie della terra, e la forza che attrae la luna nella sua orbita, stanno tra loro nella ragione inversa del quadrato delle rispettive distanze dal centro terrestre.

Sia LL′ (fig. 157.ª) l'orbita lunare, la quale per ragione della sua eccentricità assai piccola si può considerare come circolare, e descritta con moto uniforme in virtù della forza di proiezione e di quella che tende continuamente al centro stesso del circolo; LA sia l'arco percorso dalla luna in un minuto primo, e T il centro dell'orbita e della terra: tirata la tangente LD, condotta la perpendicolare AB sopra il raggio TL, e prolungato l'altro raggio TA fino all'incontro della tangente in C, l'intervallo CA che attesa la piccolezza relativa dell'arco LA può prendersi come parallelo ed uguale ad LB, rappresenterà la deviazione della luna dalla retta tangente sopra la quale l'astro si moverebbe in virtù della sola forza preconcepita; cioè rappresenterà lo spazio che la luna in virtù della sola attrazione terrestre, la quale si può considerare come costante per un tempo assai corto, percorrerebbe con moto uniformemente accelerato verso il centro della terra in un minuto primo. Ora la lunghezza CA, ovvero LB, essendo molto piccola rispetto al diametro 2R dell'orbita lunare, può trascurarsi senza errore sensibile in confronto del medesimo diametro; dunque poichè in un circolo la perpendicolare abbassata da un punto della circonferenza sopra un diametro è media geometrica proporzionale tra i segmenti di questo, perciò avremo

$$CA = LB = \frac{\overline{AB}^2}{2R - LB} = \frac{\overline{AB}^2}{2R}.$$

L'angolo in T, onde si sposta il raggio vettore della luna in un minuto primo, è di 33″ in circa, e nel triangolo rettangolo ABT sussiste $AB = R \operatorname{sen} 33''$; dunque si avrà

$$CA = \frac{R^2 \operatorname{sen}^2 33''}{2R} = \frac{1}{2} R \operatorname{sen}^2 33'',$$

e da questa espressione risulterà per lo spazio CA il valore di 15 piedi parigini in circa, quando si adoperino i valori del raggio R e del sen 33″ che ci sono dati dall'astronomia e dalle tavole trigonometriche: vale a dire *lo spostamento della luna verso la terra in un minuto primo è uguale* (274) *allo spazio che si percorre dai gravi cadenti nel vuoto presso la superficie terrestre in un minuto secondo.*

Ciò posto, se g è la gravità alla superficie della terra, e φ la forza acceleratrice che sollecita la luna nella sua orbita, se inoltre s e σ sono gli spazii o le altezze rispettivamente dovute alle medesime forze, che possono considerarsi come costanti nei rispettivi tempi abbastanza piccoli t e θ, dalla teoria del moto uniformemente accelerato ricaveremo le espressioni

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \ , \ \sigma = \frac{1}{2} \varphi \theta^2 \ .$$

Quindi facendo $t = 1''$, $\theta = 1' = 60''$, in virtù della conclusione precedente avremo

$$15^p = \frac{1}{2} g \ , \ 15^p = \frac{1}{2} \varphi \, . \, 60^2 \ ;$$

per conseguenza sarà $g = \varphi . \, 60^2$, e sussisterà la proporzione

$$g : \varphi = 60^2 : 1 \ .$$

Ma indicando r il raggio della sfera terrestre, sappiamo che il

raggio dell'orbita lunare è $R = 60r$, e si ha perciò anche la proporzione

$$R^2 : r^2 = 60^2 : 1 ;$$

dunque si stabilirà in fine la proporzione

$$g : \varphi = R^2 : r^2 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2} .$$

Sicchè a somiglianza delle forze che animano i pianeti e li sospingono verso i rispettivi centri di azione, la gravità terrestre e la forza che attrae la luna verso il centro della terra, stanno tra loro nella ragione inversa del quadrato delle rispettive distanze dal centro medesimo della sfera terrestre; dunque la gravità che presso la superficie della terra attira i corpi al centro, diverrebbe nell'orbita lunare la forza stessa che sollecita la luna verso il medesimo centro; ossia la forza che rattiene la luna nella sua orbita, non è altro che la forza di gravità diminuita nella ragione inversa del quadrato delle distanze di un corpo qualunque dal centro della terra.

346. È pertanto la gravità terrestre un effetto e un caso particolare della attrazione o gravitazione universale: e poichè, come abbiamo detto e supposto di sopra, la terra ha prossimamente la figura di una sfera, e la sua densità, quantunque variabile da uno strato all'altro, può senza notabile errore riguardarsi come costante in ciascuno degli strati concentrici; perciò (145) la gravità terrestre o l'attrazione della terra sui corpi situati fuori della sua superficie, si esercita allo stesso modo come se tutta la massa del globo terracqueo fosse riunita nel suo centro; e la forza di gravità da cui vengono sollecitati i corpi posti sotto la medesima superficie della terra, varia (146. 2.°) in ragione diretta delle semplici distanze dal centro. Quanto alla attrazione scambievole, anche le masse dei pianeti e del sole possono considerarsi (145) come raccolte nei rispettivi centri di gravità; sì perchè le forme

di questi corpi si avvicinano molto a quella di una sfera omogenea ne' suoi stati concentrici, e sì perchè le loro dimensioni sono assai piccole in confronto delle distanze che si frappongono tra le posizioni dei medesimi corpi celesti.

Non è qui fuor di proposito l'annotare alcuna cosa intorno alle masse del sole e dei pianeti, che giusta l'osservazione ora fatta, possiamo considerare a guisa di altrettanti punti materiali.

347. Relazioni tra le masse dei pianeti e la massa del sole. Sieno M la massa del solé, m la massa di un pianeta qualunque primario, a il semi-asse trasverso della ellisse descritta dal pianeta intorno al sole, T il tempo periodico di ciascun rivolgimento: indicandosi colla lettera k l'attrazione scambievole che in una distanza $= 1$ esercitano l'una sull'altra due masse uguali, prese per unità e concentrate ciascuna in un punto, saranno (343)

$$\frac{kM}{\rho^2}\ ,\ -\ \frac{km}{\rho^2}$$

le forze acceleratrici, con cui alla distanza ρ tendono da parti opposte il pianeta verso il sole, e il sole verso il pianeta. Quindi il moto relativo del pianeta intorno al sole riguardato come immobile, dovrà attribuirsi (10) alla forza acceleratrice

$$\varphi = \frac{k(M+m)}{\rho^2}\ ;$$

ma nel medesimo moto relativo la forza acceleratrice si esprime ancora (341) col prodotto $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{\rho^2}$; si avrà dunque l'equazione

$$(1)\qquad M + m = \frac{4\pi^2}{k}\,\frac{a^3}{T^2}\ .$$

In questa equazione pei diversi pianeti sono diverse le due quantità a , T ; ma a cagione della terza legge di Keplero, si mantiene pros-

simamente costante per tutti i pianeti il rapporto $\frac{a^3}{T^2}$ tra il cubo dell'una quantità e il quadrato dell'altra: dunque in virtù della medesima equazione, si conserverà costante eziandio la somma $M+m$; epperò, non essendo uguali tra loro le masse dei differenti pianeti, conviene dire che la massa di ciascuno sia così piccola in paragone della massa solare, che a fronte di questa si possa trascurare senza errore sensibile.

Di più in ordine a un satellite qualunque di un dato pianeta indichiamo con m_1, a_1, T_1 tre quantità somiglianti a quelle che sono state designate con m, a, T rispetto al pianeta medesimo: come abbiamo ottenuto l'equazione (1), così procedendo allo stesso modo otterremo pure l'equazione

$$(2) \qquad m+m_1=\frac{4\pi^2}{k}\,\frac{a_1^3}{T_1^2}\;.$$

S'inferisce quindi che anche le masse dei satelliti sono assai piccole e possono trascurarsi in confronto della massa del rispettivo pianeta primario, intorno a cui si aggirano: peraltro da questa conclusione si deve eccettuare la luna, la quale è l'unico satellite della terra ed ha una massa inferiore soltanto di 82 volte in circa alla massa terrestre, come si sa dell'Astronomia.

L'attrazione che oltre al sole esercitano in un dato pianeta gli altri corpi celesti, deve senza dubbio cagionare delle perturbazioni nel moto relativo del medesimo pianeta intorno al sole: ma siccome le masse degli altri corpi che costituiscono il sistema planetario, sono molto piccole rispetto alla massa del sole; così vede ognuno che in paragone dell'attrazione solare devono essere assai deboli le forze attrattive dei medesimi corpi, e che per conseguente saranno poco sensibili le perturbazioni che quinci ne risultano nel moto ellittico di ciascun pianeta intorno al centro del sole.

348. Mediante le equazioni (1) e (2) che abbiamo trovato più sopra, si può facilmente stabilire il rapporto tra le masse dei

pianeti accompagnati da più satelliti e la massa del sole. Imperocchè dividendo quelle due equazioni l'una per l'altra, abbiamo subito la formola

$$\frac{m+m_1}{M+m}=\frac{a_1^3}{a^3}\cdot\frac{T^2}{T_1^2}\ :$$

ora la massa m_1 di un satellite si può senza grave errore trascurare rispetto alla massa m del proprio pianeta, e la massa m di un pianeta primario si può trascurare in paragone della massa solare M, come si è già dimostrato: dunque quella formola possiamo anche scriverla in questo modo

$$\frac{m}{M}=\frac{a_1^3}{a^3}\cdot\frac{T^2}{T_1^2}\ .$$

Le quantità T, T_1, a, a_1 si determinano colle osservazioni e coi calcoli astronomici: determinate poi per tal modo quelle quantità, per mezzo dell'ultima formola ci si renderà noto il rapporto tra le masse dei diversi pianeti e la massa del sole.

Presa per unità la massa solare, le osservazioni e i calcoli più recenti danno prossimamente $\frac{1}{1048}$ per la massa di Giove, $\frac{1}{3502}$ per quella di Saturno, ed $\frac{1}{24905}$ per la massa di Urano (Ved. *The American Ephemeris, and nautical Almanac, for the year* 1855. *Appendix*. Washington 1852).

349. Il metodo che abbiamo ora esposto, non può servire alla determinazione della massa relativa della terra, la quale ha un solo satellite che è la luna: ma poichè già conosciamo la forza acceleratrice g, colla quale i corpi situati presso la superficie terrestre sono attirati verso il centro della medesima terra; perciò possiamo con un metodo tutto speciale trovare il rapporto tra la massa terrestre e la massa del sole presa per unità. Questo metodo speciale è il seguente.

Considerando la terra come una sfera omogenea nei singoli strati concentrici, e chiamando r il suo raggio ed m la massa, abbiamo (344) l'espressione dell'accelerazione $g = \frac{km}{r^2}$: in questa formola la quantità k è sempre l'attrazione scambievole di due masse unità all'unità di distanza; e il suo valore $\frac{gr^2}{m}$, sostituito che sia nella eqazione (1) del numero (347) applicata al movimento della terra intorno al sole, ci darà

$$M + m = \frac{4m\pi^2}{gr^2} \frac{a^3}{T^2} .$$

Omessa nel primo membro la massa m in confronto della massa solare M, e fatta la stessa M uguale all'unità, avremo

$$m = \frac{gr^2}{4\pi^2} \frac{T^2}{a^3} .$$

I valori già cogniti $g = 9^m, 8034$; $\pi = 3,1416$; $r = 6366739^m$; $T = 365^g$, $256374 = (365'', 256374)$ 86400 ; $a = 24000r$, ci porgono per risultato $m = \frac{1}{355886}$: adoperandosi valori più esatti, si avrebbe $m = \frac{1}{354936}$. (Ved. le Effemeridi cit.).

350. Di qui si ricavano tre conseguenze utili a sapersi. **La** prima che *la densità media della terra è circa quattro volte maggiore di quella del sole*. Imperocchè essendo il raggio della sfera solare 112 volte più grande del raggio terrestre, se indichiamo con V e D il volume e la densità media del sole, il volume e la massa della terra varranno rispettivamente $\frac{1}{(112)^3}$ V, $\frac{1}{354936}$ M: ora la densità si esprime col rapporto tra la massa e il volume; dunque la densità media della terra sarà $= \frac{(112)^3}{354936} \cdot \frac{M}{V}$ $= 3,958D$.

La seconda conseguenza si è che *la gravità alla superficie del sole è superiore di 28 volte a quella che ha luogo alla superficie della terra.* Siena G, g le forze acceleratrici che misurano rispettivamente la gravità presso la superficie del sole e della terra; ed R, r sieno i rispettivi raggi del globo solare e del globo terrestre. Quelle forze, siccome richiede la legge della gravitazione universale, sono tra loro in ragione diretta dalle masse attraenti M e m, ed inversa del quadrato delle distanze R e r dai rispettivi centri: perciò avremo $G = \frac{Mr^2}{mR^2} g$; la quale espressione, per motivo dei valori $M = 354936m$ ed $R = 112r$, si riduce all'altra $G = \frac{354936}{(112)^2} g = 28,295\, g$.

Quinci procede la terza conseguenza, vale a dire che *un corpo abbandonato a sè stesso presso la superficie della sole percorrerebbe nel primo minuto secondo della sua caduta da* 138 *a* 139 *metri.* Infatti chiamando x lo spazio che si cerca, abbiamo (269. 274) per la sua espressione

$$x = \frac{1}{2} G = \frac{28,295}{2} g = \frac{28,295}{2} \times 9^m,8034 = 138^m,694 .$$

351. Quanto ai pianeti che sono privi di ogni satellite, per determinarne le masse relativamente a quella del sole, conviene ricorrere alle perturbazioni che soffrono i movimenti di ciascuno intorno al sole per l' azione attrattiva degli altri pianeti. Praticando un metodo che si appoggia sopra queste perturbazioni e viene esposto nei trattati di Meccanica celeste o di Astronomia, e prendendo per unità la massa del sole, hanno trovato gli Astronomi i rapporti $\frac{1}{4865751}$ per la massa di Mercurio, $\frac{1}{390000}$ per quella di Venere, $\frac{1}{2680637}$ per Marte, $\frac{1}{18780}$ per Nettuno (Ved. Effem. cit.).

352. Ma quello che più importa si è di potere esprimere a numeri relativi alle misure comuni o già note le masse dei corpi celesti, il cui rapporto a quella del sole abbiamo trovato più innanzi: questo lo potremo ottenere assai facilmente, se si sia determinata prossimamente la massa o la densità della terra, facendo uso delle stesse misure comuni. Ora la densità media della terra è già stata determinata con diversi metodi: noi ne indicheremo qui uno che consiste nel calcolarla mediante l'aberrazione del pendolo dalla verticale, per l'attrazione che risente da una grande montagna presso alla quale è collocato, oppure da un altro corpo p. es. sferico di massa determinata e posto a una data distanza dal pendolo medesimo.

Sia A (fig. 158.a) il centro di una piccola palla sospesa a un filo, che non si possa nè distendere nè piegare; sia $CA = a$ la posizione del pendolo fuori della verticale CD in forza dell'attrazione che esercita sopra di lui una grossa sfera omogenea, la quale abbia il suo centro in B nel piano orizzontale che passa per A: rappresentiamo con θ l'angolo ACD che è l'aberrazione del pendolo, con b la distanza tra i due centri A e B, con m la massa della piccola palla attratta, con μ' ed r' la densità e il raggio della sfera attraente, con μ ed r la densità media e il raggio della terra. Le masse della sfera e della terra si esprimono rispettivamente con $\frac{4}{3}\pi\mu' r'^3$, $\frac{4}{3}\pi\mu r^3$: perciò rappresentando con k il coefficiente dell'attrazione universale, le rispettive forze motrici colle quali la sfera e la terra traggono a sè la piccola palla A del pendolo, sono

$$\frac{4}{3}\pi km\frac{\mu' r'^3}{b^2} \quad , \quad \frac{4}{3}\pi km\mu r .$$

Una di coteste due forze è diretta nel senso dell'orizzontale AB, e l'altra nel senso della verticale AF; perciò le distanze del punto fisso C dalle loro direzioni, sono $CE = a\cos\theta$, $AE = a\,\text{sen}\,\theta$. Moltiplicando queste due distanze per le forze corrispondenti, avremo che i momenti di queste forze relativamente al punto A,

momenti che per l'equilibrio in cui si trova il pendolo debbono riuscire uguali, daranno l'equazione

$$\frac{\mu' r'^3}{b^2}\cos\theta = \mu r \operatorname{sen}\theta \ , \quad \mu = \frac{\mu' r'^3}{r b^2}\ \frac{1}{\operatorname{tang}\theta}\ .$$

Osservato che sia l'angolo θ, angolo naturalmente assai piccolo, e determinatone il più esattamente che si può il valore numerico; mediante l'equazione qui sopra si calcola la densità μ della terra, poi la massa terrestre $\frac{4}{3}\pi\mu r^3$, e finalmente la massa degli altri pianeti e del sole.

La densità media della terra, calcolata, come abbiamo detto, dall'aberrazione del pendolo, è da quattro a cinque volte più grande di quella dell'acqua: da altre sperienze si ha che la densità media della terra è a quella dell'acqua, come 5,67 a 1.

Ma torniamo al movimento dei pianeti, e cerchiamo di determinare la posizione di essi nella orbita loro propria.

353. **Problema di Keplero sopra il moto ellittico dei pianeti intorno al sole.** È detto problema di Keplero quello in cui è proposta a determinare la posizione di un pianeta nella propria sua orbita per un dato istante qualunque di tempo. A questo oggetto, sia PBP′ l'ellisse (fig. 159.a) che un pianeta M descrive col suo moto intorno al sole S collocato in uno dei fochi della curva: il punto P è detto *perielio*, cioè il punto dell'orbita ellittica più vicino al centro del sole; il punto P′ è l'*afelio*, cioè il più lontano. Sia $CP = a$ il semi-asse trasverso, ed e l'eccentricità: computando il movimento del pianeta a partire dal perielio, per risolvere il problema dobbiamo trovare le coordinate polari $\rho = SM$ ed $\omega = MSP$ del pianeta alla fine di un dato tempo qualunque t.

Le aree descritte dal raggio vettore nel tempo periodico T e nel tempuscolo infinitesimo dt, sono rispettivamente (XCIV, XCV) $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$ ed $\frac{1}{2}\rho^2\, d\omega$: quindi per la prima legge di Keplero si ha

$$\frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T} = \frac{\rho^2 d\omega}{2\,dt} \;;$$

e posto $\frac{2\pi}{T} = n$, si deduce

$$n\,dt = \frac{\rho^2 d\omega}{a^2\sqrt{1-e^2}} \;.$$

Ma dall'equazione polare $\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega}$ della ellisse descritta dal pianeta si ricava $\omega = \text{arc}\left(\cos = \frac{a(1-e^2)-\rho}{e\rho}\right)$; perciò (LIV, LVIII) avremo

$$d\omega = \frac{a(1-e^2)\,d\rho}{e\rho^2\sqrt{1-\left[\frac{a(1-e^2)-\rho}{e\rho}\right]^2}}$$

$$= \frac{a(1-e^2)\,d\rho}{\rho\sqrt{e^2\rho^2 - a^2(1-e^2)^2 + 2a\rho(1-e^2) - \rho^2}}$$

$$= \frac{a(1-e^2)\,d\rho}{\rho\sqrt{1-e^2}\sqrt{-\rho^2 - a^2(1-e^2) + 2a\rho}} = \frac{a\sqrt{1-e^2}\,d\rho}{\rho\sqrt{a^2e^2-(\rho-a)^2}} \,,$$

e conseguentemente

$$n\,dt = \frac{\rho\,d\rho}{a\sqrt{a^2e^2-(\rho-a)^2}} \;.$$

Qui è da avvertire che dovendosi integrare questa equazione, il raggio vettore ρ è compreso dentro i limiti $a(1-e)$ ed $a(1+e)$ i quali rappresentano il minimo e il massimo valore di esso raggio,

come apparisce dalla stessa equazione polare della ellisse: perciò rappresentando con u un cotal angolo variabile, potremo porre la relazione

$$(s') \qquad \rho = a(1 - e\cos u) .$$

Ora se nell'equazione stabilita innanzi si sostituisca questo valore di ρ e gli altri che se ne deducono, e sono

$$d\rho = ae \operatorname{sen} u \, du \ , \ (\rho - a)^2 = a^2 e^2 \cos^2 u = a^2 e^2 (1 - \operatorname{sen}^2 u) \ ,$$

otterremo l'altra

$$n\, dt = (1 - e\cos u)\, du$$

il cui integrale è

$$(s'') \qquad nt = u - e \operatorname{sen} u \ ,$$

dove non apparisce alcuna costante, per la ragione che a $t = 0$ corrisponde il più piccolo valore $\rho = a(1 - e)$ del raggio vettore, e conseguentemenfe corrisponde anche il valore $u = 0$.

Oltre a ciò, pe' due valori ρ cavati dall' equazione dell'orbita e dalla formola (s') abbiamo

$$1 - e\cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e\cos\omega} \ , \text{ ossia } \cos\omega = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u} \ :$$

quindi deduciamo

$$1 - \cos\omega = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{1 - e\cos u} \ , \ 1 + \cos\omega = \frac{(1-e)(1+\cos u)}{1 - e\cos u} \ ;$$

e conseguentemente

$$\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}=\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-\cos u}{1+\cos u},$$

ossia

$$(s''')\qquad \tang\frac{1}{2}\omega=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang\frac{1}{2}u.$$

Ed ecco risoluto il problema: infatti quando sieno dati a, e ed n, dalla formola (s'') si ricava primieramente il valore dell'angolo u per un tempo qualunque t; poi colle formole (s') ed (s''') si calcolano le coordinate ρ ed ω, le quali determinano la precisa posizione del pianeta nella sua orbita. Tutto dunque si riduce nella soluzione del problema a trovare dalla equazione (s'') il valore della quantità ausiliare u, da sostituirsi poi nelle altre due formole; e un tal valore si trova comunemente, in funzione del tempo t, per mezzo di una serie che è dovuta a Lagrange: noi lasciando lo sviluppo di questa funzione agli Astronomi, ci contenteremo di risolvere qui lo stesso problema per approssimazione e indipendentemente dall'angolo u, rispetto a que' pianeti che si muovono in ellissi di eccentricità assai piccola.

354. Si sa che le orbite ellittiche di alcuni pianeti hanno una eccentricità così piccola, che senza errore sensibile se ne possono trascurare le potenze più alte della prima. Per cosiffatti pianeti le coordinate polari ρ ed ω si ottengono per mezzo di formole molto più semplici, e senza aver ricorso all'angolo ausiliare u.

E primieramente per ciò che spetta alla coordinata ω, l'equazione $n\,dt=\frac{\rho^2 d\omega}{a^2\sqrt{1-e^2}}$ che è fondata sul principio delle aree, trascurando in essa la quantità e^2, si riduce a essere

$$n\,dt=\frac{\rho^2 d\omega}{a^2};$$

l'equazione poi $\rho = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega}$ della curva ellittica per la medesima cagione somministra

$$\rho^2 = \frac{a^2}{1+2e\cos\omega} = a^2\,(1-2e\cos\omega):$$

avremo dunque

$$n\,dt = (1-2e\cos\omega)\,d\omega\,.$$

Poichè in questa equazione le variabili t ed ω svaniscono simultaneamente per ipotesi, perciò presi gli integrali avremo

$$nt = \omega - 2e\,\text{sen}\,\omega\,,$$

e conseguentemente

$$\omega = nt + 2e\,\text{sen}\,\omega = nt + 2e\,\text{sen}(nt + 2e\,\text{sen}\,\omega)\,.$$

Ora ponendo mente alle serie nelle quali si sviluppano (LVIII) i coseni e i seni degli archi, abbiamo

$$\text{sen}(nt + 2e\,\text{sen}\,\omega) = \text{sen}\,nt\cos(2e\,\text{sen}\,\omega) + \cos nt\,\text{sen}(2e\,\text{sen}\,\omega)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\,4e^2\text{sen}^2\omega + \ldots\right)\text{sen}\,nt$$

$$+ \left(2e\,\text{sen}\,\omega - \frac{1}{2.3}\,8e^3\,\text{sen}^3\,\omega + \ldots\right)\cos nt\;:$$

trascurando dunque quei termini nei quali s'incontrano i fattori e^2, e^3, . . . , otterremo finalmente

$$(s^{\text{IV}}) \qquad \omega = nt + 2e\,\text{sen}\,nt.$$

Venendo adesso a determinare il valore dell' altra coordinata ρ,

riprendiamo l'equazione della curva ellittica; e trascurando in questa la potenza e^2, scriviamola come segue

$$\rho = \frac{a}{1+e\cos\omega} = a(1-e\cos\omega)\,.$$

Sostituendo in questa il valore di ω quale è dato dalla formola (s^{IV}), avremo

$$\rho = a\,[\,1 - e\cos(nt + 2e\,\mathrm{sen}\,nt)]\,:$$

ma lo sviluppo in serie che abbiamo detto poc'anzi, somministra

$$\cos(nt+2e\,\mathrm{sen}\,nt) = \cos nt\cos(2e\,\mathrm{sen}\,nt) - \mathrm{sen}\,nt\,\mathrm{sen}(2e\,\mathrm{sen}\,nt)$$

$$= (1 - \frac{1}{2}\,4e^2\,\mathrm{sen}^2 nt + ..)\cos nt$$

$$-\,(2e\,\mathrm{sen}\,nt - \frac{1}{2.3}\,8e^3\,\mathrm{sen}^3 nt + ...)\,\mathrm{sen}\,nt\,;$$

dunque finalmente

$$(s^{V}) \qquad \rho = a(1 - e\cos nt)\,.$$

Sono (s^{IV}) ed (s^{V}) le formole più semplici per mezzo delle quali si determina prossimamente la posizione di un pianeta nella sua orbita per un tempo qualunque t, e nell'ipotesi che l'eccentricità dell'orbita sia molto piccola.

355. L'angolo ω è detto dagli Astronomi l'*anomalia vera*, l'angolo nt l'*anomalia media* ossia il *movimento medio* del pianeta, l'angolo ausiliare u l'*anomalia eccentrica:* la differenza poi tra la vera e la media anomalia, cioè l'espressione $\omega - nt$, è chiamata l'*equazione del centro*.

Adesso per rappresentarci graficamente questi angoli sulla figura 159.ª, fatto centro in C e con un raggio $CP = a$ tracciamo il circolo PB'P': poi immaginiamo che un pianeta fittizio M'

talmente percorra con moto uniforme ed equabile la circonferenza PB'P' da compiere le suè rivoluzioni circolari nel tempo periodico T, come l'altro con movimento or più lento or più celere compie le sue rivoluzioni ellittiche; poniamo di più che i due pianeti reale e fittizio partano insieme dal perielio P, e tornino contemporaneamente a questo punto. La quantità $n = \frac{2\pi}{T}$ è evidentemente l'angolo che nell'unità di tempo descrive il pianeta fittizio M'; perciò l'anomalia media nt rappresenterà l'angolo PCM' che il pianeta fittizio descrive nel tempo t, mentre nello stesso tempo il pianeta vero descrive intorno al sole l'angolo ω = PSM.

Oltre a ciò, siccome il pianeta vero impiega un tempo uguale a percorrere i due semiperimetri ellittici superiore e inferiore, così esso si troverà contemporaneamente col pianeta fittizio al punto P' dell'afelio. Nel semiperimetro di sopra la velocità del pianeta M va continuamente diminuendo (317 *in fine*), e il suo movimento è ritardato; perciò dal perielio all'afelio il pianeta vero precede il fittizio di una certa quantità angolare: viceversa nel semiperimetro di sotto, cioè dall'afelio al perielio dove cresce continuamente la velocità del pianeta vero e il suo movimento è accelerato, il pianeta fittizio precederà il pianeta vero. La quantità angolare della quale il pianeta vero precede ovvero segue il fittizio, quantità che si ottiene colla differenza $\omega - nt$, e che è detta equazione del centro, è rappresentata sulla figura dall'angolo COS ossia MOM': per ottenere l'anomalia vera del pianeta, conviene aggiungere questo angolo alla sua anomalia media. La medesima differenza o equazione del centro riesce positiva dal perielio all'afelio; negativa dall'afelio al perielio; riesce poi nulla nei punti del perielio e dell'afelio, che sono detti gli *apsidi*.

Da ultimo, se dal punto M dove si trova il pianeta vero sulla sua orbita ellittica, caliamo la perpendicolare MK sopra l'asse trasverso PP', e la produciamo al di sopra fino a raggiungere in N la periferia del circolo; l'angolo NCP formato dal raggio

CN con CP, rappresenta sulla figura l'anomalia eccentrica u. Infatti sussiste (XIV)

$$\cos NCP = \frac{CS + SK}{CN} = \frac{CS + SM \cos MSP}{CP} = \frac{ae + \rho \cos \omega}{a} \;;$$

e siccome l'equazione $\rho = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega}$ dell'orbita ellittica del pianeta somministra $\rho \cos\omega = \dfrac{a - ae^2 - \rho}{e}$, l'espressione di quel coseno si ridurrà a quest' altra

$$\cos NCP = \frac{a-\rho}{ae} \;:$$

ma in forza dell'equazione (s'.353) vale anche

$$\cos u = \frac{a-\rho}{ae} \;;$$

dunque l'angolo NCP rappresenta l'anomalia eccentrica u, la quale insieme coll'anomalia vera ω passa pei valori 0, π, 2π.

CAPO IX.

MOVIMENTO DI UN PUNTO MATERIALE SOPRA UNA CURVA O UNA SUPERFICIE FISSA.

356. **Equazioni differenziali del moto di un punto materiale su di una curva o di una superficie fissa.** Abbiamo trattato finora del moto rettilineo o curvilineo di un punto libero: è omai tempo di considerare in generale il movimento impedito, quello cioè di un punto materiale che sia costretto a muoversi su di una curva o di una superficie fissa. A questo effetto prendiamo per unità la massa del punto materiale, e supponiamo nullo

l'attrito: di tal guisa la forza acceleratrice sarà la stessa che la forza motrice; e la curva o la superficie fissa, nella quale il punto materialo è costretto a restare, produrrà soltanto una reazione normale, ugualo e contraria alla pressione che sostiene per l'azione del mobile.

Denotiamo con X, Y, Z le componenti della forza secondo i tre assi ortogonali OX, OY, OZ; con P la pressione normale, che il mobile esercita del continuo contro la curva o la superficie fissa; e con α, β, γ gli angoli, che dalla parte positiva fa la direzione della medesima pressione coi detti assi. Il punto materiale può considerarsi come libero, se oltre alla forza data si applichi ad esso in ogni istante la forza variabile $-$ P, che rappresenta la reazione della curva o della superficie; se cioè rimossa questa curva o superficie, in ciascun punto (x, y, z) alle forze X, Y, Z si aggiungano le forze $-\mathrm{P}\cos\alpha$, $-\mathrm{P}\cos\beta$, $-\mathrm{P}\cos\gamma$, che sono le componenti della reazione o resistenza parallelamente agli assi coordinati: adunque attese le formole (p) del numero (297), le quali appartengono al movimento di un punto affatto libero; le equazioni differenziali relative al moto di un punto materiale che è assoggettato a rimanere in una curva o superficie fissa, saranno queste

$$(t)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} - \mathrm{P}\cos\alpha\,, \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} - \mathrm{P}\cos\beta\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z} - \mathrm{P}\cos\gamma\,. \end{array} \right.$$

357. Se il punto materiale si muove in una data superficie che abbia per equazione $f(x, y, z) = 0$, la pressione P si eserciterà sempre secondo la normale, ossia secondo la retta perpendicolare al piano tangente nel punto (x, y, z) della superficie; e perciò i coseni degli angoli α, β, γ nello equazioni (t) si esprimeranno (72) colle tre formole

$$\cos\alpha = \frac{\frac{df}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{df}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}}.$$

Sostituendo questi valori nelle formole (t), ed eliminando quindi dalle medesime formole la quantità P, otterremo fra le quattro variabili x, y, z, t due equazioni; le quali, congiunte colla equazione della superficie fissa $f(x, y, z) = 0$, serviranno a determinare le coordinate del mobile in funzione del tempo, quando sieno date le forze componenti X, Y, Z: dalle espressioni delle tre coordinate in funzione del tempo t si dedurranno le altre circostanze del movimento, e in ispecie per la eliminazione del t si verrà a conoscere la natura della traiettoria percorsa dal mobile sopra la data superficie; ultimamente con una opportuna combinazione delle sopraddette formole (t), se ciò occorra, potrà anche trovarsi la intensità della pressione P nel punto (x, y, z), come in particolare mostreremo con un esempio alla fine del presente capo.

Se poi il punto materiale si muove in una curva fissa, rappresentata dalle equazioni $x = f(z)$ ed $y = \varphi(z)$, allora la pressione P sarà comunque diretta nel piano normale, vale a dire nel piano che passa per il punto (x, y, z) ed è perpendicolare alla tangente della curva in quel punto. Quindi essendo $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$

i coseni degli angoli che nel detto punto fa la tangente rispettivamente coi tre assi rettangolari, si avrà (31. 3.°) l'equazione

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0 \ ;$$

e a questa converrà anche aggiungere la relazione

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \ ,$$

la quale esiste (31. 1.°) tra gli angoli che coi medesimi assi forma la direzione della pressione P. Di tal modo tra le otto quantità variabili x, y, z, α, β, γ, P, t, si hanno sette equazioni, cioè le tre equazioni (t), le due che appartengono alla curva percorsa, e le due che abbiamo notato ultimamente: si potranno dunque le prime sette quantità esprimere in funzione dell'ottava, ossia del tempo t; e quando le espressioni di quelle prime quantità sieno trovate, si verrà facilmente alla determinazione di tutto ciò che si riferisce al movimento del punto materiale sopra la curva fissa. E noteremo altresì che nel moto impedito di un punto materiale per una curva, come nel moto libero (296), vale per le stesse ragioni la relazione $v = \frac{ds}{dt}$ tra la velocità e gl'incrementi dell'arco percorso e del tempo.

Ma nel caso di una curva fissa, per determinare il movimento del punto materiale, giova non poco in alcune circostanze il ridurre le tre formole (t) ad una formola sola e indipendente dalla resistenza della medesima curva; la qual cosa vogliamo ora eseguire rispetto a un mobile, il quale debba sempre rimanere sopra una curva piana.

358. **Moto di un punto materiale sopra una curva fissa e piana.** Prendiamo gli assi OX, OY nel piano della curva, e rappresentiamo con s un arco della medesima: le componenti della forza che deve essere diretta nel detto piano, si riducono alle due X ed Y; e si avranno due sole equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X} - \mathrm{P}\cos\alpha \ , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y} - \mathrm{P}\cos\beta \ .$$

Moltiplichiamo la prima equazione per $\frac{dx}{ds}$, la seconda per $\frac{dy}{ds}$; ed aggiungiamole quindi l'una all'altra: ne verrà la formola

$$\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y}{ds\,dt^2}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}-P\left(\frac{dx}{ds}\cos\alpha+\frac{dy}{ds}\cos\beta\right).$$

La direzione della forza P è perpendicolare alla tangente nel punto (x, y); e perciò (31. 3.°), essendo $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ i coseni degli angoli che fa cogli assi la medesima tangente, si ha la condizione

$$\frac{dx}{ds}\cos\alpha+\frac{dy}{ds}\cos\beta=0:$$

di più (296) l'equazione identica $dx^2+dy^2=ds^2$, differenziata che sia rispetto alla variabile t, e divisa per $2ds$, ci dà la relazione

$$\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y}{ds\,dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Dunque la formola che abbiamo ottenuto poc'anzi, si riduce a questa

$$\frac{d^2s}{dt^2}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}:$$

e siccome i due termini del secondo membro rappresentano le componenti delle forze X ed Y secondo la tangente, e uniti insieme esprimono la componente di tutta la forza acceleratrice o motrice secondo la medesima tangente; così chiamando T una tale componente, potremo determinare il moto del punto materiale sulla curva piana e fissa colla sola equazione

$$(t')\qquad \frac{d^2s}{dt^2}=X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}=T.$$

359. Da questa equazione possiamo dedurre con molta facilità quelle due verità, che si sono già dimostrate direttamente nei numeri (290 e 291): ciò sono 1.° che *un punto materiale sollecitato dalla sola forza di gravità, sia che discenda sia ancora che ascenda per un dato arco di curva verticale, avrà in fine quella stessa velocità da cui sarebbe animato scendendo o montando verticalmente per l'altezza dell'arco percorso*; 2.° che *un punto materiale, quando non sia sollecitato da forza continua, oppure sia soggetto all'azione di una forza costantemente normale alla curva sulla quale è costretto di restare, conserverà sempre la velocità iniziale e procederà per la curva fissa con moto uniforme.*

Quanto alla prima proposizione, l'asse OX si supponga verticale e diretto al basso nel senso della gravità, e siene v_0 ed x_0 la velocità e l'ascissa iniziale del mobile, v ed x la velocità e l'ascissa alla fine dell'arco s: si avranno i valori $X = g$, $Y = 0$; e però la formola (t') ne porge

$$\frac{ds}{dt} d \frac{ds}{dt} \; (= v\,dv) = g\,dx\,.$$

Presi gli integrali, e determinando la costante per le condizioni dello stato iniziale, otterremo

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2g(x - x_0):$$

ora se chiamisi h l'altezza dell'arco percorso dal mobile sopra la curva, per la discesa o per la salita si ha $x - x_0 = \pm h$; sarà dunque $v = \sqrt{v_0^{\,2} \pm 2gh}$, e questa è pure (269. m^{IV} ed m^{V}) la velocità propria di un grave dopo la discesa o la salita verticale per l'altezza h dell'arco.

Quanto poi alla seconda proposizione, in ambedue le condizioni espresse nella medesima, la componente tangenziale T è nulla; e però avendosi $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, ossia $d\frac{ds}{dt} = 0 = dv$, sarà necessaria-

mente la velocità v uguale a una costante, cioè uguale alla stessa velocità iniziale v_0.

360. Ritorniamo alla formola generale del moto per una curva fissa in un piano, e consideriamo il caso in cui la forza acceleratrice φ è diretta costantemente a un punto o centro stabile O (fig. 160.ª). In tal caso si prenda MM' uguale all'elemento infinitesimo ds, e col raggio $OM = r$ si descriva l'arco circolare MM'', che è infinitamente piccolo ed ha il centro nello stesso punto O: si avrà $M'M'' = dr$, $MM''M' = 90°$; l'angolo poi TMO' che forma il prolungamento del raggio vettore colla tangente, sarà il complemento dell'altro angolo M'MM''. Quindi risolvendo la forza φ in due, una secondo la tangente MT e l'altra secondo la normale MN, ovvero giusta i prolungamenti dell'una e dell'altra retta, per la espressione della prima componente avremo evidentemente

$$T = \pm \varphi \cos TMO' = \pm \varphi \,\mathrm{sen}\, M'MM'' = \pm \varphi \frac{dr}{ds} :$$

in questa espressione il segno superiore compete a una forza ripulsiva, e il segno inferiore a una forza attrattiva; per conseguente nell'una o nell'altra condizione della forza centrale, l'equazione (t'. 358) del movimento di un punto per una curva fissa e piana, si trasforma in quest'altra

$$(t'') \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \pm \varphi \frac{dr}{ds}.$$

361. **Pressione esercitata sulla curva.** Nel punto (x, y) sia N la componente normale della forza acceleratrice, o motrice, r il raggio di curvatura, v la velocità del mobile. Può questo considerarsi come libero, quando in luogo della curva fissa si sostituisca la sua reazione normale $-$ P, e si aggiunga alla forza che sollecita d'altronde il punto materiale: di tal modo la forza centripeta o la componente normale di tutta la forza che agisce sul mobile considerato come libero, sarà N $-$ P; e conforme

alla seconda equazione (p'' . 299) del movimento libero, si avrà

$$N-P=\frac{v^2}{r} \ , \quad \text{ossia} \quad P=N-\frac{v^2}{r} \ .$$

Conservando noi le altre indicazioni onde si è fatto uso nei numeri precedenti, i due prodotti $X\cos\alpha$ ed $Y\cos\beta$ rappresentano le componenti delle due forze X ed Y nella direzione della normale, e la loro somma equivale alla stessa forza N: ma se pel punto mobile M (fig. 161.ª) tiriamo la tangente della curva, e le due rette MX_1 ed MY_1 rispettivamente parallele agli assi, e se riguardiamo come positiva la pressione P quando si esercita p. es. sulla parte convessa della medesima curva, è chiaro che risultano i valori

$$\cos\alpha=\text{sen}\, TMX_1=\frac{dy}{ds} \ , \ \cos\beta=-\text{sen}\, TMY_1=-\frac{dx}{ds} \ ;$$

dunque la forza N equivale alla somma algebrica $X\frac{dy}{ds}-Y\frac{dx}{ds}$, e per determinare la pressione avremo la formola

$$(t''') \qquad P=X\frac{dy}{ds}-Y\frac{dx}{ds}-\frac{v^2}{r}=N-\frac{v^2}{r} \ .$$

In questa formola la forza, o il binomio equivalente, deve avere lo stesso segno o un segno opposto a quello della forza $-\frac{v^2}{r}$, secondo che le due forze sono dirette in un medesimo verso oppure in versi contrarii: di più la forza N esprime quella parte di pressione, che è dovuta alla forza applicata ed avrebbe luogo sulla curva anche nel caso che il mobile vi dimorasse allo stato di equilibrio; la forza poi $-\frac{v^2}{r}$, contraria alla forza centripeta, distinguesi col nome opposto di *forza centrifuga*, e rappresenta quell'altra parte di pressione che nasce dall'inerzia del punto

materiale e dipende unicamente dal trovarsi il medesimo alla condizione di moto, come dichiareremo meglio nel numero che segue.

362. **Forza centrifuga.** In una posizione qualunque M (fig. 162.ª) sia v la velocità di un punto materiale che si muove sopra la curva CMC'. Facendo astrazione da tutte le altre forze, se il punto materiale fosse libero, a cagione della sua inerzia seguiterebbe a muoversi equabilmente colla stessa velocità v per la tangente MT, che è il prolungamento dell'ultimo lato percorso sulla curva; ma siccome il mobile è costretto a rimanere sopra la curva, così sarà di mestieri che la velocità concepita si decomponga in due, una nella direzione del lato susseguente MM', e l'altra secondo la retta MN perpendicolare al medesimo lato dalla parte a cui è rivolta la convessità della curva: la prima componente della velocità produrrà il moto nel punto materiale, e lo spingerà sopra la curva per il nuovo elemento infinitesimo MM'; la seconda componente poi nella direzione della normale o del raggio osculatore resterà distrutta dalla resistenza della curva, e così il mobile con una forza corrispondente a questa velocità distrutta tenderà ad allontanarsi dal centro di curvatura, esercitando una pressione contro la curva medesima. Cotesta azione o pressione che esercita continuamente il punto materiale contro la curva fissa, è ciò che dicesi forza centrifuga.

Adunque *col nome di forza centrifuga s'intende la pressione esercitata da un punto materiale sopra quella linea che movendosi è costretto a descrivere, pressione la quale nasce dall'inerzia del mobile e dipende unicamente dalla sua velocità attuale.* È bene che troviamo qui direttamente con Ugenio (Huyghens) l'espressione della forza centrifuga sì nel circolo, come in un'altra curva qualunque.

363. **Espressione della forza centrifuga.** Un punto materiale si muova in virtù della sola velocità v che gli è impressa istantaneamente, e sia assoggettato a rimanere nella periferia di un circolo che ha per raggio la retta a: la velocità del mobile sopra la curva resterà costante (291. 359), e il suo moto sarà

uniforme. Supponiamo che il mobile alla fine del tempo t si trovi nel punto M (fig. 163.ª), e che nel tempuscolo susseguente dt percorra l'arco infinitesimo $MM' = ds$: condotta la tangente MT, menata la perpendicolare M'N sopra il raggio CM, e prolungato l'altro raggio CM' fino all'incontro della tangente in D, il quadrilatero MDM'N si potrà considerare come un parallelogrammo; perciò i due lati MD ed MN sono gli spazii che dal mobile verrebbero rispettivamente descritti nel tempo dt in virtù della velocità impressa, e della forza centripeta che si sviluppa nel moto impedito in opposizione e con intensità uguale alla forza centrifuga: sarà quindi la retta M'D la quantità onde il mobile si allontanerebbe dalla curva circolare nel tempuscolo dt, se fosse libero; ossia quella medesima retta sarà lo spazio, che nello stesso tempo infinitesimo si percorrerebbe dal mobile in virtù della sola forza centrifuga. Ora questa forza, durante un tempo infinitesimo, può prendersi come costante non solo nella direzione, ma anche in grandezza; e d'altronde (269. m''') lo spazio rettilineo, percorso in un dato tempo in virtù di una forza costante, si esprime per la metà dell'accelerazione nel quadrato del tempo: dunque chiamando f la forza centrifuga nel circolo relativamente all'unità di massa, ossia l'accelerazione dovuta alla stessa forza, avremo

$$DM' = \frac{1}{2} f\, dt^2 , \; f = \frac{2DM'}{dt^2} .$$

Ma nel circolo essendo la tangente MD media proporzionale tra la secante $2a + DM'$ e il segmento esterno DM', si ha la relazione

$$DM' = \frac{\overline{MD}^2}{2a + DM'} , \text{ ed anche il valore } DM' = \frac{ds^2}{2a} \;;$$ giacchè attesa la grande piccolezza dell'arco ds, si può prendere quest'arco invece della tangente MD, e trascurare il segmento DM' a fronte del diametro $2a$: dunque la forza centrifuga nel circolo si esprimerà col rapporto tra il quadrato della velocità e il raggio, e quanto al valore numerico si avrà

$$f = \frac{ds^2}{a\,dt^2} = \frac{v^2}{a} .$$

Veniamo adesso alla espressione della forza centrifuga in un'altra curva qualunque. Sia v la velocità del mobile, ed r il raggio del circolo osculatore in un punto M della curva: nelle vicinanze di questo punto il mobile scorre per la curva e si muove allo stesso modo, come se colla velocità concepita v descrivesse la periferia del circolo osculatore, col quale la data curva ha comune l'arco infinitamente piccolo MM'; per conseguenza la forza centrifuga nel detto punto della curva fissa sarà quella medesima che si sviluppa sul circolo osculatore corrispondente, cioè $f = \frac{v^2}{r}$. Quindi si conchiude che *la forza centrifuga in qualunque punto della curva è uguale al quadrato della velocità attuale del mobile, diviso pel raggio di curvatura.* Se la massa del punto materiale che si muove in una curva fissa, non si prendesse per unità come abbiamo fatto ma fosse m, la forza centrifuga sarebbe naturalmente $\frac{mv^2}{r}$.

364. **Velocità angolare.** Per applicare l'espressione della forza centrifuga a qualche esempio, conviene dir prima che cosa s'intenda col nome di velocità angolare. Figuriamoci un sistema rigido o un corpo solido, il quale si rivolga e giri intorno a un asse fisso: in questo movimento di rotazione ciascun punto del sistema descrive una periferia circolare, il cui piano è perpendicolare all'asse e il centro si trova sul medesimo asse di rotazione; gli archi poi descritti dai singoli punti in uno stesso intervallo di tempo, sono tutti simili fra loro.

Il moto di rotazione può essere uniforme o vario. Se è uniforme, allora si chiama *velocità angolare del sistema* la velocità assoluta dei punti che sono all'unità di distanza dall'asse immobile; la velocità poi di questi punti è misurata dall'angolo, o dall'arco che percorrono nell'unità di tempo. Nel medesimo movimento la velocità che hanno i diversi punti del sistema, sono tra loro come gli archi

descritti in uno stesso intervallo di tempo; e poichè questi archi sono simili e stanno come i raggi corrispondenti o le rispettive distanze dei punti dall'asse di rotazione, perciò le velocità prenominate saranno proporzionali alle distanze dei medesimi punti dall'asse: onde chiamando ω, v le velocità di due punti rispettivamente situati all'unità di distanza e a una distanza qualunque r, avremo $v = r\omega$; e così conosciuta la velocità angolare del sistema, potremo sapere ancora la velocità assoluta dei punti, di cui sono date le distanze dall'asse di rotazione. — Se poi il moto del sistema intorno all'asse è vario, allora si dinoti colla lettera θ l'angolo, o l'arco percorso nel tempo t dai punti che sono posti all'unità di distanza dall'asse. L'arco infinitamente piccolo $d\theta$ si potrà risguardare come descritto con moto uniforme nel tempuscolo dt; e però la velocità preconcepita ω colla quale si percorre l'arco infinitesimo $d\theta$, sarà la velocità angolare del sistema alla fine del tempo t, e si esprimerà col rapporto $\frac{d\theta}{dt}$: onde la velocità di un punto che nel sistema si trovi alla distanza r dall'asse di rotazione, dovrà determinarsi colla formola

$$v = r\omega = r\frac{d\theta}{dt}.$$

Premesse queste nozioni intorno alla velocità angolare, veniamo a sciogliere due questioni relative alla forza centrifuga che si sviluppa nella rotazione di un dato sistema.

365. Ecco la prima questione: *dovendosi costruire un tratto di strada ferrata sopra un piano orizzontale e la cui traccia abbia una curvatura circolare di un dato raggio, si domanda di quanto debba essere più alta la guida esterna delle rotaie, acciocchè la risultante del peso di un carro e della forza centrifuga riesca perpendicolare al piano delle due guide.*

Supponiamo che la massa di uno qualunque dei carri sia distribuita simmetricamente al di qua e al di là di due sezioni in lungo e in largo, colle quali possiamo immaginare di aver diviso il carro in due parti uguali; cosicchè il suo centro B di gravità (fig.

164.ª) corrisponda sul punto di mezzo della strada tra le due guide. Ciò posto, sia m la massa del carro, $a = B'D'$ la larghezza della strada che si ha a costruire, r il raggio della curvatura computato dal punto di mezzo della via, v la velocità che ha il centro B in questo punto. Oltre a ciò, rappresentiamo colla verticale BC la forza motrice della gravità, colla orizzontale BE la forza centrifuga, e colla retta BD perpendicolare al piano B'D' la risultante delle due forze: cerchiamo l'altezza $C'D' = z$, che è la elevazione della guida al di sopra dell'orizzonte B'C', dove giace la guida interna.

I triangoli BCD, B'C'D' che hanno i lati mutuamente perpendicolari gli uni sugli altri, dànno la proporzione

$$BD : B'D' = CD : C'D',$$

e da questa si ha

$$z = C'D' = \frac{CD}{BD} B'D' = \frac{BE}{\sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{BE}^2}} a.$$

Ma sappiamo (363.259) che la forza centrifuga $BE = \frac{mv^2}{r}$, e che a forza motrice della gravità o il peso è $BC = mg$; avremo dunque pel valore dell'altezza cercata

$$z = \frac{amv^2}{r\sqrt{m^2g^2 + \frac{m^2v^4}{r^2}}} = \frac{av^2}{\sqrt{g^2r^2 + v^4}}.$$

366. L'altra questione è la seguente: *un regolatore a forza centrifuga* (fig. 165.ª) *consiste in due palle uguali fissate alla estremità di due aste* AB: *le due aste concorrono in un punto fisso* A, *e con altre due aste* CD *che fanno capo a un anello inferiore, formano un rombo situato in un piano verticale. Il rombo è articolato ai quattro vertici, e l'anello che è infilato dentro a un asse verticale*

scorre su e giù, quando tutto il sistema riceve un moto di rotazione, intorno all'asse predetto. Data che sia la velocità angolare, e la comune distanza delle due palle pesanti dal punto A, *si domanda quale è l'angolo che le due aste* AB *formano coll'asse di rotazione.*

Consideriamo le due palle come due punti pesanti e congiunti all'asse di rotazione per mezzo di due rette geometriche: quando il sistema si mette in rotazione attorno all'asse verticale AD, le due palle incominciano a scostarsi dall' asse, e l'angolo delle aste coll'asse cresce a poco a poco, fino a che la risultante BF del loro peso espresso da BH e della forza centrifuga espressa da BK non prenda per direzione il prolungamento delle aste AB. A questo punto, sia l la lunghezza delle aste AB, ω la velocità angolare del sistema, ed α l'angolo che quelle formano coll'asse: prolungata la retta orizzontale KB fino al suo incontro coll'asse in E, la velocità del punto B si esprimerà (364) con $v = \omega . \mathrm{BE} = \omega l \operatorname{sen} \alpha$.

Ciò posto, il triangolo rettangolo BFH ci somministra l'equazione

$$\operatorname{tang} \alpha = \operatorname{tang} \mathrm{FBH} = \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BH}} :$$

e rappresentando con m la massa della palla B, la forza centrifuga si esprime con

$$\mathrm{BK} = \frac{mv^2}{\mathrm{BE}} = \frac{m\omega^2 l^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{l \operatorname{sen} \alpha} = m\omega^2 l \operatorname{sen} \alpha ,$$

e il peso con $\mathrm{BH} = mg$. Sostituendo questi valori, otteniamo

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\omega^2 l \operatorname{sen} \alpha}{g} ;$$

da questa poi si deduce la formola $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}$, la quale dà il valore dell'angolo α che si voleva.

Il *regolatore a forza centrifuga* si applica bene alle macchine in movimento, sia per moderare opportunamente l'azione della forza motrice, sia per dare un indizio e un segnale a chi sorveglia la macccbina che il movimento di questa si è accelerato o rallentato. — Adesso retrocedendo con ordine sino al principio del capo, applichiamo le quattro formole qui stabilite alla soluzione di altrettanti problemi.

367. **Problema** I. *Supponiamo che dal vertice alto di un circolo verticale venga lanciato con una data velocità un punto pesante, che deve scorrere dentro la parte concava della periferia; oppure che collocato il punto sulla parte convessa del circolo in una data posizione, sia quivi lasciato in balìa del proprio peso: si cerca la pressione che il mobile esercita sulla curva circolare nella prima ipotesi, e nella seconda si domanda la posizione del punto dove il mobile abbandona la curva.*

Sia a il raggio del circolo, v_0 la velocità di proiezione nel primo caso, e θ l'angolo al centro descritto dal punto mobile: le componenti della forza acceleratrice o motrice nel senso della tangente e della normale alla curva sono rispettivamente $g \operatorname{sen} \theta$, $g \cos \theta$; al tempo stesso varrà la relazione $ds = a\, d\theta$. Integrando l'equazione (t'. 358), otteniamo primieramente

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = 2\int \mathrm{T}\, ds = 2ag\int \operatorname{sen} \theta\, d\theta = -2ag \cos \theta + \mathrm{C}\,;$$

poi determinando la costante pe' valori iniziali $v = v_0$, $\theta = 0°$, abbiamo

$$v^2 = v_0^2 + 2ag(1 - \cos \theta):$$

quindi relativamente all'unità di massa, dalla formola (t'''. 361) ricaviamo immediatamente la pressione

$$\mathrm{P} = g \cos \theta - \frac{v_0^2}{a} - 2g(1 - \cos \theta) = g(3 \cos \theta - 2) - \frac{v_0^2}{a}\ .$$

Se la velocità di proiezione è tale, che al principio del moto non vi sia pressione contro la curva, allora si ha $v_0^2 = ag$, e conseguentemente

$$P = 3g(\cos\theta - 1);$$

nel punto poi più basso della curva, essendo $\theta = 180°$, il valore assoluto della pressione sarà

$$P = 6g,$$

cioè sei volte più grande del peso che ha lo stesso punto mobile.

Nel secondo caso si ponga l'origine delle coordinate alla estremità superiore del diametro verticale, e si prenda questo diametro per asse delle ascisse nel senso della gravità: le componenti della forza acceleratrice secondo gli assi saranno $X = g$, $Y = 0$; e perciò dalla formola (t''') risulterà la pressione

$$P = g\frac{dy}{ds} - \frac{v^2}{a}.$$

Ora essendo x_0 l'ascissa della posizione iniziale, a cagione della formola (t') si ha

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = 2\int X\,dx + \text{Cost.} = 2g(x - x_0);$$

sarà dunque

$$P = g\frac{dy}{ds} - \frac{2g(x - x_0)}{a}.$$

L'equazione della curva $y = \sqrt{2ax - x^2}$ ci somministra il valore

$$dy = \frac{(a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}, \text{ ossia } \frac{dx^2}{dy^2} = \frac{2ax - x^2}{(a - x)^2};$$

ed abbiamo quindi l'espressione

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2ax - x^2}{(a-x)^2}}} = \frac{a-x}{a} :$$

sarà dunque in fine

$$P = \frac{g(a-x)}{a} - \frac{2g(x-x_0)}{a} .$$

Ciò posto, è evidente che il mobile allora si staccherà dalla periferia circolare, quando la pressione esercitata sopra di essa si riduce a zero: dunque la posizione cercata, o meglio l'ascissa corrispondente si determinerà mediante l'equazione

$$\frac{g(a-x)}{a} - \frac{2g(x-x_0)}{a} = 0 ;$$

e si avrà per conseguenza $x = \frac{a + 2x_0}{3}$.

368. **Problema** II. *Un punto materiale, costretto a rimanere sopra una curva, parte dalla quiete e si muove in virtù di una forza, la quale è diretta costantemente verso un centro fisso ed è proporzionale alla distanza da questo centro: si vuol sapere qual debba essere la curva, affinchè il tempo impiegato a percorrere un arco qualunque sia uguale a quello, in cui lo stesso mobile descriverebbe la corda corrispondente.*

Sia O il punto di partenza (fig. 166.a), C il centro delle forze, ed M la posizione del mobile alla fine del tempo t , nel quale si percorre l'arco ONM $= s$. Facciamo

$$OC = a\ ,\ MC = r\ ,\ OM = \rho\ ,\ MOC = \theta:$$

stante l'equazione (t'') del numero (360), avremo integrando e rappresentando colla stessa distanza r la forza proporzionale φ,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = -\int r\,dr + \text{Cost.} = a^2 - r^2\,;$$

e siccome nel triangolo OCM sussiste $r^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\theta$, così nel movimento del punto materiale si avrà

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2a\rho\cos\theta - \rho^2}\ .$$

Ciò posto, nel movimento del punto sopra la corda OM si deve fare $ds = d\rho$, e considerare l'angolo θ come una costante: sotto queste condizioni la formola ora stabilita, mediante l'integrazione, ci darà il tempo che impiega il mobile a percorrere la corda; cioè

$$t = \int_0^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{2a\rho\cos\theta - \rho^2}} = \int_0^\rho \frac{d(\rho - a\cos\theta)}{\sqrt{a^2\cos^2\theta - (\rho - a\cos\theta)^2}}$$

$$= \int_0^\rho \frac{d\,\dfrac{\rho - a\cos\theta}{a\cos\theta}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\rho - a\cos\theta}{a\cos\theta}\right)^2}} = \text{arc sen}\,\frac{\rho - a\cos\theta}{a\cos\theta} + \frac{\pi}{2}\ .$$

Nel movimento poi del medesimo punto sopra la curva colla origine in O, dobbiamo (315) porre $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}$; e perciò la detta formola ci somministra pure l'integrale

$$t = \int \frac{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}}{\sqrt{2a\rho\cos\theta - \rho^2}}\ ,$$

per esprimere il tempo che impiega il mobile a descrivere l'arco ONM. Uguagliando tra loro i due valori t, giusta la condizione del problema, e differenziando poi l'equazione risultante per rispetto alle variabili ρ e θ, otterremo

$$\frac{\cos\theta\, d\rho + \rho \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2}\ ;$$

e quindi con varie operazioni ben facili a comprendersi, otterremo ancora

$$\left(d\rho + \frac{\rho \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\cos\theta}\right)^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2\ ,\quad \frac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\, d\rho + \frac{\rho\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta = \rho\, d\theta,$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\right) d\theta = \frac{\cos 2\theta\, d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}\ .$$

Dinotando con c una costante arbitraria, e integrando l'ultima equazione, cioè $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2}\ \frac{d\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\theta}$, avremo in fine

$$\log(\rho) = \frac{1}{2}\log(\operatorname{sen}2\theta) + \frac{1}{2}\log(c^2)\ ,\ \rho^2 = c^2\operatorname{sen}2\theta\ .$$

Questa equazione rappresenta una *lemniscata* di Giacomo Bernoulli, la quale ha per centro l'origine o il punto di partenza O, e per asse la retta B'OB inclinata di 45 gradi sopra l'altra retta OCX: la forma poi della curva è quella che indichiamo nella tavola II, come apparirà a chi voglia costruire l'equazione trascendente

$$\rho^2 = c^2\operatorname{sen}2\theta = c^2\operatorname{sen}2(45^\circ - \omega) = c^2\cos 2\omega\ .$$

369. **Problema** III. *Due punti di ugual massa e che si attraggono nella ragione inversa duplicata della distanza, sono*

astretti a muoversi sopra due assi ortogonali, ciascuno sul suo: si domanda di determinare il tempo, nel quale i due mobili rilasciati da una data distanza alla mutua loro attrazione, giugneranno al punto dove concorrono i due assi.

Nella fig. 167.ª sieno a=HH′, b=HO, b'=H′O le distanze dei due punti materiali tra loro al principio del moto, e dalla intersezione degli assi; e ρ=KK′, x=KO, x'=K′O sieno le distanze dei medesimi punti tra loro, e dalla intersezione alla fine del tempo t. Rappresentando con μ la forza acceleratrice alla distanza $=1$, alla distanza $=\rho$ si esprimerà con $\frac{\mu}{\rho^2}$ la mutua attrazione dei due punti; conseguentemente $\frac{\mu x}{\rho^3}$, $\frac{\mu x'}{\rho^3}$ esprimeranno le relative componenti dell'attrazione nel senso delle tangenti o degli assi, sui quali si muovono i due punti: di più dovendosi sostituire gli aumenti $-dx$, $-dx'$ nella formola (t'.358) in luogo di ds, nel movimento dei due punti mobili dovranno sussistere le equazioni

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{\rho^3}, \quad \frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{\mu x'}{\rho^3}.$$

Moltiplicando la prima per x', la seconda per x, e sottraendole poi l'una dall'altra, otteniamo

$$\frac{x d^2x' - x' d^2x}{dt^2} = 0:$$

integrata quest'ultima equazione, ne risulta l'altra

$$\frac{x dx' - x' dx}{dt} = 0$$

senza alcuna costante, perchè al principio del moto le velocità

$\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dx'}{dt}$ sono nulle. Se ne deduce che

$$\frac{dx'}{x'} - \frac{dx}{x} = 0 \ , \quad \log(x') - \log(x) = \log(c) \ ,$$

e conseguentemente

$$\frac{x'}{x} = \text{cost.} = \frac{b'}{b} \ ;$$

il che fa vedere che la retta la quale congiunge i due mobili, rimane sempre parallela a sè stessa, e che perciò i due punti giugneranno nello stesso tempo in O intersezione dei due assi.

Ciò posto, riprendiamo la prima delle equazioni (1), e facciamovi la sostituzione del valore $\rho = \frac{a}{b} x$, quale si ottiene dai triangoli simili HH'O e KK'O: avremo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{\mu b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{x^2} \ .$$

Questa formola moltiplicata prima per $2dx$, e poi integrata, diviene

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2\mu b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{x} + \text{cost.} = \frac{2\mu b^2}{a^2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right) = \frac{2\mu b^2}{a^2} \cdot \frac{b-x}{bx} \ .$$

Quinci

$$dt = -\sqrt{\frac{a^2}{2\mu b^2}} \cdot \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{b-x}} = -\sqrt{\frac{a^2}{2\mu b^2}} \cdot \frac{2x\,dx}{2\sqrt{bx-x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{2\mu b^2}} \cdot \left(\frac{b\,dx - 2x\,dx}{2\sqrt{bx-x^2}} - \frac{b\,dx}{2\sqrt{bx-x^2}}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{a^3}{2\mu b^2}}\left(\frac{b\,dx-2x\,dx}{2\sqrt{bx-x^2}}-\frac{dx}{\sqrt{\frac{4bx-4x^2}{b^2}}}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{a^3}{2\mu b^2}}\left\{\frac{b\,dx-2x\,dx}{2\sqrt{bx-x^2}}+\frac{b}{2}\frac{d\left(\frac{b-2x}{b}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{b-2x}{b}\right)^2}}\right\};$$

e presi gli integrali dentro i limiti b e *zero*, si ha il valore del tempo cercato

$$T=\sqrt{\frac{a^3}{2\mu b^2}}\left[\sqrt{bx-x^2}-\frac{b}{2}\text{arc}.\cos\frac{b-2x}{b}\right]_b^0$$

$$=\frac{b\pi}{2}\sqrt{\frac{a^3}{2\mu b^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

370. **Problema** IV. *Un punto pesante è astretto a muoversi sopra una superficie sferica: si vuol determinare la sua velocità e la pressione che esercita sulla sfera.*

Prendiamo il centro della sfera per origine delle coordinate rettangolari x, y, z, e facciamo che l'asse delle z tenda in basso e coincida colla direzione della gravità: il raggio a della sfera dovrà riguardarsi come la diagonale del parallelepipedo rettangolo che intorno a un vertice ha per lati le coordinate x, y, z spettanti a un punto qualunque della superficie sferica. L'equazione della superficie sferica sulla quale si muove il punto pesante, è dunque

$$x^2+y^2+z^2=a^2. \tag{1}$$

Nel caso nostro le componenti della forza acceleratrice sono $X=0$,

$Y=0$, $Z=g$; inoltre i coseni degli angoli che nel punto (x, y, z) la direzione della pressione P, ossia il raggio a, forma cogli assi coordinati, si esprimono mediante i valori numerici $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{a}$, $\frac{z}{a}$: dunque le tre equazioni (t. 356) del moto divengono

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -P\frac{x}{a}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -P\frac{y}{a}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g - P\frac{z}{a}.$$

Per mezzo delle equazioni (1) e (2) potremmo adesso determinare le quantità x, y, z, e P mediante la variabile t: a noi basterà restringerci alla soluzione delle due quistioni proposte.

1.° Moltiplichiamo ordinatamente per dx, dy, dz le equazioni (2) e sommiamole insieme tra loro: avremo

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = g\,dz - \frac{P}{a}(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

Il primo membro di questa equazione non è altro che il differenziale della quantità $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2\,dt^2}$, ossia di $\frac{v^2}{2}$; il trinomio poi che è chiuso dentro la parentisi del secondo membro è manifestamente nullo, e lo dimostra la differenziazione dell'equazione (1): fatta dunque l'integrazione, avremo

$$v^2 = 2gz + \text{Cost.}$$

Quindi rappresentando rispettivamente con v_0, z_0 il valore iniziale della velocità e della coordinata verticale, sussisterà Cost. $= v_0^2 - 2gz_0$; perciò nel punto (x, y, z) varrà la relazione

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0),$$

che è quella (359) del movimento di un punto pesante per una curva verticale qualunque.

2.° Moltiplichiamo ancora con ordine le equazioni (2) per x, y, z, e sommiamole pure tra loro: attesa anche l'equazione (1), avremo

$$\frac{x\,d^2x+y\,d^2y+z\,d^2z}{dt^2}=gz-\frac{P}{a}\,(x^2+y^2+z^2)=gz-Pa\,;$$

ma l'equazione della superficie sferica differenziata due volte, ci dà

$$\frac{x\,d^2x+y\,d^2y+z\,d^2z}{dt^2}=-\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=-\,v^2\,;$$

dunque la pressione del punto pesante sulla superficie sferica relativamente all'unità di massa, è data dalla formola

$$P=\frac{v^2+gz}{a}\,.$$

La questione che abbiamo risoluto, ha un'applicazione nel così detto *pendolo conico*. Prendiamo un piccolo globo pesante sospeso a un filo; e dopo averlo rimosso dalla posizione verticale di equilibrio, diamogli un impulso in una direzione qualunque: il pendolo comincia a girare a tondo; e il filo teso descrive nello spazio la superficie di un cono col vertice nel punto di sospensione, e nel medesimo tempo si avvicina e si allontana alternamente dalla direzione verticale, senza mai coincidere con essa. Di un tal pendolo che chiameremo *conico*, ci bastino le poche cose che abbiamo ora detto intorno a un punto pesante costretto a muoversi in una superficie sferica: più a lungo tratteremo dei pendoli circolare e cicloidale nel capo che viene appresso.

CAPO X.

TEORIA DEI PENDOLI E MOTO DELLA TERRA INTORNO AL PROPRIO ASSE.

Congiungiamo in questo capo la teoria del pendolo e il moto rotatorio della terra intorno al suo asse; perchè quella teoria ci fa conoscere la variazione della gravità alla superficie terrestre, e questo moto di rotazione ce ne discopre la causa principale: tratterremo separatamente dell'una e dell'altro in due paragrafi distinti.

§. 1.°

Oscillazioni del pendolo circolare e cicloidale.

371. Chiamasi *pendolo semplice* un punto pesante A (fig. 168.a), sospeso a un punto fisso C per mezzo di un filo inestensibile CA, che si concepisce come una retta priva di peso e capace di muoversi liberamente intorno alla sua estremità C: il *pendolo composto* consiste in un sistema di punti pesanti, ovvero in un corpo qualunque solido che può oscillare intorno a un asse orizzontale in virtù della gravità. Il pendolo semplice, come ben si comprende, è un puro concetto della nostra mente e non esiste in natura; ma dai matematici si studiano le leggi del suo movimento, perchè la cognizione di queste leggi ci conduce agevolmente a scoprir quelle che hanno luogo nel moto del pendolo composto e reale.

Innanzi tratto è evidente che il pendolo semplice CA, se venga rimosso dalla direzione verticale di equilibrio e poi abbandonato liberamente all'azione della gravità nella posizione obliqua CD, si muoverà nel piano verticale che lo contiene, descrivendo un arco del circolo DAD′, allo stesso modo come senza il filo si

muoverebbe sulla circonferenza fissa del medesimo circolo il punto pesante A: perchè risoluta la forza di gravità che agisce sopra il punto materiale in due componenti, una diretta secondo il filo o il raggio CD, l'altra perpendicolare al filo o diretta secondo la tangente dell'arco DAD′ in D, nell'uno o nell'altro caso la prima forza componente viene distrutta dalla resistenza del punto fisso C ovvero dell'arco fisso DAD′, e perciò il moto è prodotto ugualmente dalla seconda forza componente in ambedue i casi. Ne segue (290. 359) che dunque il pendolo in qualunque punto avrà quella medesima velocità, la quale è dovuta all'altezza dell'arco descritto; e dopo di aver percorso l'arco DA sino alla direzione verticale, salirà dalla parte opposta descrivendo in pari tempo un arco AD′ di una stessa altezza od uguale a quello descritto nella discesa; e andrebbe quinci scorrendo innanzi e indietro per l'arco D′AD, senza mai ristare, se il suo movimento non fosse a poco a poco rallentato ed estinto dalla resistenza dell'aria e dall'attrito che si svolge nel punto di sospensione.

Il trascorrimento del pendolo dall'una all'altra estremità dell'arco DAD′, si dice *oscillazione*: la distanza AC del punto pesante A dal punto di sospensione C, si chiama la *lunghezza del pendolo*; il quale è detto *circolare*, perchè essendo libero il filo oscillante, la sua estremità si muove per un arco di circolo.

372. **Oscillazioni del pendolo semplice nel vuoto per archi circolari abbastanza piccoli.** La proprietà del pendolo che più importa per la pratica, è l'isocronismo delle sue oscillazioni quando sieno di poca ampiezza: il primo a riconoscere una tal proprietà fu Galileo, il quale tuttavia giovinetto l'osservò nelle oscillazioni di una lampada sospesa nel duomo di Pisa; ed ecco come si dimostra per un pendolo semplice nel vuoto.

Sieno $CA = l$ (fig. 168.ª) la direzione verticale e la lunghezza del pendolo, CD la posizione iniziale del medesimo e CE la posizione alla fine del tempo t, $DE = s$ l'arco descritto in questo tempo dall'estremità del pendolo lasciato a sè stesso, α e β gli angoli DCA ed ECA, ossia gli archi che loro corrispondono in un circolo di raggio $= 1$. Condotte le rette orizzontali DH,

EK, ed espressa con v la velocità acquistata dal pendolo nella posizione CE; equivalendo la differenza CK — CH all'altezza HK dell'arco percorso, sarà (371. 271)

$$v^2 = 2g(\mathrm{CK} - \mathrm{CH}) = 2gl(\cos\beta - \cos\alpha)$$

$$= 4gl \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta):$$

ma per ipotesi l'arco DA, ovvero l'arco simile α, e conseguentemente gli angoli $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ed $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ sono così piccoli, che senza errore sensibile possono sostituirsi ai loro seni; si avrà dunque

$$v = \sqrt{4gl \cdot \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \sqrt{gl(\alpha^2 - \beta^2)}\ .$$

E siccome abbiamo ancora (356) nel moto impedito l'espressione generale

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(l\alpha - l\beta)}{dt} = -\frac{l\,d\beta}{dt}\ ;$$

così uguagliando i due valori della velocità, troveremo

$$dt = \frac{-l\,d\beta}{\sqrt{gl(\alpha^2 - \beta^2)}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{-d\beta}{\sqrt{\alpha^2\left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{-d\frac{\beta}{\alpha}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}}\ :$$

presi gli integrali, nascerà la relazione finita

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \operatorname{arc\,cos} \frac{\beta}{\alpha} + \mathrm{C}\ ;$$

e corrispondendo al tempo $t = 0$ l'angolo $\beta = \alpha$, e perciò essendo la costante $C = 0$, si avrà in fine

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \text{arc cos} \frac{\beta}{\alpha} .$$

Tale è l'espressione del tempo, che impiega il pendolo a passare dalla posizione iniziale CD a un'altra posizione qualunque CE: onde se indichiamo con t_1 il tempo, in cui il pendolo perviene alla posizione verticale CA e compie la semi-oscillazione DA, riflettendo che nella medesima posizione verticale l'angolo β diviene uguale a zero, otterremo facilmente il valore $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$; e quindi sarà

$$(u) \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

l'espressione del tempo, nel quale il pendolo eseguisce una intera oscillazione. Ora cotesta espressione è affatto indipendente dall'angolo iniziale α, ossia dalla ampiezza delle oscillazioni che del resto si suppongono abbastanza piccole: dunque *le oscillazioni del pendolo semplice per piccoli archi di cerchio comunque disuguali*, si fanno tutte nello stesso tempo, o meglio *sono sensibilmente isocrone*. Dico *sensibilmente*; perchè nel calcolo che ci ha condotto alla formola (u), abbiamo preso gli archi $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ ed $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ in luogo dei seni corrispondenti.

373. La formola (u) che ci dà la durata di una oscillazione del pendolo semplice per un piccolo arco qualunque di cerchio, ovvero la proposizione che in quella formola è contenuta rispetto all'isocronismo delle oscillazioni di un pendolo circolare, si può anche dimostrare con un metodo elementare nel modo seguente.

Sia DAD' (fig. 169.ª) l'arco circolare abbastanza piccolo, pel quale va oscillando il pendolo CA intorno al punto di sospensione C: rappresentando EE' un elemento infinitesimo dell'arco, si

conducano sopra la direzione verticale CA i perpendicoli EK, E′K′; si meni ancora la retta orizzontale DHD′, e sopra AH come diametro si descriva il circolo HFF′A. Ciò posto la velocità acquistata dal pendolo nella posizione CE, essendo dovuta (371) all'altezza dell'arco percorso DE, avrà (271) per espressione $\sqrt{2g.\ HK}$; e siccome può supporsi che l'arco infinitesimo EE′ venga percorso con moto uniforme nel tempuscolo θ,. cioè colla sola velocità concepita dal mobile nel punto E, così sussisterà (9) la formola

$$\theta = \frac{EE'}{\sqrt{2g\,.\,HK}}\ .$$

Chiamata l la lunghezza del pendolo, o il raggio del circolo DAD′, e tirata la verticale E′B sino alla retta EK, i due triangoli ECK ed EBE′, che hanno i lati rispettivamente perpendicolari, sono simili tra loro e ci danno la proporzione $EK : KK' = l : EE'$, donde si raccoglie il valore $EE' = \frac{l.\,KK'}{EK}$, e si conchiude che *un elemento infinitesimo* EE′ *dell'arco circolare* DAD′ *è uguale alla sua proiezione* KK′ *sopra il diametro verticale, moltiplicata per il rapporto che passa tra il raggio del circolo e la perpendicolare* EK *condotta sopra lo stesso diametro*. Sostituendo un tal valore nella formola superiore, otterremo

$$\theta = \frac{l\,.\,KK'}{EK\sqrt{2g\,.\,HK}}\ :$$

ora nella ipotesi di una piccola ampiezza di oscillazione, si può trascurare senza errore sensibile il segmento KA in confronto dell'intero diametro $2l$; e però il perpendicolo EK, che è medio geometrico proporzionale tra i due seguenti del diametro, si esprime colla equazione

$$EK=\sqrt{(2l-KA)KA}=\sqrt{2l(HA-HK)}\ :$$

dunque si avrà

$$\theta=\frac{l\,.\,KK'}{\sqrt{2l(HA-HK)}\,\sqrt{2g\,.\,HK}}=\frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{g}}\ \frac{KK'}{\sqrt{HK(HA-HK)}}$$

$$=\frac{1}{HA}\sqrt{\frac{l}{g}}\ \frac{\tfrac{1}{2}HA\,.\,KK'}{\sqrt{HK(HA-HK)}}\ .$$

In questa formola l'ultimo fattore rappresenta l'arco infinitamente piccolo FF′, che nel circolo HFF′A corrisponde all'elemento EE′ dell'arco DAD′; giacchè secondo il teorema dimostrato ed enunciato poc'anzi, si ha

$$FF'=\frac{\tfrac{1}{2}HA\,.\,KK'}{FK}=\frac{\tfrac{1}{2}HA\,.\,KK'}{\sqrt{HK\,.\,KA}}=\frac{\tfrac{1}{2}HA\,.\,KK'}{\sqrt{HK(HA-HK)}}\ :$$

risulterà dunque in fine il valore del tempo θ, espresso colla formola

$$\theta=\frac{FF'}{HA}\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Da questa formola s'inferisce che il tempo, impiegato dal pendolo a percorrere un elemento qualunque infinitesimo EE′ dell'arco DEA, si esprime col prodotto della quantità costante $\frac{1}{HA}\sqrt{\frac{l}{g}}$ per l'arco FF′, che corrisponde al medesimo elemento nella semicirconferenza HFA; dunque la somma dei tempi impiegati a percorrere tutti gli elementi dell'arco DEA, ossia il tempo necessario a compiere la metà della oscillazione, si esprimerà colla predetta quantità costante, moltiplicata per la somma di tutti gli archi FF′ onde si compone la predetta semicirconferenza che

è uguale alla quantità $\pi . \frac{1}{2}$ HA; conseguentemente il tempo o la durata di una intera oscillazione del pendolo CA per l'arco DAD' sarà

$$(u) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Di tal modo, non dipendendo il tempo T dalla quantità HA, che determina l'estensione dell'arco di oscillazione DAD', si conchiude nuovamente che *le oscillazioni del pendolo semplice per piccoli archi di cerchio, comunque disuguali tra loro, sono sensibilmente isocrone, ossia della medesima durata*. Nella dimostrazione si è supposto abbastanza piccolo l'arco DAD', e si è inoltre trascurata la quantità KA in confronto della lunghezza $2l$; perciò nella conclusione si asserisce che le oscillazioni sono isocrone solo *sensibilmente per piccoli archi di cerchio*.

374. Conseguenze della teoria del pendolo semplice. Rappresentiamo con n, n' i numeri delle oscillazioni che in un medesimo tempo θ fanno due pendoli, situati nello stesso luogo e aventi le lunghezze l, l': essendo T, T' i rispettivi tempi di ciascuna oscillazione nei due pendoli, in virtù della formola (u) si avrà la proporzione

$$T : T' = \sqrt{l} : \sqrt{l'} .$$

Ma attesi i valori $T = \frac{\theta}{n}$, $T' = \frac{\theta}{n'}$ si ha pure l'altra proporzione

$$T : T' = \frac{1}{n} : \frac{1}{n'} ;$$

sarà dunque

$$l : l' = \frac{1}{n^2} : \frac{1}{n'^2} = n'^2 : n^2 .$$

Ciò vuol dire che *in un dato luogo qualunque le lunghezze dei pendoli sono inversamente proporzionali ai quadrati dei numeri delle oscillazioni, che fanno in un medesimo tempo.*

Quindi 1.° potremo facilmente determinare la lunghezza del pendolo semplice che compie le singole oscillazioni in ciascun minuto secondo, senza bisogno di conoscere il valore della gravità g. A questo effetto basta di fare oscillare in un dato luogo un pendolo che abbia una lunghezza arbitraria a, e di osservare il numero n delle oscillazioni che esso fa in un tempo determinato, per es. nell'intervallo di un minuto primo: la lunghezza x del pendolo semplice che nello stesso luogo eseguisce ciascuna oscillazione in un secondo, si ricaverà dalla proporzione

$$x : a = n^2 : 60^2 ;$$

e sarà $x = \frac{an^2}{3600}$. Così nei nostri paesi risulta $x = 0^m, 9933$ in circa.

2.° Trovata la lunghezza p. es. del pendolo semplice che batte i secondi in un dato luogo della terra, si trova pure pel medesimo luogo il valore della gravità terrestre. Imperocchè l'equazione (u), risoluta per rispetto a g, ci dà $g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$; e questa formola, conosciuta che sia la lunghezza del pendolo a secondi, ci fa conoscere immediatamente la gravità terrestre g. Così nei nostri paesi, sarà

$$g = \pi^2(0^m, 9933) = 9^m,8034 ;$$

il qual valore si è già indicato nel numero (274), e più volte adoperato in altri numeri.

3.° Dalla diversa lunghezza del medesimo pendolo a secondi nei differenti paesi s'inferisce che la gravità terrestre va sempre più diminuendosi dai poli all'equatore. Imperocchè restando invariato

il tempo della oscillazione di un pendolo, la formola superiore $g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$ ci dimostra che la gravità nei varii luoghi della terra è proporzionale alla sola lunghezza di quel pendolo: ma la lunghezza del pendolo semplice il quale faccia sempre la sua oscillazione in un secondo di tempo, è tanto più corta quanto si trova più dappresso all'equatore e più discosto dai poli; dunque alla superficie della terra la gravità diminuisce continuamente dai poli all'equatore. Studieremo più innanzi le cause di queste variazioni della gravità: per ora vediamo che cosa succeda, quando il pendolo semplice si muove nell'aria o in un mezzo resistente, e l'ampiezza delle sue oscillazioni iniziali è abbastanza piccola.

373. **Oscillazioni del pendolo semplice in un mezzo resistente.** Trattandosi di velocità assai piccole, noi supporremo la resistenza del mezzo, per es. dell'aria, proporzionale alla semplice velocità del punto pesante, che nel pendolo oscilla per archi circolari abbastanza piccoli; sicchè conservando le denominazioni usate di sopra (372), avremo g sen β per la espressione della forza acceleratrice di gravità secondo la tangente della curva, e potremo rappresentare con $-\frac{gv}{k}$ la forza acceleratrice dovuta alla resistenza che è direttamente opposta alla prima forza. Laonde l'equazione del movimento, giusta la formola generale (t') del numero (358), nel caso presente sarà questa

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \operatorname{sen}\beta - \frac{gv}{k} :$$

ma abbiamo $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2(l\alpha - l\beta)}{dt^2} = -l\frac{d^2\beta}{dt^2}$, $v = \frac{ds}{dt} = -l\frac{d\beta}{dt}$,

e per la piccolezza delle oscillazioni possiamo sostituire l' angolo β al suo seno; dunque il movimento del pendolo nell'aria lo dovremo determinare per mezzo della equazione lineare e differenziale di secondo ordine

$$(1) \qquad \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{g}{k}\frac{d\beta}{dt} + \frac{g}{l}\beta = 0 .$$

Integriamo questa equazione col metodo esposto nel numero (CXII) della Introduzione. L' equazione ausiliare sarà

$$R^2 + \frac{g}{k} R + \frac{g}{l} = 0 ,$$

e le sue radici saranno

$$r = -\frac{g}{2k} + \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{gl}{4k^2} - 1} ,$$

$$r' = -\frac{g}{2k} - \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\frac{gl}{4k^2} - 1} ;$$

le quali, per la piccolezza della frazione $\frac{g}{k}$ potendosi fare $\sqrt{1 - \frac{gl}{4k^2}} = h$, $\sqrt{\frac{gl}{4k^2} - 1} = h\sqrt{-1}$, si scrivono anche in questo modo

$$r = -\frac{g}{2k} + h\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{-1} , \quad r' = -\frac{g}{2k} - h\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{-1} .$$

Quindi le due formole (54) del numero citato (CXII) ci daranno, per l' integrale dell' equazione (1) trovata poc' anzi, le relazioni

$$\beta' = Ce^{r't} = Ce^{-\frac{gt}{2k} - ht\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{-1}} ,$$

$$\beta = e^{rt}(C' + \int \beta' e^{-rt} dt)$$

$$= e^{-\frac{gt}{2k}} \left(C' e^{ht\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{-1}} - C'' e^{-ht\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{-1}} \right)$$

$$= e^{-\frac{gt}{2k}} \left[C_1 \operatorname{sen}\left(ht\sqrt{\frac{g}{l}} \right) + C_2 \cos\left(ht\sqrt{\frac{g}{l}} \right) \right].$$

Per determinare le costanti C_1 e C_2, osserviamo che in questa ultima equazione e in quella che se ne deriva colla differenziazione si ha $\beta = \alpha$ e $\frac{d\beta}{dt} = 0$, quando è $t = 0$: sarà dunque $C_1 = \alpha$, e $C_2 = \frac{\alpha\sqrt{gl}}{2kh}$; per conseguenza la funzione β e la sua derivata rispetto al tempo, attendendo alla uguaglianza $\frac{gl}{4k^2} + h^2 = 1$, le potremo esprimere colle due formole seguenti

$$(2) \begin{cases} \beta = \alpha \left[\cos\left(ht\sqrt{\frac{g}{l}} \right) + \frac{\sqrt{gl}}{2kh} \operatorname{sen}\left(ht\sqrt{\frac{g}{l}} \right) \right] e^{-\frac{gt}{2k}}, \\ \frac{d\beta}{dt} = -\frac{\alpha}{h}\sqrt{\frac{g}{l}} \operatorname{sen}\left(ht\sqrt{\frac{g}{l}} \right) e^{-\frac{gt}{2k}} \end{cases}$$

Ora alla fine di ciascuna oscillazione la velocità del pendolo è nulla, e si ha $\frac{d\beta}{dt} = 0$: dunque in virtù della seconda formola (2) si avrà $\operatorname{sen}\left(ht\sqrt{\frac{g}{l}} \right) = 0$; e alla fine della prima, della seconda, della terza, . . . oscillazione il valore del tempo trascorso dal prin-

cipio del moto fino a quell' istante verrà dato dalle rispettive formole

$$t=\frac{\pi}{h}\sqrt{\frac{l}{g}}\ ,\ t=\frac{2\pi}{h}\sqrt{\frac{l}{g}}\ ,\ t=\frac{3\pi}{h}\sqrt{\frac{l}{g}}\ ,\ \ldots\ .$$

Vale a dire *le oscillazioni di un pendolo semplice nell'aria per archi circolari abbastanza piccoli, compiendosi ciascuna in un tempo*

$$(u')\qquad T=\frac{\pi}{h}\sqrt{\frac{l}{g}}\ ,$$

sono tutte isocrone tra loro, e quasi sincrone con quelle che fa il medesimo pendolo nel vuoto; giacchè la loro durata è ingrandita nel solo rapporto di 1 ad h.

Di più se nella prima formola (2) invece di t si sostituiscono successivamente i valori T, 2T, 3T,.., risulteranno le espressioni

$$\beta_1=-\alpha e^{-\frac{\pi\sqrt{gl}}{2kh}}\ ,\ \beta_2=\alpha e^{-\frac{2\pi\sqrt{gl}}{2kh}}\ ,\ \beta_3=-\alpha e^{-\frac{3\pi\sqrt{gl}}{2kh}}$$

le quali appartengono all'angolo che forma colla verticale la direzione del pendolo alla fine della prima, della seconda, della terza,... oscillazione: adunque ponendo per brevità $e^{-\frac{\pi\sqrt{gl}}{2kh}}=u$, le ampiezze delle successive oscillazioni si esprimeranno coi rispettivi termini della progressione geometrica decrescente

$$\alpha+\alpha u=\alpha(1+u),\ \alpha u+\alpha u^2=\alpha(1+u)u\ ,\ \alpha u^2+\alpha u^3$$
$$=\alpha(1+u)u^2,\ \ldots\ ;$$

e così *vibrando un pendolo semplice nell'aria per piccoli archi*

di circolo, le sue oscillazioni andranno sempre più restringendosi in progressione geometrica fino alla estinzione del moto. Con queste due conclusioni teoriche essendo d'accordo i risultati delle osservazioni e della esperienza fatta sui pendoli che oscillano nell'aria fra due limiti abbastanza ristretti, ne consegue che rispetto a tali oscillazioni la resistenza dell'aria si può assumere come proporzionale alla semplice velocità, giusta l'ipotesi che abbiamo fatto da principio.

376. **Oscillazioni del pendolo composto.** Dimostriamo che *anche in questo pendolo le oscillazioni sono sensibilimente isocrone sì nel vuoto come nell'aria, purchè si facciano per archi circolari abbastanza piccoli.*

Il pendolo CA (fig. 170.ª) sia un pendolo composto, cioè formato di più punti pesanti A, A′,..., B′, B invariabilmente connessi tra loro e situati p. es. in una medesima retta CA. Se questi punti fossero tutti separati gli uni dagli altri e costituissero altrettanti pendoli semplici, è fuor di dubbio che quelli più vicini all' asse o al punto di sospensione C, come B′ e B, compirebbero più celeremente degli altri le loro oscillazioni; e per converso quelli più lontani dallo stesso punto di sospensione, come A′ ed A, oscillerebbero più lentamente dei primi punti: per convincersene, basta por mente alla formola *(u)* dei numeri (372. 373), ovvero alla formola *(u′)* del numero precedente; giacchè queste due formole ci mostrano immediatamente che nel pendolo semplice, tanto più corto o più lungo è il tempo di ciascuna oscillazione, quanto minore o maggiore è la lunghezza del medesimo pendolo, ossia la distanza del punto pesante dal punto di sospensione. Ma poichè tutti i punti del sistema di fatto sono collegati tra loro, e costretti a muoversi insieme e a compiere nello stesso tempo le loro oscillazioni; perciò per la mutua azione dovrà necessariamente accadere che il movimento oscillatorio dei punti più vicini all'asse di sospensione sia ritardato dai puuti più lontani, e viceversa che il movimento dei punti più lontani sia accelerato dai più vicini all'asse: quindi si comprende che nella medesima serie di punti successivi ve ne dovrà essere uno

intermedio, per. es. il punto O, il quale sia tanto accelerato da quelli che lo precedono, quanto è ritardato da quelli che gli vengono dietro; questo punto in sostanza non soffrirà per parte degli altri nè accelerazione nè ritardo, e oscillerà allo stesso modo e nello stesso tempo, come se fosse indipendente dagli altri punti del sistema e formasse il pendolo semplice CO. Dalla qual cosa si raccoglie che il pendolo composto CA fa le sue oscillazioni alla stessa guisa di un pendolo semplice, il quale avesse per lunghezza la retta CO: ma secondo ciò che abbiamo già dimostrato, le oscillazioni del pendolo semplice CO per archi circolari abbastanza piccoli sono sensibilmente isocrone, sì nel vuoto come nell'aria; dunque la stessa cosa è a dire rispetto alle oscillazioni di un pendolo composto CA.

377. **Centro di oscillazione.** Nel pendolo composto CA si dice *centro di oscillazione* il punto O, che oscilla come se fosse isolato e diviso dagli altri punti: la sua distanza dall'asse o dal punto C di sospensione, è la lunghezza di un pendolo semplice sincrono col dato pendolo composto.

Per determinare meccanicamente il detto centro, si osservi il tempo che impiega il pendolo composto CA a fare un numero considerevole di oscillazioni, e si divida poi quel tempo per questo numero di oscillazioni: il quoto che ne risulta, sarà il tempo corrispondente a ciascuna oscillazione. Il valore di un tal quoto si sostituisca in luogo di T nella formola *(u)* dei numeri (372. 373), ovvero nella formola *(u')* del numero (375); se ne dedurrà la lunghezza l di un pendolo semplice, che compie le sue oscillazioni nello stesso tempo che il pendolo composto CA, nel vuoto ovvero nell'aria: laonde se a partire dal punto di sospensione si prenda in CA una tal distanza CO, la quale riesca uguale alla lunghezza l già determinata, sarà nel punto O il centro di oscillazione del pendolo composto. La lunghezza CO di un pendolo semplice sincrono col dato pendolo composto CA, è quella che si deve usare nella risoluzione delle questioni pratiche che spettano al movimento dei pendoli.

Del resto in qualunque corpo che sia mobile intorno a un asse fisso, si può determinare analiticamente il centro di oscillazione: di questa maniera noi lo determineremo nell'ultimo capo di questa parte, dove mostreremo ancora che il centro di oscillazione è sempre più distante dall'asse di sospensione che lo stesso centro di gravità; e che di più la sua posizione dipende ne'corpi omogenei della sola forma del mobile, e nei corpi eterogenei dalla forma insieme e dalla densità. Dopo di avere considerato le oscillazioni d'un pendolo, semplice o composto, nel vuoto o nell'aria, per archi circolari abbastanza piccoli, è bene che consideriamo ancora le oscillazioni di un pendolo semplice nel vuoto per qualunque arco di cerchio.

378. **Oscillazioni di un punto pesante, o di un pendolo semplice nel vuoto per un arco qualunque di cerchio.** Sia DAD′ (fig. 168ª) un arco circolare di qualsiasi ampiezza, per il quale si muove il punto pesante D, ovvero oscilla il pendolo semplice CD di qua e di là dalla verticale CA; e $DE = s$ sia l'arco che nel tempo t descrive lo stesso mobile, abbandonato a sè medesimo senz'alcuna velocità iniziale: riferita la periferia del circolo ai due assi ortogonali ACX ed AY, rappresentiamo con l il raggio del medesimo circolo o la lunghezza del pendolo, con x ed y le coordinate del punto E, e con h l'ascissa della posizione iniziale D. Per determinare il tempo T dell'intera oscillazione del punto pesante o del pendolo per l'arco DAD′, troviamo prima l'espressione differenziale del tempo t, che il mobile impiega a percorrere l'arco DE.

L'equazione della curva circolare $y^2 = 2lx - x^2$, mediante la differenziazione diviene $\frac{dy}{dx} = \frac{l-x}{\sqrt{2lx-x^2}}$; e si ha perciò nel presente caso la formola

$$ds = -\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx = -\sqrt{1+\frac{(l-x)^2}{2lx-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{-l\,dx}{\sqrt{2lx-x^2}} = -\sqrt{\frac{l}{2x}}\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}dx\,,$$

nella quale si adopera il segno negativo per la ragione che al crescere dell'arco s diminuisce l'ascissa x del punto estremo: quindi siccome la velocità che acquista il punto pesante o il pendolo nel descrivere l'arco $s=\mathrm{DE}$, è dovuta (371) all'altezza $\mathrm{HK}=h-x$, e si esprime (271) colla quantità $\sqrt{2g(h-x)}$; così l'equazione generale $v=\frac{ds}{dt}$, ci darà nel nostro caso particolare l'espressione differenziale

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}=-\frac{1}{\sqrt{2g(h-x)}}\sqrt{\frac{l}{2x}}\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{hx-x^2}}.$$

L'integrale di questa espressione non si può ottenere sotto forma finita per mezzo di funzioni algebriche o trascendenti, e conviene svilupparlo in una serie convergente: a tal fine, essendo x minore di $2\,l$, possiamo svolgere secondo la serie di Newton la funzione $\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}$; di questo modo avremo

$$\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\,\frac{x}{2l}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2l}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2l}\right)^3+\ldots,$$

e per conseguenza

$$dt=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\frac{dv}{\sqrt{hx-x^2}}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2l)}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{hx-x^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{(2l)^2}\,\frac{x^2dx}{\sqrt{hx-x^2}}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{(2l)^3}\,\frac{x^3dx}{\sqrt{hx-x^2}}+\ldots\right].$$

S'integri questa espressione differenziale dal limite $x=h$ sino al limimite $x=0$, ovvero scambiati tra loro i limiti e mutato il segno, s'integri da zero sino ad h; si avrà il tempo $\frac{1}{2}$ T, nel quale si compie la semi-oscillazione per l'arco DA: quindi il tempo della intera oscillazione per l'arco DAD', verrà dato dalla serie

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\Big[\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2l)}\int_0^h \frac{xdx}{\sqrt{hx-x^2}}$$

$$+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{(2l)^2}\int_0^h \frac{x^2dx}{\sqrt{hx-x^2}}$$

$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{(2l)^3}\int_0^h \frac{x^3dx}{\sqrt{hx-x^2}}+\ldots\Big].$$

Ora per trovare gli integrali compresi in questa serie, dalle regole del calcolo differenziale abbiamo

$$d.\left(x^{n-1}\sqrt{hx-x^2}\right)=\left[(n-1)\,x^{n-2}\sqrt{hx-x^2}+\frac{x^{n-1}(h-2x)}{2\sqrt{hx-x^2}}\right]dx$$

$$=\frac{\left[(2n-2)\,x^{n-2}(hx-x^2)+hx^{n-1}-2x^n\right]dx}{2\sqrt{hx-x^2}}$$

$$=\frac{\left[(2n-1)\,hx^{n-1}-2nx^n\right]dx}{2\sqrt{hx-x^2}}\ ;$$

donde procede immediatamente la formola integrale

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{hx-x^2}} = -\frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{hx-x^2} + \frac{(2n-1)h}{2n}\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}} ,$$

la quale presa tra i limiti $x=0$ ed $x=h$ diviene semplicemente

$$\int_0^h \frac{x^n dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \frac{2n-1}{2n}\, h \int_0^h \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{hx-x^2}} .$$

Da questa formola generale si scorge che gli integrali definiti, contenuti nella espressione superiore del tempo T, dipendono tutti dall'integrale $\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}$; sicchè fatto successivamente $n=1,=2,=3,\ldots$ nella medesima formola, risulteranno i valori

$$\int_0^h \frac{x\,dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \frac{1}{2}\, h \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}} ,$$

$$\int_0^h \frac{x^2 dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \frac{3}{4}\, h \int_0^h \frac{x\,dx}{\sqrt{hx-x^2}}$$

$$= \frac{1.3}{2.4}\, h^2 \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}} ,$$

$$\int_0^h \frac{x^3 dx}{\sqrt{hx-x^2}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\, h^3 \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}} , \ldots .$$

Mediante questi valori, la serie che ci dà l'espressione del tempo T, si scriverà nel modo seguente:

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{h}{2l}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^3+\ldots\right]\int_0^h\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}:$$

siccome poi si ha indefinitamente

$$\int\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{h^2}{4}-\left(\frac{h-2x}{2}\right)^2}}$$

$$=\int\frac{-d\,\frac{h-2x}{h}}{\sqrt{1-\left(\frac{h-2x}{h}\right)^2}}$$

$$=\arccos\frac{h-2x}{h}\quad\text{, e perciò}\int_0^h\frac{dx}{\sqrt{hx-x^2}}=\pi\,;$$

così sussisterà in fine

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{h}{2l}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{h}{2l}\right)^3+\ldots\right].$$

Tale è la formola o la serie, che nel pendolo semplice ci dà la durata di una oscillazione per un arco qualunque di cerchio.

La medesima serie sarà molto convergente, quando è abbastanza piccolo il rapporto della ascissa iniziale h al diametro $2\,l$: se poi l'ampiezza delle oscillazioni si compone di un piccolo numero di gradi, sicchè possa riputarsi piccolissima l'ascissa h della posizione iniziale rispetto al diametro $2\,l$, nella serie superiore potremo restringerci al solo primo termine, trascurando tutti gli altri; troveremo in questa ipotesi la formola $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, già stabilita nel numero (372), la quale è indipendente dall'altezza h dell'arco percorso di qua e di là dalla verticale, e vale conseguentemente per qualunque piccola oscillazione. Bastino le cose dette fin qui intorno al pendolo circolare: passiamo ora a considerare il moto di un punto pesante sopra la cicloide, e le oscillazioni del pendolo cicloidale.

379. **Moto dei gravi sopra la cicloide.** Consideriamo una cicloide BAB′, che giaccia in un piano verticale: la sua base BB′ sia orizzontale, e l'asse AA′$=2c$ sia volto in su, in direzione opposta a quella della gravità. Vogliamo dimostrare che *nel vuoto da qualunque punto della cicloide si lasci cadere un grave e scorrere per la curva, questo giunge sempre al punto più basso A dentro lo stesso tempo.*

Sia D (fig. 171. a) la posizione iniziale di un punto pesante, che abbandonato a sè stesso scorre per la cicloide; sia E la posizione, dove si trova dopo un tempo t; DE $=s$ sia l' arco percorso dentro tal tempo, e v la velocità che ha acquistato il mobile nel punto E. Computando le coordinate rettangolari dal vertice A della curva, condotte le rette orizzontali DH ed EK, e fatto AH$=a$, AK$=x$, EK$=y$; poiche la velocità v del mobile è dovuta (290.359) all'altezza HK $=a-x$ dell'arco percorso, avremo (271. n)

$$\frac{ds^2}{dt^2}=v^2=2g\,(a-x)\,,\quad \text{ossia}\quad dt^2=\frac{ds^2}{2g(a-x)}\,.$$

Ora attesa l'espressione differenziale di un arco e l'equazione differenziale della cicloide (XXXI), sussiste

$$ds^2 = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)dx^2 = \left(1 + \frac{2c - x}{x}\right)dx^2 = \frac{2c}{x}\,dx^2\;;$$

dunque

$$dt^2 = \frac{c}{g} \cdot \frac{dx^2}{ax - x^2}\;,$$

dove la lettera c rappresenta il raggio del circolo ond'è generata la cicloide percorsa dal mobile. Siccome però nella discesa di un punto materiale per la cicloide gli aumenti dt, dx, hanno segni contrarii; per questo estraendo la radice quadra e adoperando il segno negativo, otteniamo

$$dt = -\sqrt{\frac{c}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -\sqrt{\frac{c}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \left(x - \frac{1}{2}a\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{c}{g}} \cdot \frac{-d\,\frac{2x - a}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x - a}{a}\right)^2}}\;:$$

presi poi gl'integrali (LXXXVIII), si ottiene la formola seguente,

$$t = \sqrt{\frac{c}{g}}\,\text{arc.}\cos\frac{2x - a}{a}\;,$$

nella quale non apparisce la costante per la ragione che al tempo $t = 0$ corrisponde $x = a$, e per quel principio del moto si ha conseguentemente $\text{arc}\cos\frac{2x - a}{a} = 0°$.

La formola ora ottenuta è generale, e contiene l'espressione del tempo che a partire dalla posizione iniziale impiega il mobile fino al punto che ha x per ascissa: dunque il tempo che impiega il grave per giungere al punto A più basso che ha per ascissa $x = 0$, sarà espresso da

$$t = \pi \sqrt{\frac{c}{g}} .$$

In questa espressione il tempo è indipendente dalla posizione iniziale del grave sulla curva, ossia dall'altezza a dell'arco percorso fino al punto più basso: dunque è vera la proposizione enunciata.

380. **Oscillazioni del pendolo semplice per archi di cicloide.** Un punto pesante dopo che nella cicloide dalle posizioni D, E, . . . è disceso al punto più basso A, percorrendo gli archi DA, EA, . . . , in forza della velocità acquistata risale da A in D′, E′,... dentro lo stesso tempo, percorrendo gli archi AD′, AE′, . . . uguali in altezza a quelli dai quali è disceso: da ciò si comprende che le oscillazioni di un punto pesante per un arco qualunque DAD′, EAE′, . . . della cicloide si compiono in un tempo espresso da

$$(u'') \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{c}{g}} = \pi \sqrt{\frac{4c}{g}} ,$$

e che tali oscillazioni sono perfettamente *isocrone*. E poichè un pendolo cicloidale, cioè un punto pesante attaccato a un filo flessibile e senza peso che nelle sue oscillazioni descriva un arco di cicloide, si muove come farebbe se fosse lasciato libero sopra la stessa cicloide fissa; ne consegue che *nel vuoto le oscillazioni di un pendolo cicloidale per un arco qualunque della curva sono perfettamente isocrone, cioè si compiono nello stesso tempo.*

Per costruire un tal pendolo, si prendono due lamine CFB, CF'B' (fig. 172.a), e si dà loro una curvatura di mezze cicloidi uguali tra loro e alla metà della cicloide BAB', sicchè prese insieme vengano a formare (C) la evoluta di questa: poi preso un filo $CA = 2AA' = 4c$, e fissatane la estremità in C, si fa oscillare il punto pesante attaccato in A tra i due archi CFB e CF'B'. È manifesto che le oscillazioni di un tal pendolo sono identiche alle escursioni dello stesso punto materiale sulla cicloide BAB'.

Raffrontando qui la formola (u'') trovata poc'anzi coll'altra (u) dei numeri (372. 373), si capisce senz'altro che le oscillazioni di un pendolo cicloidale fatte per archi qualunque si compiono dentro lo stesso tempo che le piccole oscillazioni di un pendolo semplice circolare, la cui lunghezza sia uguale a $4c$, cioè al raggio di curvatura della data cicloide nel punto A. Nell'aria solo le piccole oscillazioni di un pendolo cicloidale, come quelle di un pendolo circolare, sono sensibilmente isocrone tra loro, e quasi sincrone con quelle che lo stesso pendolo farebbe nel vuoto per un arco qualunque della cicloide.

381. **Proprietà meccaniche della cicloide in relazione alle altre curve.** Abbiamo dimostrato (379) che in una cicloide BAB' (fig. 171a), situata in un piano verticale e avente l'asse nella direzione opposta a quella della gravità, un punto pesante abbandonato a sè medesimo in qualunque posizione e scorrendo quindi per la curva nel vuoto arriva sempre nello stesso tempo al punto più basso della medesima curva. Per questa proprietà la cicloide è stata detta *tautocrona:* vogliamo ora provare che oltre la cicloide non vi ha altra curva piana, alla quale appartenga la proprietà di essere tautocrona; cioè vogliamo provare che *tra tutte le curve piane la sola cicloide è quella, sopra la quale lasciato libero un grave a scorrere da un punto qualunque nel vuoto, arriva costantemente un tal mobile al punto più basso della curva dentro lo stesso tempo.*

Prendiamo per origine delle coordinate il punto infimo A, dove il grave deve arrivare in un tempo costante, qualunque sia il punto di partenza D sopra la curva verticale: gli assi coordinati

sieno posti tra loro ad angolo retto, l'uno AX verticale nel verso opposto alla gravità, e l'altro AY orizzontale; si rappresenti poi con a l'ascissa del punto D, da cui parte il mobile senz'alcuna velocità. Cercheremo l'arco s di tutte quelle curve, per le quali discendendo un grave dal punto D al punto A, il tempo t di una tale discesa sia affatto indipendente dall'altezza a: quindi se troviamo la relazione $s=2C\sqrt{x}$ tra l'arco s computato dal punto A e l'ascissa x della sua estremità, conchiuderemo che nel vuoto non vi ha altra curva tautocrona che la cicloide nella posizione, in cui noi la consideriamo; giacchè l'equazione $s=2C\sqrt{x}$ non appartiene che a una cicloide (XCIII), nella quale il vertice si trovi nella origine A e l'asse coincida coll' asse AX delle ascisse.

Per trovare la relazione predetta tra le quantità s ed x, osserviamo che l'arco s, crescendo o scemando la sua lunghezza insieme colla ascissa x, si può risguardare come una funzione continua di questa variabile, e quindi può farsi

$$s=\varphi(x)\,,\quad ds=\varphi'(x)\,dx$$

Ciò posto, il grave movendosi sopra una curva dal punto D, sarà animato in un punto (x,y) dalla velocità v dovuta (290 . 359) all'altezza $a-x$: quindi siccome sono tra loro contrarii gli incrementi dell' arco s computato dall'origine A e dal tempo t, si avrà (271. n) la formola differenziale

$$dt=\frac{-ds}{v}=\frac{-\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{2g\,(a-x)}}\;;$$

e conseguentemente si avrà ancora la formola integrale

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^0\frac{-\varphi'(x)dx}{\sqrt{a-x}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a\frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{a-x}}\;,$$

la quale ci esprime il tempo che s'impiega dal mobile a descrivere l'arco DA, e deve essere indipendente dall'altezza a.

Si faccia $x=az$, che ci somministra $dx=a\,dz$: ai limiti $x=o$ ed $x=a$ corrisponderanno relativamente alla nuova variabile i limiti $z=o$, $z=1$; e la formola precedente si muterà in quest'altra

$$t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_o^1\frac{a\varphi'(az)\,dz}{\sqrt{a-az}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_o^1\frac{\sqrt{a}\,\varphi'(az)\,dz}{\sqrt{1-z}},$$

la quale se si differenzia rispetto alla altezza iniziale a, considerata adesso come una variabile, ci porgerà (XCII in fine) la derivata

$$\frac{dt}{da}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_o^1\frac{\frac{1}{2\sqrt{a}}\varphi'(az)\,dz+\sqrt{a}\,\varphi''(az).z\,dz}{\sqrt{1-z}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{2g}}\int_o^1\frac{[\varphi'(az)+2\,az\,\varphi''(az)]\,dz}{\sqrt{1-z}}$$

Sostituendo di nuovo il valore $z=\frac{x}{a}$ in questa espressione, e ponendo per brevità $\varphi'(x)+2x\varphi''(x)=\chi(x)$, otterremo

$$\frac{dt}{da}=\frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{2g}}\int_o^a\frac{[\varphi'(x)+2x\varphi''(x)]\,\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\frac{x}{a}}}$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\chi(x)\,dx}{\sqrt{a-x}} \quad :$$

ora il tempo t della discesa per l'arco DA, come abbiamo detto e come esige la condizione del problema, deve essere costante e indipendente dall'altezza a dell'arco medesimo; e però risulta sempre uguale a zero la sua derivata $\frac{dt}{da}$, presa rispetto alla stessa variabile a; dunque sarà nulla eziandio l'espressione di quella derivata, e si avrà conseguentemente

$$\int_0^a \frac{\chi(x)\,dx}{\sqrt{a-x}} = 0 \;.$$

Ma affinchè sia nullo questo integrale definito per qualsiasi valore di a, fa d'uopo che sia uguale a zero la funzione $\chi(x)$: perchè altrimenti si potrebbe prendere così piccolo il valore di a, che la funzione $\chi(x)$ conservasse il medesimo segno da $x=o$ ad $x=a$; e in tal caso l'integrale predetto, componendosi di elementi che hanno tutti uno stesso segno, non potrebbe certamente annullarsi. Sussisterà dunque $\chi(x)=0$, ossia $\varphi'(x)+2x\varphi''(x)=0$, che si può anche scrivere successivamente nei due modi seguenti:

$$\frac{ds}{dx} + 2x\frac{d^2s}{dx^2} = 0 \;, \quad d\frac{ds}{dx} : \frac{ds}{dx} = -\frac{dx}{2x} \;.$$

Integrando ed esprimendo con C, ovvero con $\sqrt{2c}$, una quantità costante da determinarsi, verremo alla equazione differenziale di primo ordine

$$\log\left(\frac{ds}{dx}\right) = \log(x)^{-\frac{1}{2}} + \log(C) = \log\left(\frac{C}{\sqrt{x}}\right), \quad ds = \frac{C\,dx}{\sqrt{x}} \;;$$

e quindi con una nuova integrazione verremo senza una nuova costante alla equazione finita

$$s=2C\sqrt{x}=2\sqrt{2cx}\ ,$$

la quale è appunto l'equazione che si dovea trovare, per dimostrare la proposizione enunciata da principio.

382. La cicloide gode pure di un'altra proprietà meccanica relativamente alle altre curve, e una tale proprietà consiste in questo che *un grave discendendo nel vuoto e senza velocità iniziale per un arco di cicloide da un dato punto qualunque a un altro punto anch'esso dato, impiega meno tempo che nella discesa per la corda del medesimo arco, ovvero per l'arco di un'altra curva qualunque, terminato dai due punti dati.* Per questa proprietà la cicloide chiamasi la curva *brachistocrona*, cioè la linea della più breve discesa per un punto pesante; e noi, a fine di dimostrare questa stessa proprietà della cicloide, premettiamo la seguente osservazione.

Rappresenti $\varphi(x)$ una funzione qualunque indeterminata della variabile x, e poniamo che valga sempre l'equazione $\int_{x_0}^{x_m}\varphi(x)f(x)dx=0$; dovrà essere necessariamente $f(x)dx=0$, ossia $f(x)=0$: perchè altrimenti, potendo prendersi la funzione $\varphi(x)$ in modo che dal valore x_0 fino al valore x_m abbia costantemente uno stesso segno, ovvero un segno opposto a quello della funzione $f(x)$, il prodotto $\varphi(x)f(x)$ da x_0 fino ad x_m potrebbe rimanere una quantità sempre positiva ovvero sempre negativa; e in tal caso l' integrale $\int_{x_0}^{x_m}\varphi(x)f(x)dx$, constando di elementi che sono dotati tutti di un medesimo segno, non potrebbe certamente riuscire uguale a zero. La qual cosa essendo contraria all'ipotesi, si conchiude che dovrà sussistere necessariamente $f(x)=0$, ossia $f(x)dx=0$.

Ciò presupposto, senza ricorrere alla teoria generale del calcolo delle variazioni, possiamo dimostrare la proposizione enunciata di sopra nel modo particolare che segue.

383. Sieno O ed A (fig. 173.ª) due punti dati in un piano verticale, e posta l'origine delle coordinate nel punto O, si prenda l'asse delle ascisse OX verticale e diretto nel senso della gravità, e l'asse delle ordinate OY orizzontale e diretto dalla parte dell'altro punto dato A: troviamo nel piano verticale XOY la linea OMA, ossia $y = F(x)$, per la quale un grave, abbandonato a sè stesso, discenda nel vuoto dal punto O al punto A nel tempo più breve che per qualunque altra linea terminata ai medesimi punti dati.

Dinotando x, y le coordinate del punto M, ed s l'arco OM percorso dal grave nel tempo t, sarà $\sqrt{2gx}$ l'espressione della velocità v acquistata alla fine di questo tempo (290. 271); e perciò, indicata con y' la derivata della funzione $y = F(x)$, si avrà (356) per l'elemento del tempo l'espressione

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx}{\sqrt{2gx}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gx}} :$$

quindi essendo a l'ascissa del punto A, il tempo della discesa del grave dal punto O al punto A si esprimerà coll'integrale definito

$$(1) \qquad \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\sqrt{2gx}} \ ;$$

e così il problema si riduce a determinare la curva OMA, per la quale il predetto integrale è *un minimo*.

Si rappresenti con ω una quantità infinitesima, positiva o negativa, e con $\varphi(x)$ una funzione indeterminata della variabile x: rimanendo l'ascissa $x = OK$, si faccia variare l'ordinata

$y = MK$ di una quantità infinitesima $\omega\varphi(x)$ uguale ad MM', ovvero ad MM''; ciò torna lo stesso che far variare di un tratto infinitesimo la forma della linea OMA, e passare alla nuova curva OM'A, ovvero OM''A. Quando y diviene $y + \omega\varphi(x)$, la derivata y' diverrà $y' + \omega\varphi'(x)$; e ne segue che se l'integrale (1) deve essere *un minimo* relativamente alla curva OMA, rappresentata dalla equazione $y = F(x)$, a questo effetto sarà necessario e sufficiente (LXX) che la differenza

$$\Delta = \int_0^a \left[\frac{\sqrt{1 + (y' + \omega\varphi'(x))^2}}{\sqrt{2gx}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gx}} \right] dx$$

tra il secondo e il primo stato dell'integrale (1), conservi un medesimo segno e risulti positiva, comunque si prenda positivamente o negativamente la quantità infinitesima ω. Ora, giusta la formola di Taylor (LIX), abbiamo per la detta differenza lo sviluppo

$$\Delta = \int_0^a \left[\omega\varphi'(x) \frac{d\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}}{dy'} \right.$$

$$\left. + \frac{\omega^2\varphi'^2(x)}{2} \frac{d^2\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}}{dy'^2} + \dots \right] dx\,;$$

e in questo sviluppo, dipendendo il suo segno da quello ond'è affetto il termine infinitesimo di ordine infimo, fa d'uopo che si annulli il primo termine, affinchè la differenza Δ ritenga sempre un medesimo segno, comunque si prenda la quantità infinitesima ω: dunque nel caso *del minimo* sussisterà

$$\int_0^a \omega\, \varphi'(x) \frac{d\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g\,x}}}{dy'}\, dx = 0 .$$

ossia

$$\int_0^a \varphi'(x) \frac{d\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g\,x}}}{dy'}\, dx = 0 .$$

ma posto per brevità $\frac{d\sqrt{\frac{1+y'^2}{2g\,x}}}{dy'} = f(x)$, e fatta l'integrazione per parti abbiamo

$$\int_0^a \varphi'(x) \frac{d\sqrt{\frac{1+y'^2}{2\,gx}}}{dy'}\, dx = \int_0^a f(x)\, \varphi'(x)\, dx$$

$$= \varphi(a) f(a) - \varphi(0)\, f(0) - \int_0^a \varphi(x)\, f'(x)\, dx\ ;$$

e di più essendo nulle le variazioni della ordinata y nei punti O ed A comuni a tutte le curve, si ha $\omega\,\varphi\,(0) = 0 = \omega\,\varphi\,(a)$, ossia $\varphi\,(0) = 0$ e $\varphi\,(a) = 0$: sussisterà dunque necessariamente $\int_0^a \varphi\,(x) f'(x)\, dx = 0$; e poichè in questa equazione la funzione $\varphi(x)$ è indeterminata, perciò giusta l'osservazione fatta nel numero precedente, sarà pure $f'(x)\, dx = 0$. Integrando quest' ultima formola, ed esprimendo con $\frac{1}{\sqrt{2c}}$ la costante incognita $C\sqrt{2g}$

della integrazione, otterremo $f(x) = C$, ossia otteremo l'equazioni

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d\sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2gx}}}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{2gx}\sqrt{1+y'^2}} = C, \\ & \frac{y'}{\sqrt{x(1+y'^2)}} = C\sqrt{2g} = \frac{1}{\sqrt{2c}} ; \end{aligned} \right.$$

e risolvendo una tale equazione rispetto alla derivata y', otterremo ancora $2cy'^2 = x(1+y'^2)$, vale a dire

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{\frac{x}{2c-x}} .$$

Ora questa è l'equazione differenziale di una cicloide che ha per asse una retta verticale $= 2c$, e per base la retta orizzontale OY condotta dal più elevato dei punti dati O ed A nel loro piano verticale, come si scorge dalla equazione $\frac{dy'}{dx'} = \sqrt{\frac{2c-y'}{y'}}$ già trovata nel numero (C) della Introduzione, quando in essa si tolgano gli apici, e si mutino le x nelle y, e viceversa; dunque la cicloide è per un grave nel vuoto la curva della più breve discesa da un punto a un altro in un piano verticale, come dovevamo dimostrare.

Ho detto: *della più breve discesa*; perchè la differenza Δ non solo conserva sempre un medesimo segno con ω positiva o negativa, ciò che è il fondamento del risultato ottenuto e può accordarsi col *massimo* o col *minimo* dell'integrale (1), ma la medesima differenza è ancora positiva, comunque si prenda la quantità infinitesima ω, e perciò l'integrale (1) non è *un massimo*, ma sì bene *un minimo* rispetto alla cicloide (3). Infatti se nella espressione della differenza Δ, svolta superiormente colla serie di Taylor, si eseguiscano le derivazioni indicate, risulterà

$$\Delta = \int_0^a \left[\frac{y'\omega\varphi'(x)}{\sqrt{2gx}\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\omega^2\varphi'^2(x)}{2\sqrt{2gx}\sqrt{(1+y'^2)^3}} + \omega^2\omega_1 \right] dx ,$$

dove ω_1 è una quantità infinitesima, e il prodotto $\omega^2\omega_1$ rappresenta sotto il segno d'integrazione tra la parentesi la somma di tutti gli altri termini, i quali nella serie sono quantità infinitesime di ordine superiore al secondo: quindi attesa la prima delle equazioni (2), ed attesi puranco i valori $\varphi(0)=0$ e $\varphi(a)=0$, la precedente espressione si muterà in quest'altra

$$\Delta = \int_0^a \left[C\omega\varphi'(x) + \frac{\omega^2\varphi'^2(x)}{2\sqrt{2gx}\sqrt{(1+y'^2)^3}} + \omega^2\omega_1 \right] dx$$

$$= C\omega[\varphi(a)-\varphi(0)] + \omega^2 \int_0^a \left[\frac{\varphi'^2(x)}{2\sqrt{2gx}\sqrt{(1+y'^2)^3}} + \omega_1 \right] dx$$

$$= \omega^2 \int_0^a \left[\frac{\varphi'^2(x)}{2\sqrt{2gx}\sqrt{(1+y'^2)^3}} + \omega_1 \right] dx ;$$

e da questa espressione apparisce che la differenza Δ è sempre positiva, comunque si prenda la quantità infinitesima ω, e che perciò rispetto alla cicloide (3), escluso *il massimo*, avrà luogo *un minimo* per l'integrale (1) che rappresenta il tempo della discesa di un grave nel vuoto dal punto O al punto A.

384. Abbiamo supposto che la curva della più breve discesa per un grave da un punto dato O a un altro punto dato A (fig. 173a), debba giacere in un piano verticale XOY: resta a provare che questa supposizione è conforme al vero; e per recarne la prova, immaginiamo che dalla origine O sia condotto un terzo asse OZ perpendicolare al piano verticale XOY, che viene costitui-

to dagli altri due assi OX ed OY considerati di sopra. Chiamando y', z' le rispettive derivate $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ delle due funzioni $y = F(x)$, $z = F_1(x)$ le quali rappresentano nello spazio la curva che si cerca, avremo (111) per l'elemento del tempo l'espressione più generale

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{\sqrt{2gx}} :$$

quindi il tempo della discesa per un arco di curva da un punto dato O a un altro punto dato A, si esprimerà coll'integrale

$$(4) \qquad \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx}{\sqrt{2gx}} ;$$

e dovrà determarsi la curva OMA, per la quale cotesto integrale abbia un valore *minimò*.

A questo effetto nella espressione integrale (4) si riguardi prima la z' come già nota e si faccia variare la sola incognita y', e viceversa si riguardi di poi come già nota la y' e si faccia variare la sola incognita z': a quel modo che nel numero precedente dalla espressione (1) abbiamo dedotta la prima equazione (2) nel caso *del minimo*, ricaveremo pure dalla espressione (4) nel medesimo caso le due equazioni

$$\frac{y'}{\sqrt{2gx}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = H, \quad \frac{z'}{\sqrt{2gx}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = H',$$

dove H ed H' sono due quantità costanti: eliminato dalle due equazioni il comune denominatore, si ottiene una terza equazione differenziale $\frac{y'}{H} = \frac{z'}{H'}$, ossia $H'\frac{dy}{dx} - H\frac{dz}{dx} = 0$; ne nasce quindi l'equazione finita

$$H'y - Hz = H'',$$

la quale rappresenta una linea retta, ed appartiene insieme alla proiezione della linea della più breve discesa sopra il piano orizzontale YOZ. Ciò essendo, si conchiude che dunque la linea della più breve discesa per un grave da un dato punto a un altro punto dato, è contenuta tutta in un piano verticale, o perpendicolare al piano YOZ; e già abbiamo dimostrato di sopra che essa è una cicloide, la quale ha per base una retta orizzontale condotta dal più elevato dei due punti dati nel loro piano verticale.

385. Veniamo ora all'altra parte della teoria, che ci siamo proposto di trattare al principio di questo capo. Parlando del pendolo abbiamo detto (374. 3°) che la lunghezza di un pendolo che batte i secondi, si accorcia andando dai poli all'equatore, e ne abbiamo inferito che la gravita terrestre è quella che nel medesimo senso diminuisce di intensità. Questa diminuzione della gravità è dovuta principalmente all'azione di una forza contraria, cioè della forza centrifuga che ha origine dal moto circolare di rotazione della terra intorno al proprio asse. Per procedere con ordine, diremo prima alcuna cosa della composizione delle ratazioni, alle quali un corpo può essere sottomesso; poi passeremo a dimostrare che la terra ha realmente un moto di rotazione intorno al proprio asse; finalmente determineremo la quantità della forza centrifuga che ne risulta sopra i corpi, i quali sono posti ne'diversi luoghi della superficie terrestre.

§. 2.°

Rotazione della terra intorno al suo asse, e misura dello forza centrifuga che quindi ne nasce.

386. **Composizione delle rotazioni simultanee.** In un movimento qualunque di rotazione a cui un corpo sia sottomesso, s'hanno a distinguere bene queste tre cose: la *velocità angolare*,

l'*asse*, e il *senso* o il *verso* della rotazione. Per asse di rotazione, come è detto altrove, intendiamo una retta per es. AM (fig. 174ª) sulla quale una serie di punti del corpo in rotazione restano in riposo, e intorno alla quale tutti gli altri punti descrivono altrettanti circoli paralleli di raggio diverso giusta la diversa loro distanza da quella retta, e situati in piani tutti perpendicolari alla retta medesima: i punti dell'asse AM, per effetto della sola rotazione hanno uguale a zero la velocità di traslazione, e non fanno che girare sopra sè stessi. La velocità della rotazione a cui soggiace il corpo o il sistema, la rappresentiamo con una retta p. es. AB di determinata lunghezza, proporzionale alla detta velocità e presa sull'asse AM a partire da A: in ciò si ha il vantaggio di rappresentare con una unica retta tanto la posizione del asse, quanto la grandezza della rotazione o della velocità angolare del sistema. Finalmente il senso della rotazione lo fissiamo in questo modo che l'occhio di un osservatore collocato in M e che traguardi l'asse MA, vegga farsi la rotazione dei punti di tutto il sistema da sinistra a destra nella parte superiore, appunto come succede e si osserva il moto degli indici in un orologio.

Dichiarate queste cose, rappresentiamo rispettivamente con $AB = \omega$, $AC = \omega'$ due velocità angolari o due rotazioni, alle quali si suppone sottomesso a un medesimo tempo un corpo o sistema rigido di punti materiali intorno agli assi concorrenti AM, AN: dobbiamo dimostrare che la diagonale AD del parallelogrammo ABCD, costruito sopra le due rotazioni date, rappresenta la rotazione unica che ne risulta nel corpo, cioè rappresenta sì la direzione dell'asse risultante AL, e sì la intensità della corrispondente velocità angolare ω''.

E primieramente per ciò che spetta alla direzione dell'asse risultante, da un punto qualunque H della diagonale AD si conducano i perpendicoli HP, HQ sopra i rispettivi assi AM, AN; avremo

$$HP : HQ = \text{sen}\,BAD : \text{sen}\,BDA = AC : AB = \omega' : \omega\,,$$

e conseguentemente $\omega.\ HP = \omega'.HQ$. Ora le due quantità $\omega.\ HP$ ed $\omega'.\ HQ$ non esprimono altra cosa (364) che le velocità, colle quali il punto H tende a girare intorno agli assi rispettivi AM ed AN; quindi essendo uguali tra loro queste due velocità, uguali debbono essere anche i piccoli spazii infinitesimi $\omega.\ HP.dt$, $\omega' HQ.dt$, che il punto H in forza delle due rotazioni tende a descrivere con moto uniforme nel tempo infinitesimo dt al di sotto e al di sopra del piano MAN, e nel senso che abbiamo esposto poco innanzi. Ciò vuol dire che tutti i punti del sistema situati sopra la diagonale AD, rimangono immobili nello spazio; vale a dire girano solo sopra sè stessi e non hanno alcuna velocità di traslazione; egli è per questo che la diagonale AD, e solo una tale diagonale, rappresenta la direzione dell'asse risultante AL.

Quanto poi alla intensità della rotazione o velocità angolare ω'' che risulta dalle due ω ed ω', e che abbiamo asserito essere espressa dalla stessa diagonale AD, osserveremo che essendo nullo il moto angolare e nulla la velocità intorno all'asse AM di un punto qualunque K preso sopra questo asse, saranno perciò uguali le velocità colle quali lo stesso punto si muove, sia intorno all'altro asse componente AN, sia intorno all'asse unico risultante AL. Pertanto condotti dal punto K i perpendicoli KF e KE su que'due assi, avremo (364) l'uguaglianza $\omega'.\ KF = \omega''.KE$, e quinci la proporzione

$$\omega' : \omega'' = KE : KF = \text{sen}\,KAE : \text{sen}KAF$$

$$= \text{sen}\,BAD : \text{sen}ABD = AC : AD;$$

nella quale essendo per ipotesi $\omega' = AC$, dee essere necessariamente $\omega'' = AD$.

Da questa semplice ed elegante dimostrazione si deduce che *la composizione e la risoluzione di due o più rotazioni di un corpo intorno ad assi convergenti o paralleli, si effettua come la composizione e la risoluzione di forze dirette lungo gli assi me-*

desimi, e rappresentanti colla loro lunghezza l'intensità delle componenti velocità angolari.

387. **Rotazione della terra intorno al proprio asse.** Le recenti osservazioni e sperienze sopra le oscillazioni dei pendoli hanno fornito alla scienza un nuovo argomento per dimostrare la rotazione, che ha la terra intorno al proprio asse. Due sono i fatti sperimentali: il primo è che il piano di oscillazione di un pendolo rimane immobile nello spazio, sia che il punto di sospensione del pendolo resti in quiete, sia che giri e roti intorno a sè stesso: l'altro è che trasportando nello spazio il punto di sospensione di un pendolo, il piano delle sue oscillazioni rimane costantemente parallelo a sè stesso. Le due sperienze si possono ripetere assai facilmente: formatevi un pendolo con un piccolo globo pesante sospeso a un cordoncino; date prima al cordoncino molti giri di torsione, e poi lasciate andare il pendolo; vedrete che il piano di oscillazione non si altera pel distorcersi che fa il cordoncino, e pel girare del punto di sospensione mentre il pendolo oscilla. Trasportate, camminando lentamente, il vostro pendolo mentre oscilla: osserverete che il piano d'oscillazione vi segue sempre parallello a sè stesso.

Per intendere poi come due fatti sperimentali cotanto semplici sopra le oscillazioni di un pendolo servano a dimostrare la rotazione della terra intorno al suo asse, conviene che ci trasportiamo col pensiero prima ai poli e poi all'equatore terrestre, e che osserviamo i fenomeni che si collegano colle oscillazioni del pendolo. Un pendolo stabilito a uno dei poli della terra, ha il punto di sospensione perfettamente in quiete se la terra non ha alcun moto di rotazione intorno al suo asse; nel caso che la terra giri, esso ha il punto di sospensione che si rivolge intorno a sè stesso. Nell'un caso e nell'altro il piano d'oscillazione del pendolo resta invariabile nello spazio: ma se la terra si muove intorno al suo asse, e il pendolo è lungo bastantemente da poter durare a oscillare per molto tempo, un osservatore che sia indipendente dalla terra e che si ponga a traguardare il piano d'oscillazione, vedrà gli oggetti terrestri che

sono a qualche distanza dal polo trapassare lentamente da una parte del piano alla parte opposta; un osservatore poi il quale sia posto anch'esso sulla terra insieme cogli altri oggetti e abbia un luogo fisso, pel principio del moto relativo egli osserverà invece che il piano d'oscillazione del pendolo è quello che lentamente si muove, e lo vedrà volgersi a mano a mano di un angolo di 15 gradi per ciascun'ora e compiere un'intera circonferenza nello spazio di 24 ore siderali.

Di questa apparente declinazione del piano d'oscillazione di un pendolo, ciascuno comprende che all'equatore terrestre riuscirà vana ogni osservazione; perchè, giri o no la terra intorno a sè stessa, il piano d'oscillazione o rimane immobile assolutamente, ovvero rimane immobile relativamente agli oggetti circostanti e a un osservatore che lo traguardi, anche nella ipotesi che la terra, oltre al moto di rotazione, sia trasportata e trasporti seco nello spazio il punto di sospensione del pendolo. Infatti se la terra si muove intorno al proprio asse nel verso opposto al moto diurno che apparentemente si osserva negli astri, ai due poli della terra la deviazione apparente del piano di oscillazione di un pendolo accadrà, come abbiamo detto, uniformemente da Est ad Ovest, cioè nello stesso verso e colla medesima celerità della sfera celeste; ma essendo la stessa in grandezza la deviazione apparente ai due poli, rispetto a un osservatore si farà evidentemente in versi contrarii, cioè si farà da destra a sinistra dell'osservatore collocato in uno dei due poli, e viceversa da sinistra a destra dell'osservatore posto nell'altro polo: ne segue che dunque nei luoghi che nella superfice terrestre distano ugualmente dai due poli, vale a dire presso l'equatore, la deviazione apparente del piano di oscillazione dovrà essere affatto nulla. Oltre a ciò, presso l'equatore terrestre o il pendolo si fa oscillare nel piano del medesimo equatore, ovvero si fa oscillare nel meridiano del luogo: se il pendolo oscilla nel piano dell' equatore, è chiaro che un tal piano per la rotazione della terra non fa che girare intorno al centro, e contenendo sempre le oscillazioni del pendolo, non muta punto posizione rispetto a un osservatore che

si rivolge anche esso insieme colla terra; se poi il pendolo oscilla nel meridiano, traslocandosi questo di mano in mano in altre posizioni con moto comune al pendolo e all'osservatore, è chiaro che anche in questo caso rimarrà invariabile la posizione relativa del piano di oscillazione, e sarà pur nulla la sua deviazione rispetto all'osservatore: in fine potrebbe un pendolo presso l'equatore oscillare in un piano comunque inclinato all'equatore medesimo; ma poichè in tal caso, decomposto il moto oscillatorio in due moti secondo l'equatore e secondo il meridiano, questi due moti componenti non produrrebbero deviazione alcuna, perciò si conchiude in generale che all'equatore terrestre per un pendolo sarà sempre nulla la deviazione del suo piano di oscillazione.

388. Da questa semplice esposizione che abbiamo creduto bene di mandare innanzi per facilitare l'intelligenza del resto, facilmente si comprende che se nell'eseguire l'esperienza del pendolo nelle diverse latitudini geografiche, si osservi realmente una deviazione del piano d'oscillazione, un tal fatto sarà un nuovo argomento per dimostrare sensibilmente la rotazione della terra intorno al suo asse: ora un tal fatto s'è già verificato in più luoghi, ed è oramai fuor di dubbio. Perchè meglio apparisca la conclusione, dimostriamo che la deviazione apparente del detto piano, la quale è nulla all'equatore e che ai poli è di 360 gradi dentro l'intervallo di 24 ore siderali, negli altri luoghi della terra deve essere proporzionale al seno della latitudine geografica.

Sieno P,P′ (fig. 175.a) i poli dell'asse terrestre, EE′ rappresenti l'equatore, EPE′P′ uno dei circoli meridiani, C sia il centro della terra considerata come una sfera, ed M il luogo dell'osservazione a una latitudine geografica $ECM = \lambda$. Supponendo che la terra abbia un moto di rotazione intorno all'asse PP′, rappresentiamo colla retta CD la sua velocità angolare, ossia l'intensità della sua rotazione, e risolviamola nelle due componenti CA e CB, l'una nel senso della verticale sul luogo dell'osservazione e l'altra orizzontale. Il pendolo che oscilla in M, si trova rispetto alla componente CA nelle medesime circostanze, nelle quali si troverebbe al polo rispetto alla rotazione CD; rispetto poi all'altra compo-

nente CB si trova nella stessa condizione, in cui si troverebbe rispetto alla CD essendo all'equatore. La deviazione apparente del piano d'oscillazione in M sarà dunque nulla per parte della componente CB, e dovrà attribuirsi tutta all'azione dell'altra componente CA, dalla quale sarà pure rappresentata: ora si ha

$$CA = CD \cos MCP = CD \operatorname{sen} \lambda ;$$

dunque se la terra ha un movimento reale di rotazione, la deviazione del piano di oscillazione osservata in un dato luogo dee essere proporzionale al seno della latitudine geografica, ossia dee esprimersi col prodotto della rotazione terrestre pel seno della latitudine. Viceversa se il piano di oscillazione di un pendolo va soggetto apparentemente a una deviazione proporzionale al seno della latitudine geografica, la terra deve avere un movimento di rotazione intorno al proprio asse; giacchè quel fenomeno del piano di oscillazione non può spiegarsi nè ascriversi ad altra cagione, che a questo movimento della terra.

Abbiamo detto innanzi che la deviazione apparente del piano d'oscillazione di un pendolo era stata verificata in più luoghi; ora dobbiamo aggiungere che alla teoria ha da per tutto corrisposto l'osservazione, sicchè il moto rotatorio della terra non può recarsi più in dubbio. Qui in Roma nel 1851 le esperienze furono istituite dal ch. p. A. Secchi nella chiesa del Collegio con un pendolo di quasi 32 metri di lunghezza: la declinazione del piano di oscillazione fu trovata di circa 10 gradi per ciascun'ora siderale, cosicchè un giro intero da Est a Ovest del medesimo piano verrebbe a compiersi nello spazio di circa 36 ore. Un tal risultato s'accorda esattamente colla formola $CA = CD \operatorname{sen} \lambda$: infatti essendo il valore della uniforme rotazione terrestre $CD = 15°$ in un'ora, ed essendo per la latitudine di Roma $\operatorname{sen} \lambda = \operatorname{sen}(41° \, 53' \, 54'') = \frac{2}{3}$ circa; abbiamo a numeri $CA = 15.° \, \frac{2}{3} = 10°$. Questa nuova dimostrazione della rota-

zione della terra sul proprio asse è dovuta all'ingegno del sig. Léon Foucault, il quale pel primo osservò fortuitamente l'invariabilità del piano d'oscillazione, e seppe arricchire la scienza di questo bel risultato.

389. **Forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre.** Tutti i punti della superficie terrestre e tutti i corpi situati sopra di essa, per la rotazione diurna che possiede la terra, debbono descrivere nello spazio o il circolo dell'equatore ovvero circoli paralleli a questo: concepiscono dunque una forza centrifuga che tende a respingerli dal centro del rispettivo circolo o dall'asse della terra, e noi qui vogliamo determinare a numeri la intensità di quella medesima forza.

Considerando la terra come un sfera, sia PP′ (fig. 176.ª) l'asse di rotazione o dei poli, PEP′ uno dei circoli meridiani, $EC = R$ il raggio terrestre all'equatore, $MK = r$ il raggio di un circolo parallelo descritto da un punto materiale o da un corpo M; di più rappresentiamo rispettivamente con v, f, λ la velocità di rotazione, la forza centrifuga, e l'angolo ECM o la latitudine geografica, quali corrispondono alla posizione del detto punto M. Presa per unità la massa del punto o del corpo M, avremo (363)

$$f = \frac{v^2}{r}:$$

si rappresenti ora con T il tempo di una rotazione della terra, ossia un giorno siderale (il giorno siderale è un poco più breve del giorno solare, e corrisponde al tempo che, secondo il suo moto apparente, impiega una stella fissa, partendo da una data posizione nella sfera celeste, a ritornare alla stessa posizione, p. es. al meridiano del luogo di osservazione); poichè la rotazione di M si fa con moto uniforme, sarà $v = \frac{2\pi r}{T}$, e per sostituzione nella formola superiore otterremo

$$f = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Ciò posto, siccome i raggi EC e MK giacciono sopra uno stesso piano e sono perpendicolari all'asse PP', così sono essi paralleli tra loro, e si ha $r = \mathrm{MK} = \mathrm{CM} \cos \mathrm{CMK} = \mathrm{R} \cos \lambda$; conseguentemente la formola precedente diviene

$$f = \frac{4\pi^2 \mathrm{R}}{\mathrm{T}^2} \cos \lambda \,,$$

e vuol dire che *la forza centrifuga eccitata dalla rotazione della terra su i punti materiali o su i corpi che sono sopra la sua superficie, è proporzionale al coseno della latitudine geografica.* Questo coseno di latitudine diminuisce, andando dall'equatore ai poli: perciò è che dall'equatore ai poli diminuisce proporzionalmente al medesimo coseno la forza centrifuga.

L'intensità della forza centrifuga è nulla ai poli della terra: all'equatore dove è massima, ha un valore numerico espresso da

$$\mathrm{F} = \frac{4\pi^2 \mathrm{R}}{\mathrm{T}^2} = 0^m\,,\,0339 \text{ circa}$$

che si ottiene prendendo $\pi = 3,1416$, $\mathrm{R} = 6366739^m$, $\mathrm{T} = 23^{or.}\ 56'\ 4'' = 86164''$ solari; nelle diverse latitudini geografiche la si calcola mediante la formola

$$f = (0^m\,,0339) \cos \lambda \,.$$

390. **Diminuzione della gravità per cagione della forza centrifuga che nasce dalla rotazione della terra.** Rappresentiamo con MD (fig. 176ª) l'intensità della forza centrifuga f, che tende a respingere il punto materiale M dal centro K nella direzione del raggio KM; e risolviamola nelle due componenti MA e MB, la prima orizzontale nel senso della tangente MT, e l'altra verticale nella direzione del raggio terrestre CMN. È manifesto che la prima componente non altera punto la gravità, perchè è perpendicolare alla sua direzione; e che l'altra, che le

è direttamente opposta, rappresenta esattamente la diminuzione che essa soffre per cagione della forza centrifuga. Indicando adesso con f' questa seconda componente MB, avremo

$$f' = \text{MD} \cos \text{BMD} = f \cos \lambda\,;$$

e per sostituzione del valore di f che abbiamo trovato nel numero precedente, otterremo

$$f' = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \cos^2 \lambda\,.$$

Questa espressione significa che *la diminuzione della gravità dovuta alla forza centrifuga è proporzionale al quadrato del coseno della latitudine geografica*. La latitudine diminuisce, andando dai poli all'equatore; cresce però il suo coseno: dunque la diminuzione della gravità per la opposta forza centrifuga, cresce nella detta ragione andando dai poli all'equatore. Con altre parole si vuol dire che mentre la gravità sarebbe da per tutto la stessa, se la terra fosse perfettamente sferica e immota nello spazio; essa per ragione del moto rotatorio e della forza centrifuga che ne risulta, va scemando continuamente sopra la superficie terrestre dai poli all'equatore, come si è già stabilito di sopra (374. 3.°) per mezzo delle oscillazioni di un pendolo semplice.

La diminuzione f' della forza di gravità, è nulla ai poli; sull'equatore terrestre essa è tanta quanta è la forza centrifuga F, che si oppone totalmente alla gravità medesima; alle diverse latitudini intermedie ha un valore, che si calcola colla formola

$$f' = (0^m,0339) \cos^2 \lambda\,.$$

Un'altra cagione di questa diminuzione della gravità dai poli all'equatore, è dovuta alla forma della terra; che in vece di essere sferica, è compressa e schiacciata ai poli, e rigonfia all'equatore. Questo fa sì che ai poli i corpi sieno più vicini al centro

di attrazione, o della terra; e che nella superficie terrestre si vadano tanto più allontanando dal medesimo centro, quanto si appressano più all'equatore: onde la gravità che segue la ragione inversa duplicata delle distanze dal centro della terra, agisce su i corpi collocati alla superficie terrestre con energia sempre minore dai poli sino all'equatore. Diminuisce dunque la gravità nella superficie terrestre dai poli all'equatore, anche pel variare che fanno le distanze dei corpi dal centro della terra.

391. Rappresentiamo con G l'intensità della gravità quale avrebbe luogo all'equatore, nell'ipotesi che la terra non avesse moto alcuno di rotazione; ossia rappresentiamo con G la gravità all'equatore, non diminuita dalla forza centrifuga $F = 0^m, 0339$: siccome la intensità effettiva trovata all'equatore mediante le sperienze del pendolo è $9^m, 7811$; perciò sussisterà

$$G = 9^m, 7811 + 0^m, 0339 = 9^m, 8150.$$

Il rapporto $\frac{G}{F} = 289$ circa. o il valore conseguente di $F = \frac{1}{289} G$ dimostra che all'equatore la gravità perde $\frac{1}{289}$ della sua intensità.

Ora se immaginiamo che il movimento di rotazione che ha la terra addivenga 17 volte più grande; la forza centrifuga che è sempre proporzionale al quadrato della velocità, diverrebbe 289 volte più intensa: in questo caso la forza centrifuga e la gravità presso l' equatore sarebbero uguali e contrarie; conseguentemente i corpi situati sull'equatore non sarebbero più pesanti, e abbandonati a sè stessi rimarebbero in equilibrio.

392. Conchiudiamo il presente capo e paragrafo, accennando un altro modo di provare la rotazione della terra intorno alla linea dei poli, fondato sopra la composizione delle rotazioni simultanee, e precisamenle sopra la *tendenza degli assi di rotazione al parallelismo o alla coincidenza.*

Sia MM′ (fig. 177.a) un corpo solido che ruota intorno a un asse AX, per es. un *toro* metallico o un anello massiccio che per

mezzo di un disco è riunito ed attraversato perpendicolarmente nel centro C da un perno XX′, e intorno a questo perno si muove in giro: poniamo che mentre il toro con moto uniforme si rivolge intorno al suo perno o asse orizzontale AX, la sua massa sia determinata da una pressione o forza continua a rivolgersi ancora insieme col detto asse intorno a un altro asse verticale AY. Nel primo istante in cui agisce la forza continua si rappresentino, secondo la convenzione indicata nel numero (386), le due rotazioni simultanee cogli assi CX ed AY: poichè il secondo di questi assi si può trasportare parallelamente a sè stesso in CZ nel centro C, perciò fatta la composizione delle rotazioni, la diagonale CB del parallelogrammo rettangolo XCZB rappresenterà la rotazione risultante; di tal modo l'asse del toro o il perno CX tenderà a piegarsi verso CZ nel piano XAY, e a prendere la posizione CB, e dopo il primo istante la prenderà di fatto ove sia abbastanza libero, girando il toro intorno all'asse unico CB. Continuando l'azione della forza che senza interrompimento produce la rotazione del toro intorno all'asse verticale AY ovvero CZ, nel secondo istante si farà una nuova composizione della prima rotazione risultante CB colla rotazione continuata intorno a CZ; così risulterà un'altra rotazione intorno a un asse più vicino a CZ, e su questo asse novello si disporrà il perno del toro: il medesimo effetto avrà luogo negli istanti susseguenti, producendosi successivamente, una serie d'*assi istantanei* che si avvicinano sempre più all'asse CZ, fino a tanto che avvenga la coincidenza con quest'ultimo asse; allora l'asse o il perno CX, collocatosi secondo la direzione CZ, sarà parallelo all' asse AY, avrà un medesimo senso con questo, nè si rimuoverà più dalla direzione CZ nel piano XAY, sommandosi insieme le due rotazioni ed ubbidendo il toro senz'altro alla pressione o all'azione della forza continua. Se la rotazione intorno ad AY si effettuasse in verso opposto e fosse rappresentata dall' asse AY′, il perno del toro dalla sua posizione iniziale CX, invece d'innalzarsi fino a CZ, si abbasserebbe collocandosi nella direzione CZ′ parallela e consentanea con AY′; e posto che la rotazione intorno a quest'ultimo asse si rivolgesse di nuovo nel verso primi-

tivo, il perno resterebbe per un istante in equilibrio instabile e farebbe quindi un giro di 180 gradi per rimettersi parallelo e consentaneo coll'asse AY.

Qualunque sia la posizione iniziale dei due assi CX ed AY, per es. quando tutti e due gli assi sono orizzontali, sempre ha luogo il principio della tendenza dei medesimi assi o delle due rotazioni corrispondenti al parallelismo e alla consentaneità; e con un tal principio si spiegano facilmente tutti i fenomeni, che si ammirano nel giroscopio o toro girante, e si rende ragione di molti altri fatti che si osservano nella natura. Per indicare alcuni dei fenomeni del toro girante, diciamo che rotando rapidamente un toro intorno al proprio asse o perno, se si appoggi sopra un piede fisso o sostegno verticale per mezzo di una punta disposta sul prolungamento del suo asse, si vedrà il medesimo toro sorreggersi e prendere così campato in aria insieme col perno, un movimento di rotazione orizzontale intorno al punto di appoggio: in questo caso il toro tendendo a trabboccare per ragione del suo peso, oltre alla rotazione intorno al suo perno orizzontale, si trova determinato dalla gravità a rotare eziandio intorno a un altro asse geometrico orizzontale che passa per il punto di appoggio ed è perpendicolare al perno dell'istrumento; quindi attesa la tendenza dei due assi al parallelismo, il perno si deve spostare orizzontalmente per convenire coll'asse geometrico prodotto dalla gravità, e questo asse spostandosi anch'esso nel medesimo tempo e rimanendo sempre perpendicolare al perno, ne nasce naturalmente nel toro quel movimento continuo di rotazione orizzontale che abbiamo detto poc'anzi. Cessa la rotazione orizzontale, se al di là della punta di sostegno e dalla parte opposta a quella in cui è situato il toro, si colloca sul prolungamento del perno un peso P a tal distanza dalla punta che faccia equilibrio al peso dell'istrumento; e la ragione di questo si è, perchè col contrapeso P viene annullato l'effetto della attrazione terrestre sopra l'istrumento, e perciò il toro non rimane soggetto che alla rotazione intorno al proprio asse: se poi il peso P si colloca tra la punta di appoggio e il punto di equilibrio statico del sistema, la rotazione orizzontale del toro seguita come prima, ma con minore intensità, perchè colla detta disposizione di P è resa

meno intensa la rotazione componente dovuta alla gravità; come per contrario quando si colloca il peso P tra la punta e il toro, resa più intensa la rotazione componente dovuta alla gravità, si effettua anche con maggiore intensità la rotazione orizzontale di prima intorno al sostegno: in fine se il peso P si trasporta al di là del punto di equilibrio statico, sicchè il sistema trabocchi dalla parte opposta a quella del toro, allora si vede questo arrestarsi per un istante dal suo movimento orizzontale, e prendere quindi intorno al punto di appoggio una rotazione contraria a quella di prima; e ciò avviene, perchè invertendosi il senso dell'asse di rotazione prodotta dalla gravità nel sistema, deve anche invertirsi l'asse di rotazione che risulta dai due assi componenti, i quali tendono sempre a disporsi parallelamente in un medesimo verso. Diciamo ancora che tolto il peso P, se si tenta di accelerare o di ritardare la rotazione orizzontale del toro intorno al punto di appoggio, spingendolo nello stesso senso di questo suo movimento, ovvero sospingendolo in senso contrario ed anche solo trattenendolo dal procedere innanzi, si otterrà per effetto un innalzamento o un abbassamento del toro medesimo rispetto al piano orizzontale in cui si muoveva il perno: perchè con quelle impulsioni si determina nell'istrumento una terza rotazione intorno a un asse verticale, che passa per il punto di appoggio ed è diretto verso l'alto o verso il basso, secondo che le impulsioni vengono date nello stesso senso o nel senso opposto al predetto movimento del toro; e la regola per la composizione delle rotazioni ci fa quindi vedere che il perno del toro, come la diagonale del parallelepipedo delle tre rotazioni o l'asse risultante dalla loro composizione, si dovrà innalzare nel primo caso ed abbassare nel secondo.

Per venire da ultimo allo scopo che ci siamo proposto in questo numero, diciamo che attesa la tendenza degli assi di rotazione al parallelismo, coi movimenti del giroscopio si può anche dare una prova sensibile del movimento della terra intorno al proprio asse. È il giroscopio in sostanza un toro girante, il cui asse è mobile in diversi sensi mediante due circoli o anelli diversamente mobili, coi quali il toro e il suo perno sono opportunamante connessi e formano un solo sistema. Ora nel giroscopio rotando il toro intorno al suo

asse, se la terra ha realmente intorno alla linea dei poli un moto di rotazione, alla cui influenza diretta sia sottomesso il toro medesimo, è chiaro che l'asse o il perno di questo per la legge del parallelismo, dovrà collocarsi nel piano del meridiano movendosi in un piano orizzontale, e movendosi anche nel meridiano dovrà quindi disporsi parallelamente all'asse terrestre: questo movimento e disposizione del perno del toro girante si osserva di fatto nel giroscopio in circostanze opportune, nè si può altrimenti spiegare che ammettendo come reale la rotazione della terra intorno al proprio asse; dunque una tale rotazione esiste realmente, e ne sono un argomento palpabile i predetti movimenti che prende il perno del toro nel giroscopio.

CAPO XI.

MOTO DEI SISTEMI MATERIALI E MOMENTI D'INERZIA

§. 1.°

Moto dei sistemi materiali in genere.

393. **Principio di d'Alembert.** Abbiamo trattato fin qui del movimento di un punto materiale, e nel moto dei corpi solidi non abbiamo considerato che qualche caso particolare, e per lo più non abbiamo avuto riguardo che al loro centro di gravità: ci rimane ora a dire generalmente alcune cose intorno al moto dei sistemi, cioè dei punti materiali comunque collegati tra loro. Innanzi a tutto prendiamo a dimostrare un teorema e un principio, di cui siamo debitori a d'Alembert; teorema o principio, mediante il quale un problema di Dinamica si può ridurre a un problema di Statica, e le equazioni del moto si deducono da quelle dell'equilibrio.

Quando più punti materiali sono comunque collegati fra loro, ciascuno di essi, sotto l'azione delle forze che gli vengono applicate, concepisce per la sua connessione cogli altri punti un movimento diverso da quello che prenderebbe se fosse libero ed isolato. Ciò posto, il principio sopraddetto consiste nella seguente proposizione:

in un sistema qualunque di punti, in virtù dei mutui legami, le forze realmente applicate si equilibrano ad ogni istante colle forze uguali ed opposte a quelle che produrrebbero i movimenti attuali ed osservati nel sistema, se tutti i punti fossero liberi e indipendenti gli uni dagli altri.

Sieno in vero A, B, C,... i movimenti che le forze applicate sono per sè capaci d'imprimere nei punti materiali m, m', m'', ... ; e sieno pure a, b, c, ... i movimenti che i medesimi punti a cagione dei loro legami e della loro azione scambievole, prendono di fatto nel sistema. Que' primi movimenti A, B, C, ... si possono decomporre ciascuno nei due rispettivi a ed α, b e β, c e γ,...: immaginata pertanto una tale decomposizione, poichè i punti del dato sistema assumono per ipotesi i rispettivi movimenti a, b, c, ... , perciò dovrà accadere di necessità che gli altri moti componenti α, β, γ,... si distruggano a vicenda, e si equilibrino tra loro le forze ad essi corrispondenti. Ora dei due moti nei quali si risolva un movimento dato, l'uno si può sempre considerare come risultante dall'altro preso col segno opposto e dal movimento stesso che è dato, e così i sopraddetti moti α, β, γ, ... risultano rispettivamente da A, $-a$; B, $-b$; C, $-c$; ... : adunque distruggendosi a vicenda nel sistema que'primi moti α, β, γ, ... , si distruggeranno scambievolmente anche i secondi A, B, C, ... , $-a$, $-b$, $-c$, ... ; o ciò che torna lo stesso, si faranno tra loro equilibrio tutte le forze che corrispondono a questi ultimi movimenti. Ma ai movimenti A, B, C, ... corrispondono le forze realmente applicate ai diversi punti del sistema, e ai movimenti $-a$, $-b$, $-c$, ... corrispondono altre forze uguali e contrarie a quelle, che nei medesimi punti quando fossero liberi produrrebbero i moti attuali e osservati nel sistema: è dunque manifesta la verità del principio esposto di sopra.

Il qual principio si può anche enunciare sotto le forme seguenti: *nel moto di un sistema materiale le forze effettive*, cioè quelle che corrispondono ai moti realmente concepiti dai diversi punti, *se si prendano coi segni opposti, si equilibrano in virtù dei legami colle forze impresse;* oppure *allorquando un sistema materiale si trova in movimento sotto l'azione di un numero qualunque di forze, mediante*

la connessione delle parti, si fanno tra loro equilibrio tutte le forze perdute, cioè quelle che corrispondono ai moti α, β, γ, ... mentovati più sopra. Ancora si noti che il principio ora dimostrato ed espresso in varie forme, vale sempre ed ha luogo per le stesse ragioni, sia nel movimento dei sistemi prodotto dall'azione di forze continue, sia nel movimento iniziale dei medesimi sistemi o più in generale nel movimento dovuto all'azione di forze istantanee, cioè di quelle forze che vengono distinte coi nomi di *percossa* o d'*impulso*, e che operando con grande intensità su i punti di un dato sistema, in un tempo assai corto e da non valutarsi, v'imprimono nondimeno una velocità finita la quale può anche essere ben grande: giova poi il ricordare che le forze istantanee, senza alcuna considerazione del tempo o senza alcun riguardo alla durata brevissima di loro azione, si misurano semplicemente colle quantità di moto che le medesime forze sono capaci di comunicare a un punto materiale affatto libero.

394. **Equazioni spettanti al moto di un sistema libero nello spazio.** La forza motrice di un punto qualunque del sistema o della sua massa m, s'immagini decomposta in tre altre X, Y, Z rispettivamente parallele a tre assi ortogonali, e sieno x, y, z le coordinate del medesimo punto alla fine del tempo t: la forza che produce il moto realmente concepito dal punto materiale m, si risolve pure (297) nelle tre componenti $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$ secondo i medesimi assi; dunque facendo una decomposizione analoga per le forze applicate agli altri punti, conforme al principio del numero precedente dovremo ammettere nel sistema l'equilibrio tra tutte le forze che hanno per componenti X, Y, Z, e le forze a cui si riferiscono le componenti $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$. Ora rispetto a un sistema libero e rigido insieme, ci vogliono per l'equilibrio sei distinte condizioni, e sono queste (85. e'') che si annullino separatamente le somme delle componenti di tutte le forze secondo tre assi rettangolari, ed anche le somme dei momenti delle stesse forze in ordine ai medesimi assi: di più queste sei condizioni, comecchè non sufficienti per l'equilibrio di un sistema libero che abbia variabile la sua forma,

sono però sempre necessarie; giacchè è evidente che un sistema variabile di forma, una volta che si trovi equilibrato, non viene a perdere il suo stato di equilibrio, se noi supponiamo che tutti i punti sieno collegati per mezzo di linee che lo rendano rigido ed immutabile. Adunque nel movimento di un sistema libero qualunque, avranno luogo le sei equazioni

$$\Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0\,,\quad \Sigma\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0\,,\quad \Sigma\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0;$$

$$\Sigma\left[\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)y - \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)z\right] = 0\,,$$

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)z - \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)x\right] = 0\,,$$

$$\Sigma\left[\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)x - \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)y\right] = 0\,;$$

le quali si possono scrivere eziandio sotto le forme seguenti

$$(v)\qquad \begin{cases} \Sigma\left(m\dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(X)\,,\quad \Sigma\left(m\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(Y)\,, \\ \Sigma\left(m\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(Z)\,; \end{cases}$$

$$(v')\qquad \begin{cases} \Sigma m\left(y\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(Zy - Yz)\,, \\ \Sigma m\left(z\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(Xz - Zx)\,. \\ \Sigma m\left(x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(Yx - Xy)\,. \end{cases}$$

Le tre equazioni *(v)* appartengono al moto di traslazione del sistema nelle direzioni degli assi coordinati, e le tre altre equazioni *(v')* spettano al moto di rotazione intorno a questi medesimi assi, e possono anche riferirsi al moto del sistema intorno a un punto fisso preso per origine delle coordinate. Il segno Σ indica delle somme, le quali nei primi membri delle equazioni si estendono a tutti i punti del dato sistema, e nei secondi membri si estendono solo alle forze applicate al sistema.

Colle formole stabilite possiamo ora dimostrare due proprietà generali sul movimento di un sistema qualsiasi libero, e risguardano l'una il centro di gravità, l'altra le aree descritte dai raggi vettori dei punti materiali onde si compone il sistema.

395. **Movimento del centro di gravità e principio della sua conservazione.** Oltre alle denominazioni del numero precedente, dinotiamo con M la massa di tutto il sistema, e con x_1, y_1, z_1 le coordinate del suo centro di gravità alla fine del tempo t: avremo (**109.** *f'*) le tre equazioni

$$(1) \qquad Mx_1 = \Sigma(mx)\,,\ My_1 = \Sigma(my)\,,\ Mz_1 = \Sigma(mz)\ ;$$

le quali, differenziate che sieno due volte rispetto al tempo, divengono

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\right),\ M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma\left(m\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

$$M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma\left(m\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Confrontando queste colle equazioni *(v)* trovate di sopra, otterremo le tre formole

$$(v'')\quad \left\{ \begin{aligned} & M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma(X)\,,\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma(Y)\,, \\ & M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma(Z)\,, \end{aligned} \right.$$

che spettano evidentemente al moto del centro di gravità del dato sistema. Ore queste medesime formole, come apparisce dal numero (297), rappresentano il movimento di un punto materiale libero che abbia la massa M, e venga sollecitato da tutte le forze del sistema giusta le rispettive loro direzioni: dunque *in un sistema libero qualunque il centro di gravità si muove nello stesso modo, come se tutta la massa del sistema vi fosse riunita, e tutte le forze vi fossero trasportate parallelamente a sè stesse.*

Le formole (v''), e la conseguenza che ne abbiamo dedotta rispetto al centro di gravità di un sistema libero, si riferiscono al movimento da cui questo centro è animato in qualunque istante sotto l'influsso delle forze continue che sollecitano i diversi punti del medesimo sistema: ma una stessa conclusione ha pur luogo relativamente al moto iniziale del sistema, che supporremo prodotto dall'azione di forze istantanee. Rappresentandosi con A, B, C secondo gli assi coordinati le tre componenti della forza istantanea applicata a un punto qualunque $(x,\ y,\ z)$ di massa m, saranno $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ le componenti della velocità colla quale il punto m si muoverà di fatto nel sistema in virtù degli impulsi iniziali; le forze effettive o le quantità di moto $m\frac{dx}{dt}, m\frac{dy}{dt}, m\frac{dz}{dt}$ relative ai singoli punti del sistema, se si prendono coi segni contrarii, dovranno equilibrarsi (393) mediante la connessione di tutte le parti del sistema colle forze A, B, C istantaneamente impresse ai diversi punti tra loro connessi: ora tra le altre condizioni di questo equilibrio, vi è anche la condizione (85) che si annullino separatamente le somme algebriche delle proiezioni di tutte le forze sopra i tre assi coordinati: si avranno dunque le tre equazioni

$$\Sigma(A) - \Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right) = 0 \ , \ \Sigma(B) - \Sigma\left(m\frac{dy}{dt}\right) = 0 \ ,$$

$$\Sigma(C) - \Sigma\left(m\frac{dz}{dt}\right) = 0 \ ,$$

ovvero

$$\Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma(A) \ , \ \Sigma\left(m\frac{dy}{dt}\right) = \Sigma(B) \ , \ \Sigma\left(m\frac{dz}{dt}\right) = \Sigma(C) \ ;$$

e queste equazioni, avuto riguardo alle formole (1) differenziate una sola volta rispetto al tempo t, divengono

$$M\frac{dx_1}{dt} = \Sigma(A) \ , \ M\frac{dy_1}{dt} = \Sigma(B) \ ; \ M\frac{dz_1}{dt} = \Sigma(C) \ .$$

Queste ultime formole, le quali appartengono al centro di gravità del sistema, ci dicono apertamente che nello stato inziale le componenti delle quantità di moto, e per conseguenze le componenti ancora della velocità del centro, sono identiche a quelle di un punto materiale libero che avesse la massa **M** di tutto il sistema, e fosse sollecitato, giusta le proprie direzioni, da tutte le forze istantanee che agiscono da principio sopra lo stesso sistema: dunque sono pure identici tra loro il movimento iniziale del centro di gravità, e il movimento del detto punto materiale. Congiungendo insieme la presente conclusione e la conclusione precedente, potremo formarne una sola proposizione; vale a dire *in un sistema qualunque libero il centro di gravità si muove nello stesso modo come se tutta la massa del sistema vi fosse riunita, e vi fossero trasportate parallelamente a sè stesse tutte le forze istantanee e continue, le quali producono rispettivamente il moto iniziale e i movimenti susseguenti del medesimo sistema.*

Segue da ciò che le cose da noi dette e dimostrate sul movimento di un punto materiale, convengono tutte e possono applicarsi al

moto del centro di gravità di un sistema qualunque libero, quando in un tal centro si supponga raccolta tutta la massa e applicata immediatamente ciascuna delle forze del sistema colla propria direzione; cioè nel moto progressivo un sistema o un corpo libero si può considerare come ristretto nel suo centro di gravità e ridotto a un semplice punto, e sotto questo aspetto noi abbiamo risguardato alcuni corpi solidi e trattato del loro moto progressivo nei capi precedenti. — Ancora s'inferisce che il moto del centro di gravità sarà rettilineo ed uniforme, quando il sistema si muove solo per l'impulso di forze istantanee o per le velocità preconcepite, e non è sottoposto all'azione di alcuna forza continua; oppure quando le forze continue del sistema o si equilibrano insieme e si distruggono a vicenda trasportate nel centro di gravità secondo le proprie direzioni, o provengono dalle mutue azioni dei punti materiali che a due a due sono uguali tra loro ed opposte. *In questa seconda conseguenza consiste il principio della conservazione del moto che ha il centro di gravità.*

A norma di un tal principio, dobbiamo dire che il centro di gravità del sistema planetario è animato da un moto prossimamente rettilineo ed equabile; giacchè da una parte a cagione delle enormi distanze è quasi nulla sul sistema l'attrazione esterna che proviene dalle stelle, e dall'altra parte le altre forze motrici sono tutte interne al sistema e consistono nelle mutue azioni dei pianeti e delle melecole componenti tra loro. — Dobbiamo anche ammettere che in un sistema il movimento del centro di gravità non rimane per nulla alterato, sia dagli urti che succedano tra i' diversi corpi del sistema, come abbiamo veduto in un caso particolare nel numero (251), sia ancora dai nuovi legami che si stabiliscano improvvisamente tra alcune parti del medesimo sistema, sia in fine da qualche scoppio che accada nell'interno del corpo o del sistema e ne scommetta più o meno i varii elementi: in tutti questi casi le nuove forze che si sviluppano nel sistema, non sono che azioni e reazioni interiori, le quali come equivalenti ed opposte si distruggono scambievolmente tra loro.

396. Principio della conservazione delle aree o de' momenti delle quantità di moto. Consideriamo adesso le tre altre equazioni del movimento de' sistemi, e caviamone la dimostrazione di un secondo principio generale. Supponiamo che nelle tre equazioni (v') del numero (394), le quali valgono ancora per il moto di un sistema intorno all'origine fissa, si annullino i secondi membri o le somme dei momenti delle forze date rispetto ai tre assi rettangolari OX, OY, OZ: avremo le formole

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0\,,\quad \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0\,,$$

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0\,;$$

le quali moltiplicate per dt, ed integrate rispetto a t, diventano

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\mathrm{C}\,,\quad \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\mathrm{C}'\,,$$

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\mathrm{C}''\,.$$

In queste formole le tre quantità C, C′, C″ sono costanti; e i primi membri rappresentano rispetto agli assi le somme dei momenti (85) delle quantità di moto, che risiedono nel sistema a un istante qualunque ed hanno per componenti $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$: dunque *nella ipotesi espressa di sopra, in un sistema sono sempre costanti le somme dei momenti delle quantità di moto rispetto a ciascuno di tre assi rettangolari, ed è pur costante per conseguenza la somme dei momenti delle medesime quantità rispetto a un asse qualunque.* Ciò può anche intendersi nel modo seguente. A un istante qualunque si considerino le quantità di moto onde sono animati i diversi punti del sistema, come altrettante forze applicate ai medesimi

punti (e sono appunto quelle forze istantanee, le quali produrrebbero nei singoli punti liberi e in riposo il movimento che questi hanno di fatto nel sistema), e si concepisca inoltre ciascuna di tali forze risoluta in tre altre forze dirette secondo gli assi coordinati, e in tre coppie che hanno rispettivamente per assi queste stesse direzioni (208): è chiaro che i primi membri delle ultime equazioni non saranno altro che le somme delle coppie di riduzione, situate nei tre piani coordinati ed espresse coi loro momenti rispettivi; e così in ciascuno dei piani coordinati o rispetto a ciascuno dei tre assi, sarà costante la somma di quelle coppie o dei momenti corrispondenti, sempre nella ipotesi che abbiamo fatta da principio: e poichè le coppie o i loro momenti si rappresentano coi loro assi di grandezze proporzionali, e si compongono alla maniera delle semplici forze; perciò nella medesima ipotesi, cioè per es. che sieno nulle le forze motrici nel sistema, sarà costante in intensità e direzione l'asse o il momento della coppia risultante da quelle somme di coppie che abbiamo detto di sopra e che si riducono semplicemente a tre coppie componenti. L'asse di un tal momento o coppia risultante, giusta la legge della composizione di tre forze rettangolari, ha per espressione $\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}$, e forma cogli assi coordinati tre angoli, i cui coseni sono dati dalle rispettive espressioni

$$\frac{C''}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}, \quad \frac{C'}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{C^2+C'^2+C''^2}},$$

E dobbiamo anche notare che se mantenuta l'origine e cangiate le direzioni degli assi rettangolari, si risolve l'asse della coppia o del momento risultante in tre altri giusta i nuovi assi coordinati, è chiaro che insieme cogli assi si muteranno bensì le tre somme, delle nuove coppie componenti o dei loro momenti, e si esprimeranno per tre costanti diverse da quelle di prima, ma che resterà invariabile in intensità e direzione, e sarà sempre quel di prima l'asse della coppia risultante o del suo momento; perciò quantunque in ordine ai diversi ternarii di assi rettangolari condotti per una

stessa origine sieno diverse le tre somme dei momenti delle coppie componenti che provengono dalle quantità di moto del sistema non sollecitato da forze motrici, pur nondimeno sarà costante per tutti i ternarii di assi la somma dei quadrati di quelle medesime somme, essendo essa sempre uguale al trinomio $C^2 + C'^2 + C''^2$, che rappresenta in ogni caso il quadrato del momento invariabile della coppia risultante di tutte le quantità di moto onde è animato il sistema a un dato istante qualunque.

La conclusione precedente si può anche presentare sotto un'altra forma. Fermato il polo nella origine delle coordinate, le tre differenze $y\,dz - z\,dy$, $z\,dx - x\,dz$, $x\,dy - y\,dx$ esprimono sopra i piani coordinati YZ, ZX, XY il doppio delle proiezioni dell'area infinitesima, che descrive nello spazio il raggio vettore di qualsiasi punto m nel tempuscolo dt: laonde se indichiamo queste proiezioni con $d\alpha$, $d\alpha'$, $d\alpha''$, e facciamo anche $\frac{1}{2}C = c$, $\frac{1}{2}C' = c'$, $\frac{1}{2}C'' = c''$, le formole stabilite ultimamente potremo scriverle nel modo seguente

$$\Sigma\left(m\frac{d\alpha}{dt}\right) = c\,, \quad \Sigma\left(m\frac{d\alpha'}{dt}\right) = c'\,, \quad \Sigma\left(m\frac{d\alpha''}{dt}\right) = c''\,.$$

Fatta la moltiplicazione per dt, e presi gli integrali di maniera che le aree incomincino col tempo t, si avranno le formole finite

$$\Sigma(m\alpha) = ct\,, \quad \Sigma(m\alpha') = c't\,, \quad \Sigma(m\alpha'') = c''t\,;$$

vale a dire nella supposizione che in un sistema si annullino le somme dei momenti delle forze date rispetto a tre assi rettangolari, sopra i tre piani coordinati riusciranno sempre proporzionali al tempo le somme dei prodotti delle masse per le rispettive proiezioni delle aree che descrivono i raggi vettori di tutti i punti del sistema. Ora le somme dei momenti prenominati sono evidentemente nulle, riducendosi a zero i secondi membri delle equazioni (v'. 394), in questi tre casi: 1.° se nel sistema in movimento non vi hanno forze acceleratrici o motrici, ovvero se consistono queste solo nelle

azioni scambievoli dei punti materiali; 2.° se le forze motrici si equilibrano a vicenda su di un sistema rigido che si muova liberamente nello spazio, ovvero su di un sistema qualunque libero che si supponga solidificato e rigido per mezzo di opportuni legami, come è chiaro per le condizioni del numero (85), e per le cose notate nel numero (394) intorno all'equilibrio di un sistema di forma variabile; 3.° se le medesime forze motrici si fanno equilibrio in un sistema mobile intorno a un punto fisso che si prenda per origine delle coordinate, come apparisce dalle prime condizioni del numero (86), ovvero se quelle forze si riducono tutte a una forza unica che passi per l' origine arbitraria delle coordinate, giacchè in tal caso insieme col momento della risultante si annullano pure i momenti di tutte le forze rispetto a ciascuno dei tre assi: dunque *in questi casi, se dalla origine s' intendano condotti tanti raggi ai punti del sistema, e se quindi le aree descritte sopra ciascuno dei piani coordinati o sopra un altro piano qualunque dalle proiezioni di quei raggi si moltiplichino per le masse di questi punti e si aggiungano tutte insieme, la somma che ne risulta, sarà sempre proporzionale al tempo, e però si conserverà costante per intervalli di tempo uguali fra loro.* In questa proposizione è riposto il *principio della conservazione delle aree*, come nella proposizione precedente si contiene il *principio della conservazione dei momenti delle quantità di moto.*

397. **Equazione delle forze vive e principio della loro conservazione.** Ai principii esposti nei numeri precedenti ne aggiungiamo qui un altro che risguarda le forze vive di un sistema qualunque di punti, nel quale peraltro le condizioni e i legami non dipendano per nulla dal tempo.

Alla fine di un tempo t sieno nel sistema x, y, z le coordinate ortogonali; X, Y, Z le componenti della forza motrice secondo gli assi; v, m la velocità e la massa di un punto qualunque. In virtù del teorema di d'Alembert, dovrà sussistere l' equilibrio fra le forze

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\ Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\ ,\ Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$$

che spettano al punto m, ossia (x, y, z), e le forze della stessa forma che si riferiscono agli altri punti (x', y', z'), (x'', y'', z''), ... del dato sistema: ma perchè sussista un tale equilibrio, basta (220 e segg.) che sia nulla la somma dei momenti virtuali di tutte le forze per un moto qualunque virtuale ed infinitesimo che risponda alle condizioni e ai legami del sistema: dunque poichè da una parte il moto che prende realmente il sistema nel tempuscolo susseguente dt, risponde senza dubbio a tutte le sue condizioni e ai suoi legami, e dall' altra parte in un tal moto del sistema i momenti virtuali delle forze si esprimono (214) coi prodotti di questa forma

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx\ ,\ \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy\ ,\ \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\ ;$$

perciò si avrà la equazione differenziale

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right] = 0,$$

ovveramente

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right) = \Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\ .$$

Ora noi abbiamo (XLVII. 296) il valore

$$\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz$$

$$= \frac{1}{2} d\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) = \frac{1}{2} d.v^2 ;$$

sarà dunque in fine

$$(v''') \qquad .d.\Sigma(mv^2) = 2\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) .$$

Il prodotto mv^2 non è altro (252) che la forza viva di un punto qualunque m al termine di un tempo t, e il trinomio $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ rappresenta (218) il momento virtuale, ovvero anche (226) il lavoro di quella forza ond'è sollecitato lo stesso punto del sistema. Per la qual cosa l'equazione differenziale (v''') appartiene alle forze vive dei sistemi, e ci mostra la verità di questa proposizione: *nel movimento di un sistema materiale l'incremento che per ogni intervallo infinitesimo di tempo riceve la somma di tutte le forze vive, è sempre uguale alla duplice somma dei lavori che si effettuano nel medesimo intervallo dalle forze applicate ai singoli punti del sistema; e però in un tempo qualsivoglia finito, la variazione totale della forza viva del sistema si esprime costantemente col doppio del lavoro di tutte le forze sollecitanti.*

398. Quando il sistema si muove per le velocità preconcepite, e le forze motrici o sono nulle o si equilibrano tra loro ad ogni istante, il secondo membro della equazione (v''') si ridurrà a zero (221), e la somma delle forze vive $\Sigma(mv^2)$ sarà costante. È questo il *principio della conservazione delle forze vive.*

Con un tal nome da alcuni Fisici si vuole ancora significare un'altra proprietà, ed è che sotto certa condizione la forza viva riprende sempre lo stesso valore, ritornando il sistema a una medesima posizione. La condizione richiesta per un tal fatto, consiste in questo che l'espressione $\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ sia il differenziale esatto di una funzione di tutte le coordinate x, y, z, x', y', z', ...; cioè che provenga dalla differenziazione di una certa funzione $f(x, y, z, x' \ldots)$ delle medesime coordinate. Di fatti in

questa supposizione la formola (v'''), mediante l'integrazione, diviene

$$\Sigma(mv^2) = 2f(x, y, z, x', \ldots) + \text{Cost.};$$

ed anche

$$\Sigma(mv^2) - \Sigma(mv_0^2) = 2f(x, y, z, x', \ldots) - 2f(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots),$$

dinotandosi con v_0 ed x_0, y_0, z_0, x'_0, ... le velocità e le coordinate dei punti del sistema al principio del moto, o del tempo t: quindi apparisce che quando ricorrono nuovamente tutte le coordinate x, y, z, x', ...,e il sistema nel suo movimento passa di nuovo per una medesima posizione, la forza viva $\Sigma(mv^2)$ torna ad essere la stessa ed assume il valore di prima, qualunque sieno state le curve descritte dai singoli punti del sistema. Quando poi si considera il passaggio di tutto il sistema dalla posizione iniziale a un'altra posizione qualsiasi, varierà bensì la forza viva del medesimo; ma la variazione $\Sigma(mv^2) - \Sigma(mv_0^2)$ sarà sempre la stessa, qualunque sia il cammino dei punti nell'andare dalla prima alla seconda posizione.

399. Supponiamo per un caso particolare che i punti del sistema sieno soggetti alla sola azione della gravità: se l'asse delle z si dirige dall'alto al basso nel senso della gravità, si avranno $X = 0$, $Y = 0$, $Z = mg$; perciò l'espressione $\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ sarà il differenziale esatto della quantità variabile $g\Sigma(mz)$, e l'equazione (v''') del numero (397) ci darà

$$\Sigma(mv^2) = 2g\Sigma(mz) + C,$$

dove la costante C, determinata per la velocità e la posizione iniziale del sistema, risulta uguale alla differenza $\Sigma(mv_0^2) - 2g\Sigma(mz_0)$. Ora indicando con M la massa totale del sistema, e con z_1 la coordinata verticale del suo centro di gravità, abbiamo (109. f)

$$\Sigma(mz) = z_1\Sigma(m) = Mz_1 .$$

Sarà dunque $\Sigma(mv^2) = 2gMz_1 + C$, e così *nel movimento di un sistema pesante la forza viva dipenderà unicamente dall'altezza del centro di gravità, e tornerà la medesima tutte le volte che questo centro ripassa per uno stesso piano orizzontale.*

Per un altro caso particolare, allorchè succede qualche urto tra le parti del sistema in movimento, la forza viva in generale sarà diversa avanti e dopo l'urto. Ma poichè le azioni scambievoli che si esercitano nell'urto, dipendono solo dalle distanze dei diversi punti, e poichè per le azioni di tal natura si è già dimostrato (231) che l'espressione $\Sigma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ è un differenziale esatto; perciò la forza viva del sistema non si cangerà punto per la collisione e ripiglierà esattamente lo stesso valore, quando le parti o i corpi che si urtano, dopo la compressione passano di nuovo per le successive posizioni di prima e ritornano alla primitiva forma, come interviene nei corpi perfettamente elastici: quanto agli altri corpi, si perderà per l'urto una porzione tanto maggiore di forza viva, quanto minore è il grado di elasticità. A questa stessa conclusione siamo venuti direttamente nel numero (252), restringendoci alla considerazione dei corpi sferici ed omogenei.

400. Circa le forze vive si dimostra eziandio il teorema seguente: *la forza viva di un dato sistema, tuttochè non interamente libero nello spazio, nel suo moto assoluto si può sempre risolvere in due parti; la prima è la forza viva che avrebbe il sistema se tutta la sua massa fosse condensata nel centro di gravità, l'altra è la forza viva dovuta al moto relativo del sistema riferito al centro di gravità riguardato come fisso.*

Sia $M = \Sigma(m)$ la massa del sistema; sieno x, y, z le coordinate rettangolari di un punto qualunque m riferito a tre assi fissi, e sia v la sua velocità alla fine del tempo t; sieno x_1, y_1, z_1 le corrispettive coordinate del centro di gravità, e v_1 la sua velocità; sieno ξ, η, ζ, le coordinate del detto punto m riferito a tre assi mobili che hanno l'origine nel centro di gravità, e sono rispettivamen-

te paralleli agli assi fissi; finalmente sia u la velocità di m relativa al centro, quale cioè la vedrebbe un osservatore collocato nel centro di gravità. Abbiamo (296)

$$\Sigma(mv^2)=\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]:$$

di più si ha

$$x=x_1+\xi\ ,\ y=y_1+\eta\ ,\ z=z_1+\zeta\ ,$$

e conseguentemente

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx_1}{dt}+\frac{d\xi}{dt}\ ,\ \frac{dy}{dt}=\frac{dy_1}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\ ,\ \frac{dz}{dt}=\frac{dz_1}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\ ;$$

noteremo dunque

$$\Sigma(mv^2)=\Sigma m\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]$$

$$+\Sigma m\left(2\,\frac{dx_1}{dt}\cdot\frac{d\xi}{dt}+2\,\frac{dy_1}{dt}\cdot\frac{d\eta}{dt}+2\,\frac{dz_1}{dt}\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

$$+\Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right].$$

Siccome però si possono mettere fuori del segno Σ le quantità $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ per la ragione che restano le medesime pe' diversi punti m, e si ha inoltre (109. f')

$$\Sigma\left(m\,\frac{d\xi}{dt}\right)=\frac{d\xi_1}{dt}\,\Sigma(m)=0\ ,\ \Sigma\left(m\,\frac{d\eta}{dt}\right)=\frac{d\eta_1}{dt}\,\Sigma(m)=0\ ,$$

$$\Sigma\left(m\frac{d\zeta}{dt}\right)=\frac{d\zeta_1}{dt}\,\Sigma(m)=0\,;$$

così l'equazione precedente diviene

$$\Sigma(mv^2)=\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]\Sigma(m)$$

$$+\Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right],$$

ossia più brevemente

$$(2)\qquad \Sigma(mv^2)=\mathrm{M}v_1^2+\Sigma(mu^2)$$

la quale formola dimostra apertamente la verità della proposizione enunciata.

401. Giacchè abbiamo fatto menzione del moto relativo di un sistema, cioè del moto di un sistema in ordine a una origine e a tre assi mobili, ci piace di aggiungere che *l'equazione* (v'''. 397) *delle forze vive ha pur luogo nel movimento relativo di un sistema affatto libero in ordine al suo centro di gravità, come se questo centro fosse un punto fisso.*

Infatti, ritenute le denominazioni delle diverse quantità considerate nel numero precedente rispetto alla origine fissa e al centro mobile di gravità, nella equazione delle forze vive

$$d.\Sigma(mv^2)=2\,\Sigma(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)$$

che risguarda il moto assoluto di un sistema qualunque, in cui i legami siano indipendenti dal tempo, possiamo sostituire in luogo di $\Sigma\,(mv^2)$ il valore (2) trovato poc'anzi, e in vece dei semplici differenziali dx, dy, dz possiamo sostituire i rispettivi differenziali composti $dx_1+d\xi$, $dy_1+d\eta$, $dz_1+d\zeta$ in virtù delle tre relazioni

$$x = x_1 + \xi\ ,\ \ y = y_1 + \eta\ ,\ \ z = z_1 + \zeta\ ;$$

di tal modo si avrà

$$d.\mathrm{M}\, v_1^2 + d.\,\Sigma(mu^2) = 2\,\Sigma(\mathrm{X}\, dx_1 + \mathrm{Y}\, dy_1 + \mathrm{Z}\, dz_1)$$

$$+ 2\,\Sigma(\mathrm{X}\, d\xi + \mathrm{Y}\, d\eta + \mathrm{Z}\, d\zeta)\ .$$

Ora le tre equazioni (v'') del numero (395), le quali valgono pel centro di gravità di un sistema libero nello spazio, moltiplicate rispettivamente per $2\, dx_1$, $2\, dy_1$, $2\, dz_1$, e quindi congiunte insieme colla somma, ci danno $\mathrm{M}\, \frac{2d^2x_1\, dx_1 + 2d^2y_1\, dy_1 + 2d^2 z_1\, dz_1}{dt^2}$, ossia (XLVII. 296)

$$d.\mathrm{M}\, v_1^2 = 2\,\Sigma(\,\mathrm{X}\, dx_1 + \mathrm{Y} dy_1 + \mathrm{Z} dz_1)\ ;$$

dunque l'equazione superiore si ridurrà semplicemente a quest' altra

$$d.\Sigma(mu^2) = 2\,\Sigma(\mathrm{X}\, d\xi + \mathrm{Y}\, d\eta + \mathrm{Z}\, d\zeta)\ ,$$

la quale è l'equazione stessa e ci rappresenta il teorema delle forze vive nel movimento relativo di un sistema libero in ordine al centro di gravità, cioè nel movimento del sistema riferito a tre assi rettangolari che si conducono per il centro di gravità considerato come un punto fisso.

Dal secondo membro della equazione viene espressa bensì, come nel moto assoluto, la doppia somma dei lavori relativi o apparenti che si effettuano dalle forze motrici in ogni intervallo infinitesimo di tempo; ma si osservi che queste forze motrici non sono già le forze dei punti del sistema relative al centro di gravità,

ma sono le forze stesse date e applicate immediatamente ai medesimi punti del sistema: laddove nel moto del sistema rapporto ad un'altra origine qualunque e ad altri assi mobili, eccetto le masse, sono tutte relative le quantità che concorrono a comporre l'equazione delle forze vive; cioè in questa equazione che ha pur luogo nel moto relativo di un sistema materiale, la forza motrice per ciascun punto sarà, come si è dichiarato nel numero (318), quella che risulta dalle forze applicate realmente al punto ed inoltre da una forza uguale, contraria e parallela alla forza che agisce sopra l'origine mobile e trasporta gli assi parallelamente a sè stessi.

402. *Nel movimento relativo di un sistema affatto libero rispetto al suo centro di gravità, non solo sussiste sempre l'equazione propria delle forze vive, ma ha pur luogo il principio dei momenti delle quantità di moto o il principio delle aree, come se il detto centro fosse un punto fisso.*

Conserviamo tutte le notazioni dei numeri precedenti, e nelle formole (v') del numero (394), in luogo delle coordinate x, y, z poniamo i loro valori $x=x_1+\xi$, $y=y_1+\eta$, $z=z_1+\zeta$; otterremo le tre equazioni

$$\Sigma m\left[(y_1+\eta)\frac{d^2z_1+d^2\zeta}{dt^2}-(z_1+\zeta)\frac{d^2y_1+d^2\eta}{dt^2}\right]$$

$$=\Sigma[Z(y_1+\eta)-Y(z_1+\zeta)],$$

$$\Sigma m\left[(z_1+\zeta)\frac{d^2x_1+d^2\xi}{dt^2}-(x_1+\xi)\frac{d^2z_1+d^2\zeta}{dt^2}\right]$$

$$=\Sigma[X(z_1+\zeta)-Z(x_1+\xi)],$$

$$\Sigma m\left[(x_1+\xi)\frac{d^2y_1+d^2\eta}{dt^2}-(y_1+\eta)\frac{d^2x_1+d^2\xi}{dt^2}\right]$$

$$=\Sigma[Y(x_1+\xi)-X(y_1+\eta)].$$

Ora eseguite le moltiplicazioni, e posti fuori del simbolo Σ i fattori che contengono le coordinate del centro e sono comuni ai termini spettanti ai diversi punti m, abbiamo [395. (v'')] in un sistema libero

$$\Sigma\left(m y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2}\right) = y_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} \Sigma(m) = y_1 \Sigma(Z) \, ,$$

$$\Sigma\left(m z_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right) = z_1 \Sigma(Y) \, , \quad \Sigma\left(m z_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}\right) = z_1 \Sigma(X) \, ,$$

$$\Sigma\left(m x_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2}\right) = x_1 \Sigma(Z) \, , \quad \Sigma\left(m x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\right) = x_1 \Sigma(Y) \, ,$$

$$\Sigma\left(m y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}\right) = y_1 \Sigma(X) \, ;$$

abbiamo inoltre (109. f')

$$\Sigma\left(m y_1 \frac{d^2 \zeta}{dt^2}\right) = y_1 \Sigma\left(m \frac{d^2 \zeta}{dt^2}\right) = y_1 \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} \Sigma(m) = 0 \, ,$$

$$\Sigma\left(m z_1 \frac{d^2 \eta}{dt^2}\right) = 0 \, , \quad \Sigma\left(m z_1 \frac{d^2 \xi}{dt^2}\right) = 0 \, , \quad \Sigma\left(m x_1 \frac{d^2 \zeta}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\Sigma\left(m x_1 \frac{d^2 \eta}{dt^2}\right) = 0 \, , \quad \Sigma\left(m y_1 \frac{d^2 \xi}{dt^2}\right) = 0 \, ;$$

abbiamo in fine *(ibid.)*

$$\Sigma\left(m \eta \frac{d^2 z_1}{dt^2}\right) = \frac{d^2 z_1}{dt^2} \Sigma(m \eta) = \frac{d^2 z_1}{dt^2} \eta_1 \Sigma(m) = 0 \, ,$$

$$\Sigma\left(m\zeta\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)=0\,,\ \Sigma\left(m\zeta\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)=0\,,\ \Sigma\left(m\xi\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)=0,$$

$$\Sigma\left(m\xi\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)=0\,,\ \Sigma\left(m\eta\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)=0\,.$$

Se dunque nei primi membri togliamo tutti questi termini che si annullano, e facciamo la riduzione degli altri termini con quelli che appartengono ai secondi membri, le tre equazioni precedenti divengono semplicemente

$$(v^{\text{IV}})\quad\left\{\begin{aligned}&\Sigma m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)=\Sigma(Z\eta-Y\zeta)\,,\\&\Sigma m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)=\Sigma(X\zeta-Z\xi)\,,\\&\Sigma m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)=\Sigma(Y\xi-X\eta)\,.\end{aligned}\right.$$

Queste formole (v^{IV}) che spettano al moto relativo di un sistema libero in ordine al centro di gravità, sono in tutto somiglianti alle formole (v') del numero (394), le quali spettano al movimento dello stesso sistema in ordine a una origine e a tre assi fissi; perciò nel moto relativo al centro di gravità di un sistema libero, in virtù delle formole (v^{IV}), dovremo ammettere delle proprietà somiglianti a quelle che sotto certe condizioni abbiamo dedotto (396) nel moto assoluto di un sistema qualunque dalle formole (v'). Così se le forze motrici consistono nelle sole azioni scambievoli dei punti materiali, come di fatto consistono in queste azioni rispetto al nostro sistema planetario, ovvero se quelle forze si equilibrano fra loro su di un sistema libero che si supponga divenire rigido a un tratto, oppure se le medesime forze si riducono tutte a una sola che passi per il centro di gravità del sistema, si annulleranno certamente in questi diversi casi i secondi membri delle tre equazioni

(v^{IV}); e ne seguirà che la somma delle aree descritte dalle proiezioni dei raggi vettori sopra ciascuno dei piani coordinati, o sopra un piano qualunque che passi per il centro di gravità, moltiplicate per le masse dei punti corrispondenti, varia sempre in ragione diretta del tempo ed è costante in tempi uguali: di tal maniera *il principio della conservazione delle aree, come ancora il principio analogo della conservazione dei momenti delle quantità di moto, si verifica ancora nel movimento relativo di un sistema libero rispetto al centro di gravità.* — Aggiungiamo al solito alcuni problemi, la cui soluzione dipende dalle cose esposte in questo paragrafo.

403. **Problema** I. *Una catenella pesante ed omogenea* DAD′ (fig. 150a) *è posta su due piani* AC *ed* AC′, *inclinati all'orizzonte e addossati l'uno all'altro: scorrendo la catenella senz'attrito giusta la lunghezza dei due piani inclinati la cui intersezione si suppone orizzontale, e rimanendo sempre nel piano* CAC′ *perpendicolare a questa intersezione, si vuole determinare il movimento della medesima catenella.*

Sia λ tutta la lunghezza della catenella, ed x, x' sieno le rispettive lunghezze delle parti posate sopra i due piani inclinati alla fine di un tempo t; sarà $x + x' = \lambda$: si chiami μ la massa distribuita nella unità di lunghezza, ossia la densità della catenella; le masse delle due parti di questa saranno rispettivamente μx, $\mu x'$. Ciò posto, vede ognuno che i pesi rispettivi o le forze, dalle quali vengono naturalmente sollecitate secondo la direzione della gravità le due parti del sistema, si esprimono coi due prodotti $\mu\, g\, x$, $\mu\, g\, x'$; sono poi $\mu x \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\mu x \dfrac{d^2x'}{dt^2}$ le forze (261) che nelle medesime parti, se fossero libere, produrrebbero l'accelerazione e il moto che ha luogo attualmente nel senso della lunghezza dei due piani inclinati: vi è dunque equilibrio (393) tra quelle prime forze, e queste altre prese in verso contrario; per conseguenza sarà nulla (222) la somma dei momenti virtuali di tutte e quattro le forze per quel movimento infinitesimo, che il sistema o la catenella concepisce real-

mente nel tempuscolo dt. Rappresentate pertanto con α ed α' le inclinazioni dei due piani all'orizzonte, dovrà sussistere (214) l'equazione

$$gx \operatorname{sen}\alpha\, dx + gx' \operatorname{sen}\alpha' dx' - x\frac{d^2x}{dt^2}dx - x'\frac{d^2x'}{dt^2}dx' = 0\,,$$

dalla quale è già tolto il fattore μ comune a tutti i termini. Ora attesa la relazione $x+x'=\lambda$, abbiamo $x'=\lambda-x$, $dx'=-dx$, $d^2x'=-d^2x$; eliminando dunque per mezzo di questi valori la quantità x' dalla equazione superiore, otterremo l'equazione differenziale

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{\lambda}(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha')\,x + g \operatorname{sen}\alpha' = 0\,,$$

ossia

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{\lambda}(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha')\left(x - \frac{\lambda \operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha'}\right) = 0\,,$$

la quale appartiene al movimento della catenella sopra i due piani inclinati. Per integrare questa equazione, poniamo

$$\frac{g}{\lambda}(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha') = b^2\,,\quad x - \frac{\lambda \operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha'} = z\,;$$

la medesima equazione diverrà $\frac{d^2z}{dt^2} - b^2z = 0$, la quale (CXII) ha per integrale $z = \mathrm{C}\,e^{bt} - \mathrm{C}'\,e^{-bt}$, e ci dà per conseguenza

$$(4) \qquad x = \frac{\lambda \operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha'} + \mathrm{C}e^{bt} - \mathrm{C}'e^{-bt}\,.$$

Le le due costanti C, C′ possono determinarsi per la posizione e la velocità iniziale, che si suppongono date e conosciute· infatti se per $t=0$ sia $x=\mathrm{AD}=x_0$, $v=\frac{dx}{dt}=v_0$, si avrà

$$x_0=\frac{\lambda \operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha+\operatorname{sen} \alpha'}+\mathrm{C}-\mathrm{C}',$$

$$v_0=\frac{dx}{dt}=\mathrm{C}\, be^0+\mathrm{C}'\, be^0=b(\mathrm{C}+\mathrm{C}');$$

e da queste due equazioni si ricaveranno i valori delle quantità costanti C, C′. Determinate queste due costanti, l'equazione (4) e il suo differenziale ci faranno conoscere la posizione della catenella e la velocità $\frac{dx}{dt}$ per un tempo dato t.

Alla fine di un certo tempo che si può determinare facilmente, la catenella si troverà tutta sopra uno dei due piani inclinati: allora il moto cangerà di natura, e diverrà uniformemente accelerato. Se diventasse nulla la forza acceleratrice $\frac{d^2x}{dt^2}$ la quale agisce sopra il sistema; la catenella collocata da principio sopra i due piani inclinati senza velocità iniziale nella posizione corrispondente alla detta ipotesi, vi rimarrebbe certamente in equilibrio costante: ora fatto $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, in virtù della equazione (3) si ha

$$x=\frac{\lambda \operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen} \alpha+\operatorname{sen} \alpha'},\quad x'=\lambda-x=\frac{\lambda \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha+\operatorname{sen} \alpha'},$$

e per conseguenza

$$x : x'=\operatorname{sen} \alpha' : \operatorname{sen} \alpha=\mathrm{AC} : \mathrm{AC}';$$

dunque la posizione che corrisponde all'annullamento della forza acceleratrice e all'equilibrio della catenella DAD' collocata sopra i piani senza velocità iniziale, è quella nella quale le parti $x = AD$ ed $x' = AD'$ sieno proporzionali alle lunghezze AC ed AC' dei due piani inclinati, e la retta DD' sia parallela a CC' ed orizzontale, come per altro modo abbiamo già provato nel terzo esempio del numero (175) della Statica.

404. Problema II. *Una verga* AB (fig. 178ª) *pesante, omogenea e grossa ugualmente da per tutto, è appoggiata alle estremità contro due rette fisse, una orizzontale e l'altra verticale: vogliamo cercare prima la velocità angolare della verga per qualunque posizione ella s'abbia; poi vogliamo determinare la sua posizione per quell'istante di tempo, nel quale essa si stacca dalla retta verticale.*

Sia $2l$ la lunghezza della verga, m la sua massa, θ l'angolo che essa forma colla retta orizzontale alla fine del tempo t; prendiamo per assi coordinati le rette CX e CY, contro le quali si appoggia la verga colle sue estremità; rappresentiamo poi rispettivamente con y, v, ed u l'ordinata di un punto qualunque della verga, la sua velocità assoluta, e la velocità relativa al suo centro di gravità considerato come fisso, e con x_1, y_1, v_1 le coordinate e la velocità del centro O. Siccome $Y = -gdm$ è la forza motrice, che sollecita ciascun elemento della verga; perciò l'equazione delle forze vive (v'''. 397), integrata che sia, darà

$$\Sigma(v^2 dm) = -2g\,\Sigma(ydm) + \text{cost.}\,,$$

ovvero (400. 109. f')

$$mv_1^2 + \Sigma(u^2 dm) = -2mgy_1 + \text{cost.}$$

ovvero anche (296. 364)

$$m\left(\frac{dx_1^2}{dt^2}+\frac{dy_1^2}{dt^2}\right)+\Sigma\left(r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}dm\right)=-2mgy_1+\text{cost.}\ ,$$

nella quale ultima espressione r è la distanza di un punto qualunque della verga dal centro di gravità, e $\frac{d\theta}{dt}$ esprime la velocità angolare o di rotazione della verga intorno a un asse normale condotto pel centro di gravità e considerato come fisso. Ora il fattore $\frac{d\theta^2}{dt^2}$ si può scrivere fuori del segno Σ, e perciò a norma di ciò che sarà detto relativamente al momento d'inerzia di una retta nel numero (413), avremo $\Sigma\left(r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}dm\right)=\frac{d\theta^2}{dt^2}\Sigma(r^2dm)=\frac{d\theta^2}{dt^2}\cdot\frac{1}{12}m(2l)^2$ $=\frac{1}{3}ml^2\frac{d\theta^2}{dt^2}$; quindi l'ultima equazione diviene

$$m\left(\frac{dx_1^2}{dt^2}+\frac{dy_1^2}{dt^2}+\frac{l^2}{3}\cdot\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)=-2mgy_1+\text{cost.}\ .$$

Ma il primo membro di questa, per ragione dei valori $x_1=l\cos\theta$, $y_1=l\,\text{sen}\,\theta$, diviene $m\left(\frac{l^2\text{sen}^2\theta\,d\theta^2}{dt^2}+\frac{l^2\cos^2\theta\,d\theta^2}{dt^2}+\frac{l^2}{3}\cdot\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)$ $=m\left(l^2\frac{d\theta^2}{dt^2}+\frac{l^2}{3}\cdot\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)=\frac{4}{3}ml^2\frac{d\theta^2}{dt^2}$; dunque avremo anche

$$\frac{4}{3}ml^2\frac{d\theta^2}{dt^2}=-2mgl\,\text{sen}\,\theta+\text{cost.}$$

A questo punto, determinando la costante sotto tal condizione che al principio del moto sia $\frac{d\theta}{dt}=0$, e $\theta=\theta_0$, otterremo pel tempo t la formola

$$(5) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{3g}{2l}\,(\text{sen}\,\theta_0 - \text{sen}\,\theta)\,,$$

che ci dà la velocità angolare $\frac{d\theta}{dt}$ corrispondente all'inclinazione θ della verga.

Per ciò che riguarda l'altra parte del problema, riflettiamo che non v'è difficoltà di ammettere la verga AB come affatto libera, se oltre la forza motrice del suo peso si considerino anche le forze di reazione che essa risente dalle rette alle quali si appoggia: questa riflessione ci permette di poter applicare le formole (v'') del numero (395) al moto traslativo del suo centro di gravità O. Rappresentiamo dunque con R la reazione orizzontale della retta verticale CY: dalla prima delle predette formole (v'') avremo $m\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = R$; ma l'equazione $x_1 = l\cos\theta$ differenziata due volte in ordine alla quantità indipendente t, ci porge $\frac{d^2x_1}{dt^2} = -l\cos\theta\,\frac{d\theta^2}{dt^2} - l\,\text{sen}\,\theta\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$; dunque

$$(6) \qquad -ml\cos\theta\,\frac{d\theta^2}{dt^2} - ml\,\text{sen}\,\theta\,\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\,.$$

Ora è chiaro che la verga si stacca dalla retta verticale CY al momento che diviene nulla la reazione R, ossia la pressione esercitata contro quella retta: dunque se nella formola (6) si ponga $R = 0$, e si sostituisca il valore di $\frac{d\theta^2}{dt^2}$ dato dalla (5) ed anche il valore di $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{4l}\cos\theta$ cavato dalla differenziazione della medesima, avremo la formola

$$-\frac{1}{2}\,(\text{sen}\,\theta_0 - \text{sen}\,\theta) + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,\theta = 0\,,$$

ossia

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta_0 ,$$

la quale ci dà la posizione o l'inclinazione θ della verga per quell'istante di tempo in cui si stacca dalla retta verticale.

405. **Problema** III. *Applicare l'equazione delle forze vive alle macchine dotate di un qualche movimento.*

Nell'equazione differenziale delle forze vive

$$d\Sigma(mv^2) = 2\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

stabilita al num. (397), m è la massa di un punto qualunque del sistema, v è la velocità alla fine del tempo t; X, Y, Z sono le componenti della forza motrice parallele a tre assi rettangolari, ed x, y, z sono le coordinate di quel punto. Nelle macchine le forze che hanno X, Y, Z per componenti, altre tendono ad accelerare e altre a ritardare il moto dei punti ai quali sono applicate: questi punti si muovono in modo che le direzioni delle velocità corrispondenti fanno un angolo acuto colle direzioni delle prime forze che son dette *potenze*, e fanno un angolo otteso colle direzioni delle seconde che sono chiamate *resistenze*; perciò è che nelle macchine i momenti virtuali delle forze sono positivi o negativi, secondo che queste forze fanno le parti di potenze o di resistenze. Quindi poichè il momento virtuale della risultante è uguale (218) alla somma dei momenti virtuali delle forze componenti, applicate a uno stesso punto; perciò rappresentando con Q, P una potenza e una resistenza qualunque, con dq e dp gli spazii infinitesimi che i rispettivi punti di loro applicazione descrivono nel tempo infinitesimo dt nella direzione stessa delle forze, l'espressione $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ si risolverà nelle due parti $\Sigma(Q\,dq)$, $-\Sigma(P\,dp)$. Dunque l'equazione delle forze vive riportata innanzi, per ciò che riguarda le macchine, potrà esser messa sotto la forma

$$d\Sigma(mv^2) = 2[\Sigma(Q\,dq) - \Sigma(P\,dp)];$$

e presi gl'integrali da t_0 fino a t, ed espressa con v_0 la velocità che corrisponde al tempo t_0, sotto quest'altra

$$\Sigma(mv^2) - \Sigma(mv_0^2) = 2\left[\int_{t_0}^{t} \Sigma(Q\,dq) - \int_{t_0}^{t} \Sigma(P\,dp)\right].$$

Le due somme $\Sigma(Q\,dq)$, $\Sigma(P\,dp)$, esprimono (226) il lavoro elementare di tutte le forze motrici e resistenti; gl'integrali poi di queste somme tra i limiti t_0 e t rappresentano il lavoro, che effettuano le stesse forze nell'intervallo di tempo $t - t_0$. Pertanto se rappresentiamo con L_m il lavoro motore eseguito nel detto intervallo di tempo dalle forze motrici, e con L_r il lavoro resistente delle forze resistenti, l'ultima equazione si potrà notare sotto la forma compendiata

$$\Sigma(mv^2) - \Sigma(mv_0^2) = 2(L_m - L_r), \tag{7}$$

e così per le macchine dotate di un movimento qualunque si avrà per dimostrato il teorema seguente: *nelle macchine in moto per un dato tempo qualunque l'aumento di forza viva è uguale alla duplice differenza tra il lavoro motore e il lavoro resistente.*

È da osservare che il lavoro motore per un intervallo qualunque di tempo è uguale al lavoro resistente, se il movimento della macchina è uniforme; è poi più grande ovvero più piccolo, se il movimento è accelerato ovvero ritardato. Infatti il primo membro dell'equazione (7) è nullo nel primo caso, positivo nel secondo, negativo nel terzo. Oltre a ciò, lo stesso primo membro è nullo per quell'intervallo di tempo in cui la macchina dalla quiete o da un determinato grado di velocità nelle sue parti, torna alla quiete o a quel grado stesso di velocità: perciò è che benchè il movimento della macchina sia vario, purchè esso sia periodico, avverrà che per ciascun periodo sussisterà l'equaglianza tra i due lavori, e la macchina non farà altro che

trasmettere l'intero lavoro motore e trasformarlo in altrettanto lavoro resistente. In ciascuno di questi periodi, quando il movimento della macchina si accelera, il lavoro motore L_m supera il resistente L_r, e lo si può risolvere in due parti L_r ed $L_m - L_r$: la prima si spende nell'effettuare il lavoro resistente L_r, l'altra determina un aumento di forza viva sotto la cui formola si accumula nella macchina e diviene come latente: quando però il movimento della macchina si rallenta, allora il lavoro resistente L_r supera il motore L_m, e si compone delle due parti L_m, ed $L_r - L_m$; la prima la eseguisce il lavoro motore L_m, l'altra la eseguisce la forza viva che per questo si diminuisce nella macchina, o piuttosto la eseguisce quell'eccesso di lavoro motore che si era prima come occultato sotto forma di forza viva e che ora torna a mostrarsi. Così avviene che alla fine di ciascun periodo la forza viva della macchina è la stessa che al principio, e a ciascun periodo il lavoro motore uguaglia il lavoro resistente nel quale tutto si converte.

É anche da notare che il lavoro che abbiamo detto semplicemente resistente si compone del lavoro resistente utile L_u, ed è quello per cui produrre è stata stabilita la macchina, p. es. innalzare un certo peso a una data altezza, ecc.; e del lavoro resistente meramente passivo L_p che nasce dagli attriti nelle diverse parti della macchina, dagli urti, dalla resistenza del mezzo e da altri impedimenti. Quindi è che a ciasun periodo ovvero per tutto il tempo che agisce la macchina, essendo $L_u + L_p = L_m$, avremo

$$\frac{L_u}{L_m} = 1 - \frac{L_p}{L_m} .$$

Il rapporto $L_u : L_m$ tra il lavoro utile e il lavoro motore è, come si dice, *ciò che rende la macchina*, ed è sempre più piccolo dell'unità. Le macchine sono tanto migliori e più perfette, quanto più diminuendo al possibile le resistenze passive, quel rapporto si accosta all'unità: ciascuno però intende che non si possono togliere affatto; e che macchine senza resistenze passive e in esse movimento perpetuo senza

l'azione continua o periodica di una potenza che ne ripari le perdite, sono un'assurdità.

Questo che abbiamo dimostrato, lo avevamo accennato al numero (226). Aggiungiame per ultimo che il movimento delle macchine riesce ordinariamente periodico: ciò avviene sia perchè il motore di cui si dispone è variabile tra certi limiti, sia perchè la resistenza utile sopra la quale esso opera mediante la macchina, passa da una condizione a un' altra nell' essere lavorata. Per rendere questo movimento più uniforme che si può e provvedere così alla equabile esecuzione del lavoro utile, si applicano alle macchine i *regolatori* che moderano la forza motrice, e i *volanti* che assorbono e restituiscono opportunamente l' eccesso della forza viva.

§. 2.°

Momenti d' inerzia.

406. **Momenti d' inerzia rispetto a un asse.** Nel paragrafo precedente abbiamo esposto le proprietà e i principii generali sul movimento dei sistemi; adesso diremo in breve alcuna cosa intorno ai momenti d' inerzia, i quali concorrono con altre quantità alla determinazione del moto dei corpi solidi, come si è veduto poc' anzi in un' esempio.

In un dato sistema di punti materiali è detto *momento d' inerzia relativamente a un asse* la somma dei prodotti delle masse che hanno i singoli punti per i quadrati delle rispettive loro distanze dall' asse. Se m è la massa di uno dei punti materiali, ed r è la sua distanza da un asse ossia da una retta di data posizione, l' espressione $\Sigma(mr^2)$ sarà il momento d' inerzia del sistema relativamente a quella retta o a quell' asse.

Rappresentata che sia con M la massa di tutto un sistema, e cosciuto che sia il momento d' inerzia relativamente a un dato asse, potremo sempre determinare una tal retta k che sussista l'equazione

$$\Sigma(mr^2) = Mk^2 :$$

una retta siffatta è chiamata *raggio di girazione* del sistema intorno all' asse che si considera.

In un sistema continuo di punti materiali, che è il caso dei corpi solidi ne' quali la materia s' immagini distribuita per tutto il volume, il momento d' inerzia manifestamente si esprime con $\int r^2 dM$: estendendo l' integrazione a tutta la massa del sistema o del solido, avremo dunque

$$\int r^2 dM = Mk^2.$$

407. Relazione tra i momenti d'inerzia rispetto ad assi paralleli. Vogliamo quì dimostrare che in un sistema di punti materiali o in un corpo solido, *dato il momento d'inerzia* $\Sigma\ (mr'^2)$ *rispetto a un asse o ad una retta* R', *si può sempre conoscere il momento d'inerzia* $\Sigma\ (mr^2)$ *rispetto ad un altro asse parallelo* R, *il quale sia posto alla distanza* a *dal primo asse.*

Riferendo i punti del sistema o del corpo a tre assi rettangolari, prendiamo il primo asse R' dei momenti d'inerzia per quello delle z, e facciamo passare il piano delle coordinate x, z per il secondo asse R dei momenti. Essendo m la massa di un punto qualunque (x, y, z) del corpo o del sistema, la sua distanza r dalla retta o dall'asse R non è che l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, il quale ha per cateti le due lunghezze $(x-a)$ ed y; la distanza poi r' del medesimo punto dall' asse R', è pure l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti le due coordinate x ed y: si avrà quindi

$$\Sigma(mr^2) = \Sigma m[(x-a)^2 + y^2] = \Sigma m(x^2+y^2) - 2a\,\Sigma(mx) + a^2\Sigma(m).$$

Ma designata con M la massa di tutto il corpo o sistema, e con x_1 la coordinata del suo centro di gravità parallela all'asse delle x, abbiamo $x^2+y^2 = r'^2$, $\Sigma\,(mx) = Mx_1$, $\Sigma\,(m) = M$: sarà dunque

$$\Sigma(mr^2) = \Sigma(mr'^2) - 2M\,ax_1 + Ma^2 ;$$

e questa equazione ci dà il momento d'inerzia $\Sigma(mr^2)$ rispetto a una retta R per mezzo del momento d'inerzia $\Sigma(mr'^2)$ rispetto a un'altra retta o asse parallelo R' e di altre quantità che si suppongono note.

Se quest'ultimo asse R' che coincide con quello delle z, passi per il centro di gravità del corpo o sistema, sarà $x_1 = 0$; conseguentemente l'equazione ora trovata si ridurrà a quest'altra più semplice

$$\Sigma(mr^2) = \Sigma(mr'^2) + Ma^2:$$

ciò vuol dire che *il momento d'inerzia di un corpo o sistema relativamente a un asse qualunque è uguale al momento d'inerzia del medesimo sistema relativamente a un altro asse parallelo al primo e che passa per il centro di gravità, più il prodotto della massa di tutto il sistema pel quadrato della distanza tra i due assi.*

Da questo che si è ora dimostrato, s'inferiscono tre conseguenze: 1° il momento d'inerzia di un dato corpo o sistema, è costante e rimane lo stesso in ordine a tutti gli assi paralleli, i quali sono ugualmente distanti dal centro di gravità; 2° tra gli assi paralleli a una data direzione quello che offre il minimo momento d'inerzia, è l'asse che passa per il centro di gravità del sistema; 3° la differenza tra i momenti d'inerzia di un dato sistema relativamente a due assi paralleli qualunque, è uguale al prodotto della massa del sistema per la differenza tra i quadrati delle distanze dei medesimi assi dal centro di gravità.

408. **Relazione tra i momenti d'inerzia rapporto ad assi concorrenti in un punto.** Vogliamo qui trovare l'*espressione del momento d'inerzia di un corpo o di un sistema di punti materiali, relativamente a un asse qualunque che passa per l'origine di tre assi coordinati ad angolo retto.*

Sia OR (fig. 179a) una retta qualunque o un asse che passa per l'origine O, e fa gli angoli α, β, γ coi rispettivi assi rettangolari OX, OY, OZ; sieno x, y, z le coordinate, ed m la massa di un punto M del corpo o sistema, e da questo punto si abbassi la perpendicolare MH sopra l'asse OR. Congiunto M con O mediante

la retta MO, e fatta $MH = r$, abbiamo $r^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OH}^2$: ma il quadrato della retta OM, la quale è diagonale di un parallelepipedo rettangolo che ha per lati intorno a un vertice le coordinate del punto M, si esprime (29) colla somma $x^2 + y^2 + z^2$; e il quadrato della retta OH, la quale è proiezione ortogonale della retta OM sopra l'asse OR ed è uguale (34.3°) alla somma delle proiezioni delle tre rette componenti x, y, z sopra il medesimo asse, si esprime colla somma quadrata $(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$:
Dunque avremo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

la quale formola, attesa la relazione $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, si può scrivere

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$- (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2,$$

e mediante lo sviluppo delle operazioni indicate si riduce a quest'altra formola

$$r^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (x^2 + z^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma$$

$$- 2\,yz\cos\beta\cos\gamma - 2\,xz\cos\alpha\cos\gamma - 2\,xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Se adesso moltiplichiamo prima per m quella equazione, e poi aggiungiamo insieme tutte le equazioni di simile forma che si riferiscono ai diversi punti del corpo o del sistema, otterremo

$$\Sigma(mr^2) = \cos^2\alpha\,\Sigma m(y^2 + z^2) + \cos^2\beta\,\Sigma m(x^2 + z^2) + \cos^2\gamma\,\Sigma m(x^2 + y^2)$$

$$- 2\cos\beta\cos\gamma\,\Sigma(myz) - 2\cos\alpha\cos\gamma\,\Sigma(mxz) - 2\cos\alpha\cos\beta\,\Sigma(mxy)\;.$$

In questa equazione i coefficienti dei coseni in tutti i termini del secondo membro non dipendono affatto dalla direzione dell'asse OR ma si riferiscono ai tre assi coordinati e sono quantità costanti: così essendo la somma (y^2+z^2) il quadrato della distanza del punto M dell'asse OX, il coefficiente $\Sigma m(y^2+z^2)$ rappresenterà il momento d'inerzia del sistema relativamente all'asse OX, e per somigliante ragione i coefficienti $\Sigma m\,(x^2+z^2)$, $\Sigma m\,(x^2+y^2)$ rappresenteranno i momenti d'inerzia rapporto agli altri due assi OY ed OZ; i coefficienti poi $\Sigma\,(m\,y\,z)$, $\Sigma\,(m\,x\,z)$, $\Sigma\,(m\,x\,y)$, che chiameremo *momenti complessi*, si riferiscono pure ai rispettivi assi coordinati e si possono determinare. Pertanto se noi indichiamo con μ il momento d'inerzia $\Sigma\,(m\,r^2)$ del corpo o del sistema relativamente all'asse OR, e se per ragione di brevità e comodo di calcolo poniamo

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Sigma\,m(y^2+z^2)=\mathrm{A}, & \Sigma(myz)=\mathrm{D}, \\ \Sigma\,m(x^2+z^2)=\mathrm{B}, & \Sigma(mxz)=\mathrm{E}, \\ \Sigma\,m(x^2+y^2)=\mathrm{C}, & \Sigma(mxy)=\mathrm{F}, \end{array}\right.$$

l'equazione trovata poc'anzi si scriverà semplicemente

$$(v^{\mathrm{v}})\quad \left\{\begin{array}{l} \mu=\mathrm{A}\cos^2\alpha+\mathrm{B}\cos^2\beta+\mathrm{C}\cos^2\gamma \\ -2\mathrm{D}\cos\beta\cos\gamma-2\,\mathrm{E}\cos\alpha\cos\gamma-2\mathrm{F}\cos\alpha\cos\beta. \end{array}\right.$$

È questa l'espressione cercata, ossia la relazione tra i momenti d'inerzia di un corpo o di un sistema rispetto a un asse qualunque condotto per un punto O, e i momenti d'inerzia relativi a tre assi coordinati ad angolo retto nel medesimo punto O.

409. Ellissoide centrale d'inerzia. La relazione che esiste tra i momenti d'inerzia presi rispetto a diversi assi concorrenti nel punto O, si può rappresentare con una costruzione geometrica nel modo seguente. Sieno μ, μ',... i momenti d'inerzia di un corpo o

sistema relativamente ai diversi assi OR, OR′,..., che passano per l'origine O di tre assi rettangolari (fig. 179ª.); e sopra i medesimi assi OR, OR′,... si prendano le porzioni $OK = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, $OK' = \frac{1}{\sqrt{\mu'}}$, ...: il luogo geometrico di tutti i punti K, K′,..., per tal modo determinati, sarà una superficie interamente chiusa, e più in particolare sarà la superficie di una ellissoide.

Designando infatti con x, y, z le coordinate rettangolari del punto K, ossia di uno qualunque tra i detti punti K, K′,..., e conservando le notazioni angolari del numero precedente, abbiamo (29)

$$\cos\alpha = \frac{x}{OK} = x\sqrt{\mu},\ \cos\beta = \frac{y}{OK} = y\sqrt{\mu},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{OK} = z\sqrt{\mu};$$

e quindi sostituendo questi valori nella equazione superiore (v^{v}), dopo di aver tolto il fattore μ comune a tutti i termini, otterremo

$$(v^{vi})\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2\,Exz - 2\,Fxy = 1.$$

Ora questa equazione, come si dimostra nei trattati completi di geometria analitica, rappresenta una superficie di secondo grado che ha per centro l'origine delle coordinate, e in particolare rappresenta la superficie di una ellissoide, non essendo mai immaginarii ed infiniti, ma sempre reali e finiti i raggi vettori $OK = \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma(mr^2)}}$.
Una tale superficie o ellissoide si chiama l'*ellissoide centrale d'inerzia rispetto al punto* O; e quando essa sia determinata, si conosceranno i raggi OK, e per conseguenza i momenti d'inerzia $\mu = \frac{1}{OK^2}$ relativamente ai diversi assi che passano per il punto O.

410. **Assi e momenti principali d'inerzia.** Se gli assi coordinati OX, OY, OZ si prendono nella direzione degli assi stes-

si dell'ellissoide d'inerzia, i coefficienti della equazione (v^{vi}) che rappresenta la superficie della ellissoide, dovranno allora assumere valori tali che facciano sparire dalla medesima equazione i rettangoli yz, xz, xy, affinchè per ogni valore di due qualunque delle tre coordinate x, y, z si abbiano due valori uguali ed opposti per la terza coordinata: dunque nella detta ipotesi saranno nulli i coefficienti D, E, F; cioè, attesa la loro espressione nelle formole (8), saranno nulli i tre integrali o le tre somme $\Sigma(myz)$, $\Sigma(mxz)$, $\Sigma(mxy)$. Quindi nella medesima ipotesi l'equazione (v^{vi}) dell'ellissoide centrale diverrà semplicemente

$$(v^{\text{vii}}) \qquad Ax^2+By^2+Cz^2=1\ ;$$

e l'espressione (v^{v}) del momento d'inerzia rispetto a un asse qualunque OR, condotto per l'origine O, si ridurrà a quest'altra

$$(v^{\text{viii}}) \qquad \mu=A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma.$$

Gli assi coordinati che coincidono con quelli dell'ellissoide centrale, si dicono *assi principali d'inerzia* relativi al punto O; e i momenti d'inerzia A, B, C, i quali entrano nelle ultime due equazioni e si riferiscono a questi assi principali, si chiamano anch'essi *momenti principali d'inerzia* del corpo o sistema.

Poichè si dicono principali quegli assi d'inerzia che coincidono cogli assi dell'ellissoide centrale, è manifesto che il sistema degli assi principali d'inerzia rispetto a un dato punto sarà unico, se sono tutti disuguali gli assi dell'ellissoide corrispondente: se poi due di questi assi sono eguali tra loro, e l'ellissoide è perciò un solido di rotazione, allora saranno infiniti di numero i sistemi di assi principali d'inerzia rispetto al dato punto; perchè in questo caso l'asse di rotazione forma un sistema con due rette qualunque, situate ad angolo retto nel piano dei due assi uguali: in fine si avrà pure un numero infinito di sistemi per gli assi principali d'inerzia, quando i tre assi dell'ellissoide centrale sono tutti uguali tra loro, e la me-

desima ellissoide si converte perciò in una sfera; giacchè in tal caso tre diametri qualunque della sfera, purchè sieno perpendicolari tra loro, formano sempre un sistema di assi principali.

In questo ultimo caso i momenti d'inerzia del corpo o del sistema, presi rispetto a qualunque asse o diametro della sfera centrale, riescono tutti uguali tra loro; perchè da una parte il momento d'inerzia relativamente a un asse si esprime col rapporto tra l'unità e il quadrato del raggio corrispondente nella ellissoide centrale, dall'altra parte sono tutti uguali tra loro i raggi della sfera alla quale si riduce presentemente l'ellissoide centrale d'inerzia. — Nel primo caso che è il più generale ed ordinario, vale a dire nel caso che sieno tutti disuguali gli assi dell'ellissoide e però anche i momenti principali d'inerzia A, B, C, *il più grande e il più piccolo di questi momenti principali d'inerzia, è anche il massimo ed il minimo tra tutti i momenti d'inerzia relativi ai diversi assi che passano per un medesimo punto* O, *cioè per il centro della ellissoide d'inerzia*. Infatti sussistendo (31. 3.°) le relazioni.

$$\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma \;,\quad \cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta \;,$$

l'equazione (v^{viii}) che ci dà il momento d'inerzia μ rispetto a un asse qualunque OR per mezzo dei momenti principali A, B, C, si potrà scrivere nei due modi seguenti·

$$\mu = A - (A - B)\cos^2\beta - (A - C)\cos^2\gamma \;,$$

$$\mu = C + (A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta \;.$$

Ora se si suppone $A > B > C$, cosicchè A e C siano rispettivamente il più grande e il più piccolo dei tre momenti principali d'inerzia, apparisce chiaramente da queste ultime espressioni dovere essere sempre $\mu < A$ ed insieme $\mu > C$; dunque il momento d'inerzia in ordine a un asse qualunque condotto per un dato punto O, è compreso sempre fra il più grande e il più piccolo

dei momenti d'inerzia che corrispondono a due assi principali relativi allo stesso punto. Questa conclusione equivale alla proposizione che abbiamo enunciato di sopra; ed è quindi manifesto che il massimo momento d'inerzia corrisponde al più piccolo asse della ellissoide centrale, e viceversa il minimo momento d'inerzia corrisponde al più grande asse della medesima ellissoide.

411. Abbiamo detto che quando i tre assi dell'ellissoide centrale e perciò anche i tre momenti principali d'inerzia sono uguali tra loro, allora l'ellissoide si converte in una sfera, e conseguentemente riescono tutti uguali i momenti d'inerzia relativi agli altri assi che passano per il centro della sfera. Ora *dato un sistema di punti materiali o un corpo solido, si domanda se vi abbia qualche punto, per il quale i tre momenti principali d'inerzia, e per conseguenza tutti gli altri momenti relativi agli assi che con qualunque direzione passano per quel punto, sieno uguali tra loro.*

Per rispondere alla domanda e determinare la posizione dei punti richiesti, prendiamo per assi coordinati i tre assi principali d'inerzia OX, OY, OZ, relativi al punto O, che per maggior semplicità supporremo essere il centro di gravità del sistema o del corpo dato; e per il punto O′ che si cerca, immaginiamo condotti tre altri assi O′X′, O′Y′, O′Z′ rispettivamente paralleli ai primi: dovendo aversi riguardo al punto O′ una sfera centrale d'inerzia, i nuovi assi saranno principali (410) in ordine allo stesso punto O′, ed espresse con x, y, z le coordinate di un punto qualunque m del corpo nel primo sistema di assi, con x', y', z' le coordinate del medesimo punto nel secondo sistema, e con ξ, η, ζ le coordinate del punto O′ relativamente ai primi assi, si avranno (410) le formole

$$\Sigma(m\,y'z')=0\,,\ \Sigma(m\,x'z')=0\,,\ \Sigma(m\,x'y')=0\,,$$

ed insieme le tre espressioni

$$x=x'+\xi\,,\ y=y'+\eta\,,\ z=z'+\zeta\,.$$

Sostituendo in quelle formole i valori $(x-\xi)$, $(y-\eta)$, $(z-\zeta)$ che si ricavano da queste espressioni per x', y', z', otterremo

$$\Sigma(myz) - \zeta\,\Sigma(my) - \eta\,\Sigma(mz) + \eta\zeta\,\Sigma(m) = 0\ ,$$

$$\Sigma(mxz) - \zeta\,\Sigma(mx) - \xi\,\Sigma(mz) + \xi\zeta\,\Sigma(m) = 0\ ,$$

$$\Sigma(mxy) - \eta\,\Sigma(mx) - \xi\,\Sigma(my) + \eta\xi\,\Sigma(m) = 0\ ;$$

e avvertendo che in queste tre equazioni sono nulli (410) i primi termini per la ragione che gli assi primitivi coincidono cogli assi principali rispetto al centro di gravità, e che sono pur nulli ciascuno da sè i secondi e i terzi termini in virtù delle formole (f') del numero (109), otterremo ancora le tre equazioni

$$\eta\zeta = 0\ ,\ \xi\zeta = 0\ ,\ \eta\xi = 0\ .$$

Ora perchè si avverino simultaneamente queste ultime equazioni, devono annullarsi due delle tre coordinate ξ, η, ζ: poniamo che sieno nulle le due corrdinate ξ, η; il punto O′ che si cerca, si troverà allora sopra l'asse OZ alla distanza ζ dal centro di gravità O del dato sistema.

Gli assi principali d'inerzia relativi al punto O′ sono rispettivamente paralleli agli assi principali che si riferiscono al centro di gravità, ossia al punto O; resta ancora a determinare la distanza ζ del primo dal secondo punto in tal modo che i momenti principali d'inerzia, e per conseguenza tutti gli altri momenti in ordine agli assi che con qualunque direzione passano per O′, sieno uguali tra loro. Or bene, giusta il teorema dimostrato nel numero (407) circa i momenti d'inerzia relativi a due assi paralleli, dei quali uno sia condotto per il centro di gravità del sistema, apparisce ad ognuno che i momenti d'inerzia del nostro sistema corrispondenti agli assi principali che passano per il punto O′, si esprimono rispettivamente colle quantità

$$A + M\zeta^2, \quad B + M\zeta^2, \quad C,$$

essendo A, B, C i momenti relativi agli assi principali del centro di gravità, ed M la massa del sistema: ponendo tra que' primi momenti principali la uguaglianza

$$A + M\zeta^2 = B + M\zeta^2 = C,$$

ne dedurremo i valori $A = B$, $\zeta = \pm\sqrt{\frac{C-A}{M}}$; e perchè in questi valori la ζ sia reale, converrà che si abbia $C > A$. Conchiudiamo dunque che quando sono uguali due dei momenti principali A, B, C, ossia quando l'ellissoide d'inerzia relativa al centro di gravità è un solido di rivoluzione, allora sopra l'asse del terzo momento principale o dell'ellissoide centrale può trovarsi qualche punto O′, per il quale sieno tutti uguali tra loro i momenti d'inerzia relativi alle rette che passano per quel punto con qualunque direzione: esisteranno di fatto sopra il detto asse al di qua e di là del centro di gravità due tali punti O′, se il terzo dei mentovati momenti principali sia maggiore di ciascuno dei primi due uguali tra loro, ossia se l'ellissoide centrale rispetto al centro di gravità sia un solido di rivoluzione intorno all'asse maggiore; la distanza poi dei punti O′ dal centro di gravità si esprimerà per la radice quadra del rapporto, che passa tra la differenza dei momenti principali disuguali e la massa del corpo o del sistema.

412. In generale se OX, OY, OZ sono gli assi principali d'inerzia relativi al centro di gravità O di un sistema di punti materiali, gli assi principali relativi a un punto qualunque O′ situato sopra uno degli assi primitivi, per es. sopra l'asse OZ, saranno paralleli ai medesimi assi primitivi; cioè *le rette O′X′, O′Y′, O′Z rispettivamente parallele agli assi principali OX, OY, OZ che risguardano il centro di gravità, condotte per un punto qualunque O′ di uno di questi assi, sono anche esse i tre assi principali d'inerzia in ordine allo stesso punto O′.*

Sieno x, y, z le coordinate di un punto qualunque di massa m rispetto agli assi OX, OY, OZ; ed x', y', z' sieno le coordinate del medesimo punto rispetto agli assi O'X', O'Y', O'Z; si denoti inoltre con a la distanza del punto O' dal punto O, ossia dal centro di gravità del sistema: per dimostrare la proposizione, basterà (410) che proviamo la coesistenza delle tre formole

$$\Sigma(my'z') = 0 \ , \ \Sigma(mx'z') = 0 \ , \ \Sigma(mx'y') = 0 \ .$$

A questo fine osserviamo che giusta la disposizione degli assi nei due sistemi, si hanno le relazioni $x' = x$, $y' = y$, $z' = z - a$; sussisteranno dunque le tre equazioni identiche

$$\Sigma(my'z') = \Sigma(myz) - a\,\Sigma(my) \ , \ \Sigma(mx'z') = \Sigma(mxz) - a\,\Sigma(mx) \ ,$$

$$\Sigma(mx'y') = \Sigma(mxy) \ .$$

Ma essendo l'origine O il centro di gravità del dato sistema di punti, ed OX, OY, OZ essendo per ipotesi gli assi principali d'inerzia relativi al medesimo centro, si hanno (410. 109) i valori nulli

$$\Sigma(myz) = 0 \, , \, \Sigma(mxz) = 0 \, , \, \Sigma(mxy) = 0 \, , \, \Sigma(my) = 0 \, , \, \Sigma(mx) = 0;$$

dunque si avranno eziandio $\Sigma(my'z') = 0$, $\Sigma(mx'z') = 0$, $\Sigma(mx'y') = 0$, come dovea dimostrarsi.

Aggiungiamo al solito alcuni problemi o esempii, come applicazioni delle cose esposte nel presente paragrafo.

413. **Esempio** I. *Determinare il momento d' inerzia di una retta pesante e omogenea rispetto a un asse innalzato normalmente sull' estremità, o sul punto di mezzo della retta: determinare similmente il momento d' inerzia di un triangolo isoscele, pesante e omogeneo rispetto alla perpendicolare calata dal vertice sopra la base.*

1.° Sia ε la densità della retta, a la sua lunghezza, ed x una porzione variabile della retta, computata dall' estremità donde s'in-

nalza normalmente l'asse d'inerzia: avremo (79) $dM = \varepsilon\, dx$, e perciò il momento d' inerzia sarà espresso da

$$\int_o^a x^2 dM = \varepsilon \int_o^a x^2 dx = \frac{1}{3} \varepsilon\, a^3 = \frac{1}{3} Ma^2 ,$$

dove la quantità $\frac{1}{3} a^2$ rappresente (406) il quadrato del raggio di girazione k attorno l'asse normale sopra una estremità della retta. — Risguardo poi all'asse condotto normalmente sul punto di mezzo della retta ossia sopra il suo centro di gravità, il momento d' inerzia è uguale (407) alla differenza tra il momento testè trovato e il prodotto della massa della retta pel quadrato della distanza del primo asse dal secondo; avremo dunque pel nuovo momento d' inerzia l' espressione

$$\frac{1}{3} Ma^2 - M\left(\frac{1}{2} a\right)^2 = \frac{1}{12} Ma^2 ,$$

nella quale la quantità $\frac{1}{12} a^2$ è il quadrato del nuovo raggio di girazione.

2°. Sia ε la densità del triangolo isoscele ABB′ (fig. 180ª), a la sua altezza, b la sua mezza base: prendiamo a per asse delle ascisse, e per asse delle ordinate una retta perpendicolare la quale passi pel vertice del triangolo. Rappresentando con x, y le coordinate di un punto qualunque del lato AB, sarà $2y\, dx$ un elemento infinitesimo del triangolo nel senso della larghezza; ora il momento d' inerzia della retta relativamente all'asse a, si esprime (1°.) con $\frac{1}{12} 2\, \varepsilon\, y(2y)^2 = \frac{2}{3} \varepsilon\, y^3$; dunque il momento d' inerzia del detto elemento in ordine al medesimo asse avrà per espressione $\frac{2}{3} \varepsilon\, y^3 dx = \frac{2\, \varepsilon b^3}{3a^3} x^3 dx$, e

$$\frac{2\varepsilon b^3}{3a^2}\int_0^a x^2dx = \frac{1}{6}\varepsilon ab.b^2 = \frac{1}{6}Mb^2$$

sarà il momento d' inerzia di tutto il triangolo. La quantità $\frac{b}{\sqrt{6}} = k$ è il valore del corrispondente raggio di girazione.

414. **Esempio** II. *Determinare il momento d'inerzia di una periferia e di un'area circolare relativamente a un asse condotto pel centro, e perpendicolare al piano del circolo; così pure di una sfera omogenea relativamente a uno dei diametri.*

1°. Denotiamo con ε la densità, con a il raggio, con s un arco qualunque della circonferenza, e con ω il corrispondente angolo al centro: poichè il raggio a è la distanza dell'elemento $ds = a\,d\omega$ dall'asse, il momento d'inerzia della periferia circolare sarà

$$\int_0^{2\pi} a^2 . \varepsilon\, a\, d\omega = 2\,\varepsilon\,\pi\, a . a^2 = M\, a^2 .$$

2°. Per un'area circolare XAX'(fig. 181ª), fatto centro in C, e coi raggi $x = CD$ ed $x + dx$ immaginiamo descritte due circonferenze: la zona compresa tra queste due circonferenze, trascurata la quantità infinitesima di secondo ordine, avrà per espressione $\pi(x+dx)^2 - \pi x^2 = 2\pi x\, dx$. Ma (1°.) il momento d'inerzia della periferia circolare $2\pi x$ relativamente all'asse normale YY' è $2\varepsilon\pi x^3$; dunque quello della zona circolare relativamente allo stesso asse è $2\varepsilon\pi x^3 dx$, e conseguentemente quello dell'area circolare di raggio a sarà

$$2\,\varepsilon\pi\int_0^a x^3dx = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,\pi\, a^4 = \frac{1}{2}\,Ma^2 .$$

3°. Per ciò che riguarda il momento d'inerzia d'una sfera generata dalla rotazione del semicircolo XYX' intorno al diametro XX', prese le coordinate ortogonali $CD = x$, $BD = y$, abbiamo (XCVI) un segmento elementare espresso da $\pi y^2 dx$; e il momento d'iner-

zia di questo segmento rispetto all' asse XX' è $\frac{1}{2}\varepsilon\pi y^4\,dx = \frac{1}{2}\varepsilon\pi(a^2-x^2)^2dx$, per la ragione che $\frac{1}{2}\varepsilon\pi y^4$ ci esprime (2°.) il momento dell'area circolare πy^2 in ordine all' asse normale XX'. Quinci il momento d'inerzia della data sfera sarà

$$\frac{1}{2}\varepsilon\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^2dx = \frac{1}{2}\varepsilon\pi\left(2a^5-\frac{4}{3}a^5+\frac{2}{5}a^5\right)$$

$$= \frac{8}{15}\varepsilon\pi a^5 = \frac{2}{5}Ma^2;$$

e la formola $k^2 = \frac{2}{5}a^2$ darà il valore del raggio di girazione k intorno a uno qualunque dei diametri della sfera.

415. **Esempio** III. *Determinare il momento d'inerzia d'un parallelepipedo rettangolo e omogeneo relativamente a uno dei lati, ovvero a un asse parallelo che passi pel centro di gravità.*

Prendiamo per assi coordinati i tre lati contigui, e rappresentiamone le lunghezze con a, b, c; in un punto (x, y, z) del parallelepipedo, l'elemento rettangolare $dx\,dy\,dz$ ha una massa $\varepsilon\,dx\,dy\,dz$ e dista dall'asse c di una quantità $=\sqrt{x^2+y^2}$; perciò il momento d'inerzia di questo elemento relativamente al lato c, si esprime con $\varepsilon(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$. Questa espressione integrata in ordine alla sola variabile z da zero a c, ci somministra il momento d'inerzia $\varepsilon cx^2dx\,dy + \varepsilon cy^2dx\,dy$ di un parallelepipedo, i cui lati intorno a un vertice sono c, dx, dy. Fatta una seconda integrazione risguardo alla sola y da zero a b, avremo il momento d'inerzia $\varepsilon bcx^2dx + \frac{1}{3}\varepsilon b^3c\,dx$ di un parallelepipedo che ha per lati non paralleli b, c, dx. Finalmente con una terza integrazione rispetto alla sola x tra i limiti zero ed a, otterremo il momento d'inerzia del dato parallelepipedo rettangolo in ordine al lato c, espresso dalla quantità

$$\frac{1}{3}\varepsilon\, a^2bc + \frac{1}{3}\varepsilon\, ab^2c = \frac{1}{3}\varepsilon\, abc(a^2+b^2) = \frac{1}{3}\mathrm{M}(a^2+b^2).$$

Dopo ciò si deduce agevolmente il suo momento d'inerzia relativamente a un asse parallelo, il quale passi pel centro di gravità del solido; perchè in forza del teorema dimostrato nel numero (407), otterremo il nuovo momento mediante la differenza

$$\frac{1}{3}\mathrm{M}(a^2+b^2) - \mathrm{M}\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2\right) = \frac{1}{12}\mathrm{M}(a^2+b^2).$$

416. **Esempio** IV. *Trovare il momento d'inerzia di un'ellissoide omogenea rispetto a uno qualunque dei suoi assi.*

L'equazione (v^{VII}) del numero (410) rappresenta la superficie di una ellissoide d'inerzia, riferita ai proprii assi, che noi designeremo colle rette $2a$, $2b$, $2c$; nella medesima equazione i coefficienti A, B, C sono i momenti principali d'inerzia, e si esprimono (409) rispettivamente coi rapporti $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$: dunque l'equazione della superficie di una ellissoide, la quale abbia per semiassi le rette a, b, c, e sia riferita ai diametri principali o agli assi, sarà la seguente

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,;$$

la sezione poi ellittica della stessa superficie col piano coordinato XY, verrà rappresentata (XIV) dalla equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Ciò posto, si chiami ε la densità del solido; sarà, come nell'esempio precedente, $\varepsilon\,(x^2+y^2)\;dx\;dy\;dz$ rispetto all'asse $2c$ il momento d'inerzia dell'elemento $\varepsilon\;dx\;dy\;dz$ presso un punto $(x,\,y,\,z)$:

perciò il momento d'inerzia di tutta l'ellissoide relativamente al detto asse $2c$, ci verrà dato dall'integrale triplo

$$\mu=\varepsilon\int\int\int(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

purchè le successive integrazioni si eseguiscano tra i limiti del solido in quel modo che abbiamo accennato nel numero (CIV) della Introduzione. Pertanto in primo luogo si considerino x ed y come costanti, e si effettui l' integrazione rispetto alla variabile z tra i limiti

$$z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\ ,\quad z=+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\ ,$$

che sono i valori della z dedotti dalla equazione superiore della superficie del solido proposto; otterremo

$$\mu=2\,\varepsilon c\int\int(x^2+y^2)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$$

$$=2\,\varepsilon c\int\int x^2\,dx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

$$+2\,\varepsilon c\int\int y^2 dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx.$$

Nella prima parte di questa espressione si consideri in secondo luogo come costante la x, e si eseguisca l'integrazione rispetto alla y tra i valori limiti

$$y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ ,\quad y=+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ ,$$

che si ricavano dalla equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ notata di sopra: osservando che l'integrale

$$\int\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy$$

preso in ordine ad y tra i limiti predetti non è altro (XCIV. VI) che la metà dell'area di un circolo il quale ha per raggio $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, vale a dire non è altro che la quantità $\frac{\pi b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, avremo per la prima parte della espressione di μ il valore

$$2\varepsilon c\int\int x^2dx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

$$=\frac{2\varepsilon c}{b}\int x^2dx\int\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy$$

$$=\frac{2\varepsilon c}{b}\int x^2dx.\,\frac{\pi b^2}{2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\varepsilon\pi bc\int x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx\,;$$

e compiendo l'integrazione rispetto alla x da $x=-a$ sino ad $x=+a$, avremo in fine per quella prima parte della espressione di μ il valore

$$2\varepsilon c\int\int x^2\,dx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy$$

$$=\varepsilon\pi bc\int_{-a}^{+a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{15}\,\varepsilon\pi\,bca^3.$$

Quanto alla seconda parte della espressione di μ, essendo essa della stessa forma e non differendo dalla prima parte se non per il cangiamento reciproco della variabile x nella y, e della costante a nella b, si otterrà senz'altro il valore

$$2\varepsilon c\int\int y^2 dy \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dx = \frac{4}{15}\varepsilon\pi a c b^3 .$$

Congiunti quindi i valori delle due parti, risulterà dalla loro somma il momento d'inerzia della ellissoide proposta relativamente all'asse $2c$, e sarà

$$\mu = \frac{4\,\varepsilon\pi\, a\, bc}{15}(a^2+b^2) = \frac{M}{5}(a^2+b^2),$$

dove con $M=\frac{4}{3}\varepsilon\pi\, a\, bc$ viene espressa la massa della medesima ellissoide. In ordine agli altri due assi $2b$, $2a$, si troveranno similmente i rispettivi momenti d'inerzia

$$\mu' = \frac{M}{5}(a^2+c^2)\ ,\ \mu'' = \frac{M}{5}(b^2+c^2) .$$

CAPO XII.

MOVIMENTO DEI CORPI SOLIDI INTORNO A UN ASSE E A UN PUNTO FISSO

§. 1°.

Movimento di un solido intorno a un asse fisso.

417. **Equazione del moto di un corpo solido intorno a un asse fisso.** Sia m la massa di un corpo solido o di un sistema qualunque rigido, che si muove intorno a un asse fisso; e θ

sia l'angolo che alla fine di un tempo t formano tra loro due piani condotti per l'asse di rotazione, l'uno stabile e l'altro mobile insieme col corpo: di più sieno x, y, z le coordinate rettangolari di un punto, o di una molecola dm al termine del medesimo tempo; X, Y, Z le componenti della sua forza motrice parallele ai tre assi coordinati; v ed r la sua velocità e la sua distanza dall'asse fisso, che noi prenderemo per l'asse delle z.

Ciò posto, le forza che nelle singole molecole se fossero libere produrrebbero i movimenti osservati nel sistema, prese che sieno coi segni opposti, debbono equilibrarsi in ogni istante (393) con quelle forze che sono applicate realmente alle medesime molecole: ora la forza che in ciascuna molecola o in ciascun punto dm se fosse libero produrrebbe il moto circolare effettivo ed osservato nel sistema, equivale (299) alle due forze $\frac{dv}{dt}\,dm$, $\frac{v^2}{r}\,dm$ secondo la retta tangente e secondo la normale; dunque nella rotazione del sistema tutte le forze che hanno per componenti X, Y, Z, debbono ad ogni istante equilibrarsi colle forze che hanno per componenti le espressioni $-\frac{dv}{dt}\,dm$, $-\frac{v^2}{r}\,dm$. Ma noi sappiamo (86. 2.°) che in un sistema rigido e mobile intorno a un asse fisso la condizione di equilibrio tra le forze è questa che si annulli la somma algebrica dei loro momenti rispetto al medesimo asse: dunque poichè sono nulli di per sè i momenti delle due forze Z, $\frac{v^2}{r}\,dm$ rispetto all'asse di rotazione, e poichè i momenti delle altre forze X, Y, $-\frac{dv}{dt}\,dm$ sono Xy, $-Yx$, $-r\frac{dv}{dt}\,dm$, perciò si avrà l'equazione

$$\Sigma(Xy - Yx) - \Sigma\left(r\,\frac{dv}{dt}\,dm\right) = 0\,.$$

Abbiamo poi (364) il valore $v = r\,\frac{d\theta}{dt}$, e conseguentemente anche

l'altro valore $\frac{dv}{dt}=r\frac{d^2\theta}{dt^2}$: sarà dunque

$$\Sigma\left(r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}dm\right)=\Sigma(Xy-Yx);$$

e siccome il fattore $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ rimane il medesimo per tutti i punti del sistema, e può scriversi fuori del segno Σ, così verrà in fine

$$(w)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{\Sigma(Xy-Yx)}{\Sigma(r^2dm)},$$

che è l'equazione per la quale si determina il movimento di un corpo solido intorno a un asse fisso.

In questa equazione il denominatore del secondo membro è il momento d'inerzia del corpo relativamente all'asse di rotazione, e il numeratore rappresenta la somma dei momenti di tutte le forze sollecitanti rispetto al medesimo asse; sono poi questi ultimi momenti positivi o negativi, secondo che le forze tendono con essi ad aumentare o a diminuire l'angolo θ. Il primo integrale della medesima equazione ci darà la velocità angolare $\frac{d\theta}{dt}$ espressa per la variabile t, l'integrale secondo ci farà conoscere l'angolo θ, e la posizione del corpo alla fine del tempo t: le costanti delle due integrazioni si determinano mediante i valori della velocità angolare, e della posizione del mobile al principio del movimento.

418. Se le forze acceleratrici sono nulle, e il corpo m si muove intorno all'asse in virtù di una forza istantanea P, il moto di rotazione sarà uniforme. In questo caso chiamiamo Q la proiezione della forza P sopra un piano perpendicolare all'asse di rotazione, q la distanza della proiezione Q dal medesimo asse, ed ω la velocità angolare costante: sarà ωr la velocità assoluta di un punto dm posto alla distanza r dall'asse (364), e si esprimerà col prodotto $\omega r\,dm$ la quantità di moto, o la forza effettiva (13) del medesimo punto nella

direzione della tangente al circolo che descrive. Laonde alla forza P dovranno fare equilibrio (393) le forze $-\omega r\,dm$ relative a tutti gli elementi del corpo, ossia dovrà sussistere (86. 2.°) l'equazione

$$Qq - \Sigma(\omega r^2 dm) = 0$$

tra i momenti di quella prima e di queste seconde forze rispetto all'asse immobile di rotazione: si ricava quindi la formola

$$(w') \qquad \omega = \frac{Qq}{\Sigma(r^2 dm)},$$

la quale servirà a trovare la velocità angolare di un sistema rigido nel moto di rotazione prodotto da una forza istantanea intorno a un asse fisso.

Quando alla forza istantanea P si aggiunge l'azione continua di altre forze, la quantità ω determinata colla formola (w') non sarà altro se non la velocità angolare, la quale ha luogo nel sistema al principio del moto e deve in ogni modo conoscersi, affinchè mediante il primo integrale della equazione (w) si possa determinare la velocità angolare $\frac{d\theta}{dt}$ alla fine di un dato tempo qualunque.

419. Pressione esercitata contro l'asse durante il movimento. Preso sempre l'asse di rotazione per quello delle z, vogliamo qui trovare le due pressioni perpendicolari allo stesso asse di rotazione e parallele agli altri due assi coordinati. Alla fine di un tempo t per un elemento dm, secondo gli assi delle coordinate x ed y, sieno X ed Y le componenti della forza applicata, $\frac{d^2x}{dt^2}dm$ e $\frac{d^2y}{dt^2}dm$ le componenti della forza effettiva: saranno $X - \frac{d^2x}{dt^2}dm$, $Y - \frac{d^2y}{dt^2}dm$ le forze perdute dall'elemento dm; e per conseguenza le due somme

$$\Sigma(X)-\Sigma\left(\frac{d^2x}{dt^2}dm\right),\ \Sigma(Y)-\Sigma\left(\frac{d^2y}{dt^2}dm\right)$$

saranno le forze che perde l'intera massa m nella direzione degli assi prenominati. Ora è manifesto che nel solido m non si perde qualche parte delle forze applicate, se non in quanto l'asse fisso resiste all'azione o alla pressione, che gli elementi del corpo esercitano scambievolmente tra loro e contro il medesimo asse; dunque le dette somme rappresentano le pressioni P, P′ parallele ai due assi coordinati OX, OY, e perpendicolari all'asse di rotazione OZ; e si avrà quindi

$$P=\Sigma(X)-\Sigma\left(\frac{d^2x}{dt^2}dm\right),\ P'=\Sigma(Y)-\Sigma\left(\frac{d^2y}{dt^2}dm\right).$$

Indichiamo adesso con r la distanza dell'elemento dm dall'asse OZ, e al termine del tempo t sia ω la velocità angolare, e θ l'angolo che fa il piano coordinato ZOX col piano condotto per OZ e pel punto dm, oppure che fa sul piano XOY la proiezione della distanza r coll'asse OX: sussisteranno le formole

$$x=r\cos\theta\ ,\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

e conseguentemente anche le altre

$$\frac{dx}{dt}=-r\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt}=-y\frac{d\theta}{dt}\ ,\ \frac{dy}{dt}=r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=x\frac{d\theta}{dt}\ .$$

È poi $\frac{d\theta}{dt}$ l'espressione (364) della velocità angolare ω; sarà dunque

$$\frac{dx}{dt}=-y\omega\ ,\ \frac{dy}{dt}=x\omega:$$

onde ricavandosi quinci colla differenziazione i due valori

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega \frac{dy}{dt} - y \frac{d\omega}{dt} = -x\omega^2 - y \frac{d\omega}{dt} ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \omega \frac{dx}{dt} + x \frac{d\omega}{dt} = -y\omega^2 + x \frac{d\omega}{dt} ,$$

le due pressioni trovate più sopra si scriveranno sotto la forma

$$P = \Sigma(X) + \omega^2 \Sigma(x\, dm) + \frac{d\omega}{dt} \Sigma(y\, dm) ,$$

$$P' = \Sigma(Y) + \omega^2 \Sigma(y\, dm) - \frac{d\omega}{dt} \Sigma(x\, dm) .$$

E siccome, essendo x_1 ed y_1 le distanze del centro di gravita dai piani YOZ ed XOZ, valgono (109) le formole $\Sigma(x\, dm) = mx_1$, $\Sigma(y\, dm) = my_1$; così avremo in fine

$$(w'') \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \Sigma(X) + mx_1 \omega^2 + my_1 \dfrac{d\omega}{dt} , \\[2ex] P' = \Sigma(Y) + my_1 \omega^2 - mx_1 \dfrac{d\omega}{dt} . \end{array} \right.$$

La quantità $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, e la stessa velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ si determinano per mezzo dell'equazione (w. 417) e del suo primo integrale; dopo la determinazione di quella quantità e velocità angolare, le formole (w'') ci faranno conoscere immantinente le pressioni P, P'. Conosciute poi queste due pressioni, potremo trovare eziandio le rispettive distanze p, p' tra i loro punti di applicazione sull'asse OZ e l'origine O; giacchè pigliando i momenti delle forze parallele rispetto al piano XOY, in virtù del teorema dimostrato nel numero (58) abbiamo le due formole

$$(w''')\begin{cases} Pp=\Sigma(X-\dfrac{d^2x}{dt^2}dm)z=\Sigma(Xz)+\omega^2\Sigma(xz\,dm)+\dfrac{d\omega}{dt}\Sigma(yz\,dm)\,, \\ P'p'=\Sigma(Y-\dfrac{d^2y}{dt^2}dm)z=\Sigma(Yz)+\omega^2\Sigma(yz\,dm)-\dfrac{d\omega}{dt}\Sigma(xz\,dm). \end{cases}$$

420. Quando il corpo solido non è sollecitato da forze acceleratrici, e la velocità angolare ω si mantiene costante, si ha $X=0=Y$, $\frac{d\omega}{dt}=0$: in questo caso le formole (w''), (w''') ci daranno i quattro valori

$$P=mx_1\omega^2\,,\quad P'=my_1\omega^2\,,$$

$$p=\frac{\omega^2\Sigma(xz\,dm)}{P}=\frac{\Sigma(xz\,dm)}{mx_1}\,,\ p'=\frac{\omega^2\Sigma(yz\,dm)}{P'}=\frac{\Sigma(yz\,dm)}{my_1}\ ;$$

ed appartengono i primi due alle pressioni totali esercitati sull'asse di rotazione parallelamente ad OX e OY, gli altri due alle distanze tra i punti di applicazione delle medesime pressioni nell'asse OZ e l'origine O.

Se le distanze p, p' risultano uguali tra loro, le pressioni P, P' avranno i rispettivi punti di applicazione in uno stesso luogo del l'asse OZ e si ridurranno (26) ad una sola forza perpendicolare, $\sqrt{(mx_1\omega^2)^2+(my_1\omega^2)^2}=mr_1\omega^2$, cioè alla forza centrifuga $\frac{mr_1^2\omega^2}{r_1}$ di tutta la massa m raccolta nel centro di gravità alla distanza r_1 dall'asse fisso di rotazione. La condizione poi per la quale le pressioni totali P e P', ossia le forze centrifughe di tutti i punti del corpo m si riducono ad una risultante unica, si verifica particolarmente nel caso che susssistano insieme $\Sigma(xz\,dm)=0$, $\Sigma(yz\,dm)=0$, vale a dire quando OZ è un *asse principale* del sistema rigido relativamente al punto O. Di fatti in tal caso si avrà $p=0=p'$; e così dalle forze centrifughe risulterà una pressione unica, la quale passerà per l'origine O: onde se si fissi solo questo pun-

to, ad ogni istante verrà dalla sua resistenza interamente distrutta la pressione, e il sistema o il corpo solido si moverà intorno ad OZ come se questo asse di rotazione fosse immobile e fisso.

Poichè le pressioni totali secondo gli assi OX ed OY si esprimono nella ipotesi da noi fatta con $P = mx_1\omega^2 = \omega^2\Sigma(x\,dm)$, $P' = my_1\omega^2 = \omega^2\Sigma(y\,dm)$, saranno $\omega^2 x\,dm$ ed $\omega^2 y\,dm$ le componenti della pressione o della forza centrifuga $\omega^2 r\,dm$ per rispetto a ciascun punto del corpo mobile intorno all'asse fisso OZ. Ciò posto, se vogliamo che questo asse non soffra pressione alcuna durante il moto del corpo, dobbiamo introdurre la condizione che tutte le pressioni parziali, o le forze centrifughe $\omega^2 r\,dm$ relative a tutti i punti del sistema, si equilibrino tra loro indipendentemente dal medesimo asse di rotazione: ora essendo nulle di per se le componenti di queste forze secondo l'asse OZ e la somma dei loro momenti rispetto allo stesso asse, le formole [e''] del numero (85) ci danno per l'equilibrio delle medesime forze nel sistema considerato come libero e indipendente dall'asse di rotazione le quattro equazioni

$$\omega^2\Sigma(x\,dm) = 0,\ \omega^2\Sigma(y\,dm) = 0,\ \omega^2\Sigma(yz\,dm) = 0,\ \omega^2\Sigma(xz\,dm) = 0\,;$$

ovvero

$$\Sigma(x\,dm) = mx_1 = 0\ ,\ \Sigma(y\,dm) = my_1 = 0\,,$$

$$\Sigma(yz\,dm) = 0\ ,\ \Sigma(xz\,dm) = 0.$$

Dunque *l'asse OZ nella rotazione del sistema non soffrirà pressione di sorta sotto le due condizioni* espresse dalle ultime equazioni, e sono *che il medesimo OZ passi pel centro di gravità del corpo o sistema, e che sia un asse principale relativamente allo stesso centro* O.

421. Percossa contro l'asse nell'attuarsi della rotazione. La pressione nasce dalle forze continue o dalla sola rotazione del

corpo, e si esercita incessantemente sull'asse durante il moto; ma la forza istantanea, per l'impulso della quale il corpo è messo in movimento, produce sull'asse nel primo istante un urto o una percossa che dobbiamo ora determinare.

L'asse di rotazione OZ costituisca sempre un sistema di assi rettangolari insieme con OX ed OY; e sieno X, Y, Z, le componenti della forza istantanea nelle direzioni parallele agli assi, ed ω sia la velocità angolare che concepisce il corpo solido per l'azione della medesima forza. La velocità ωr dell'elemento dm, presso il punto (x, y, z) e alla distanza r dall'asse di rotazione, ha per componenti $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}=0$: perciò le quantità attuali di moto o le forze effettive di ciascun elemento secondo le rispettive direzioni degli assi si esprimeranno nel primo istante con $\frac{dx}{dt}dm$, $\frac{dy}{dt}dm$, $\frac{dz}{dt}dm=0$; e le percussioni Q, Q′, Q″ che secondo le medesime direzioni sostiene l'asse fisso, dovendo essere attribuite alle forze corrispondenti perdute da tutto il corpo, si determineranno quanto all'intensità colle formole

$$Q=X-\Sigma\left(\frac{dx}{dt}dm\right),\ Q'=Y-\Sigma\left(\frac{dy}{dt}dm\right),\ Q''=Z\,.$$

Ma si sono già trovati di sopra (419) i valori $\frac{dx}{dt}=-y\omega$, $\frac{dy}{dt}=x\omega$; dunque indicando con x_1 ed y_1 le coordinate del centro di gravità del corpo m, avremo in fine

$$Q=X+\omega\Sigma(y\,dm)=X+my_1\omega,\ Q'=Y-\omega\Sigma(x\,dm)=Y-mx_1\omega,$$

$$Q''=Z\,.$$

Ora se si domandano le condizioni da verificarsi perchè l'asse OZ non soffra alcun urto o percossa, disponiamo gli assi coordinati in

modo, che il piano XOY passi pel punto di applicazione della forza istantanea, e il piano XOZ passi pel centro di gravità del corpo mobile m. L'asse fisso non riceverà ne' primi istanti alcun urto o percossa, quando la forza impressa da principio al sistema si equilibra indipendentemente dall'asse colle forze effettive $\omega r\, dm$, relative a tutti gli elementi del corpo e prese ciascuna col segno opposto; e per cosiffatto equilibrio tra la forza impressa e tutte le forze $-\omega r\, dm$, è poi necessario (85. e'') che si annullino separatamente sì le somme delle componenti parallele agli assi coordinati e sì ancora le somme dei momenti rispetto ai medesimi assi: adunque poichè a cagione del valore $y_{\prime}=0$, le componenti delle forze tangenziali $-\omega r\, dm$ sono

$$-\Sigma\left(\frac{dx}{dt}\, dm\right)=\omega\Sigma(y\, dm)=my_{\prime}\omega=0\ ,$$

$$-\Sigma\left(\frac{dy}{dt}\, dm\right)=-\omega\Sigma(x\, dm)=-mx_{\prime}\omega\ ,\ -\Sigma\left(\frac{dz}{dt}\, dm\right)=0,$$

e poichè di più i momenti delle stesse forze rispetto all'asse OZ si esprimono colla somma $-\omega\Sigma(r^2 dm)$, perciò dalle formole citate del numero (85) ricaveremo le sei equazioni

$$X=0\ ,\ Y-mx_{\prime}\omega=0\ ,\ Z=0\ ,$$

$$\Sigma(xz\, dm)=0\ ,\ \Sigma(yz\, dm)=0\ ,\ Yb-\omega\Sigma(r^2 dm)=0\ ,$$

dove colla lettera b è indicata l'ascissa del punto in cui si applica la forza istantanea nel piano XOY. Si raccoglie quinci che per non produrre alcuna percossa nell'asse di rotazione, dobbiamo soddisfare a queste tre condizioni: 1°. che la forza istantanea venga applicata normalmente al piano XOZ che passa per l'asse fisso e il centro di gravità del corpo, come apparisce dalla prima e dalla terza delle ultime equazioni: 2°. che l'asse di rotazione sia *principale* relativamente al punto O, nel quale incontra il piano XOY condotto

per la direzione della forza e perpendicolare allo stesso asse; ed è ciò evidente, se si richiama alla mente la definizione degli assi principali e si attende alle due equazioni quarta e quinta: 3.° che la distanza tra l'asse e il punto C in cui la direzione della forza istantanea s'incontra col piano XOZ detto di sopra, sia tale quale richiedono la seconda equazione e la sesta, cioè

$$(w^{\text{IV}}) \qquad b = \frac{\omega\Sigma(r^2dm)}{Y} = \frac{\Sigma(r^2dm)}{mx_1} .$$

Il punto C determinato con questa formola dicesi il *centro di percossa*.

422. Moto di un corpo pesante intorno a un asse orizzontale. Gli assi coordinati e rettangolari prendiamoli in modo che OZ coincida coll'asse fisso intorno al quale può rotare il corpo pasante m, ossia un pendolo composto, e OY si diriga al basso nel senso della gravità: alla fine di un tempo t rappresentiamo con θ l'angolo che col piano verticale ZOY forma il piano condotto per l'asse fisso e il centro di gravità; e con x_1, a l'ascissa del medesimo centro, e la sua distanza da OZ. L'elemento dm, situato presso il punto (x, y, z) alla distanza r dall'asse di rotazione, è sottoposto all'azione della forza $Y = g\,dm$, il cui momento $gx\,dm$, siccome quello che tende a diminuire l'angolo θ, si deve prendere negativamente; onde nel caso attuale, avendosi $X = 0$, l'equazione del movimento (417. w) sarà questa

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{g\Sigma(x\,dm)}{\Sigma(r^2dm)} = - \frac{gmx_1}{\Sigma(r^2dm)} .$$

Ma abbiamo $x_1 = a \operatorname{sen} \theta$; ed espresso con k il raggio di girazione, ossia con mk^2 il momento d'inerzia rispetto a un asse condotto pel centro di gravità e parallelo all'asse OZ, abbiamo (407) ancora $\Sigma(r^2dm) = m(k^2 + a^2)$: l'equazione del moto diviene dunque

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{ag}{a^2+k^2} \operatorname{sen}\theta .$$

Moltiplicando per $2\,d\theta$ e integrando, otterremo in fine l'equazione

$$(w^{\text{v}}) \qquad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2ag}{a^2+k^2}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \omega_0^2 ,$$

nella quale θ_0 ed ω_0 sono i valori iniziali delle quantità θ, $\frac{d\theta}{dt}$.

Data ovvero determinata la velocità iniziale ω_0 in quel modo che abbiamo detto nel numero (418), l'equazione (w^{v}) ci farà conoscere nel corpo oscillante la velocità angolare $\frac{d\theta}{dt}$ per una data posizione del centro di gravità; risolvendo poi la medesima equazione rispetto a dt e integrandola, avremo il tempo t in funzione di θ, o l'angolo θ in funzione di t, e così per un istante qualunque potremo determinare la posizione del centro di gravità e del corpo stesso oscillante.

423. **Centro di oscillazione e di percossa del pendolo composto.** Immaginiamo che la massa del corpo oscillante venga tutta condensata in un punto O′ posto nel piano XOY alla distanza l dalla origine O: tutto il sistema si troverà così ridotto a un pendolo semplice, e al suo movimento potrà applicarsi l'equazione (w^{v}) del numero precedente, purchè si sostituisca l in luogo di a, e si faccia k uguale a zero. Di tal guisa nel moto di un pendolo semplice sussisterà l'equazione

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) + \omega_0^2 ;$$

la quale divenendo identica alla stessa equazione (w^{v}) nell'ipotesi che si abbia il valore

(w^{vi}) $$l = a + \frac{k^2}{a} \;,$$

ne deduciamo che il movimento di un pendolo composto succede allo stesso modo che quello di un pendolo semplice avente una lunghezza $= a + \frac{k^2}{a}$, bene inteso però che nell'un caso e nell'altro sieno gli stessi l'angolo θ_0, e la velocità ω_0 al principio del moto.

Nel piano che passa per l'asse di sospensione e pel centro di gravità del corpo m, figuriamoci adesso una retta parallela al medesimo asse, e distante da esso di una quantità $l = a + \frac{k^2}{a}$: i punti del corpo solido che si trovano su questa retta, si moveranno tutti come se fossero isolati e oscillassero intorno al detto asse di sospensione; la retta si chiama asse di oscillazione, e *centro di oscillazione* è appellato specialmente quel punto dove la medesima retta incontra il piano condotto pel centro di gravità normalmente all'asse di sospensione. Del resto è chiaro che il centro di oscillazione dista più dall'asse fisso che lo stesso centro di gravità, e l'eccesso della distanza consiste nel quoto $\frac{k^2}{a}$. Inoltre è pur manifesto che gli assi di sospensione e di oscillazione sono tra loro reciproci: imperocchè fissando questo secondo asse, abbiamo $a' = \frac{k^2}{a}$ per la distanza dal centro di gravità dal nuovo asse di sospensione, e così il nuovo asse di oscillazione dovendo da questo distare di una quantità $a' + \frac{k^2}{a'} = \frac{k^2}{a} + a$, coinciderà necessariamente col primitivo asse di sospensione.

Da ultimo nel pendolo composto il centro di percossa coincide col centro stesso di oscillazione. Infatti nella formola (w^{v}. **421**), la quale suppone che il centro di gravità del corpo m si ritrovi nel piano coordinato XOZ, si deve fare $x_1 = a$; perciò nel mede-

simo piano la distanza del centro di percossa dall'asse fisso avrà per espressione

$$b = \frac{\Sigma(r^2 dm)}{ma} .$$

Ora è $\Sigma(r^2 dm) = m(k^2 + a^2)$, come abbiamo dichiarato nel numero precedente; sarà dunque

$$b = a + \frac{k^2}{a} = l ,$$

cioè la distanza del centro di percossa uguale alla distanza del centro di oscillazione dall'asse fisso.

Applichiamo adesso la esposta dottrina alla soluzione dei tre problemi seguenti:

424. Problema I. *Trovare il centro di oscillazione o di percossa in una linea retta, in una sfera, e in un parallelepipedo rettangolo, nell'ipotesi che queste figure sieno pesanti ed omogenee.*

1°. Sia h la lunghezza di una retta pesante ed invariabile che sospesa per l'estremità superiore può oscillare in un piano verticale: la distanza del centro di gravità dall'asse di sospensione sarà $a = \frac{1}{2} h$, e il quadrato del raggio di girazione (413. 1°.) rispetto a un asse condotto normalmente pel centro di gravità sarà $k^2 = \frac{1}{12} h$. Sostituiti questi valori nella formola (w^{VI}. 423), abbiamo la distanza del centro d'oscillazione dall'estremità fissa espressa da

$$l = \frac{1}{2} h + \frac{1}{6} h = \frac{2}{3} h .$$

2°. Sia r il raggio della sfera oscillante, ed h la distanza tra il centro di gravità della sfera e il punto di sospensione; il raggio

di girazione relativamente al diametro si determina (414. 3°.) colla formola $k^2 = \frac{2}{5} r^2$: avremo dunque

$$l = h + \frac{2}{5} \cdot \frac{r^2}{h},$$

Quando l'asse di sospensione tocca la sfera, si ha $h = r$ ed $l = r + \frac{2}{5} r$: in questo caso dunque il centro di oscillazione è situato alla distanza $\frac{2}{5} r$ dal centro di gravità.

3°. Sieno h, b, c intorno a un vertice i lati di un parallelepipedo rettangolo, il quale oscilli intorno a un asse orizzontale che divide in due parti eguali la base superiore bc, ed è parallelo al lato c: la distanza del centro di gravità dall'asse di sospensione è $a = \frac{1}{2} h$ e il quadrato del raggio di girazione relativamente a un asse che passi pel centro di gravità e sia parallelo al lato c, si esprime (415) con $k^2 = \frac{1}{12} (h^2 + b^2)$. Dunque la distanza del centro di oscillazione dall'asse fisso sarà

$$l = \frac{1}{2} h + \frac{1}{6} \frac{h^2 + b^2}{h} = \frac{4h^2 + b^2}{6h}.$$

Nel caso che il lato b del parallelepipedo sia tanto poca cosa relativamente alla dimensione h, che senza errore sensibile si possa trascurare la quantità b^2, il risultato torna all'espressione $l = \frac{2}{3} h$, come nella linea retta.

425. **Problema** II. *Si ha una verga pesante* AB, *ma sottile e omogenea, la quale può oscillare intorno a un asse orizzontale che passa per l'estremità* A: *sollevata prima la verga orizzontalmente e poi lasciatala a sè stessa, vogliamo determinare la relazione tra*

gli angoli θ ed α, che dopo un tempo qualunque fa la verga colla posizione iniziale e colla direzione della pressione che esercita contro l'asse fisso.

Chiamiamo h, m, ω la lunghezza, la massa, e la velocità angolare che ha la verga alla fine di un tempo t: posta l'origine in A, prendiamo per asse delle ascisse la posizione iniziale e orizzontale della verga, e la posizione verticale per quello delle ordinate. Per un elemento qualunque le componenti della forza motrice sono $X=0$, $Y=g\,dm$; $\Sigma(gx\,dm)=gmx_1=\frac{1}{2}\,gmh\cos\theta$ è la somma dei momenti positivi di tutte le forze relativamente all'asse fisso, momenti che tendono a far crescere l'angolo θ; finalmente $\frac{1}{3}\,mh^2$ è il momento d'inerzia (413 1°.) della verga relativamente allo stesso asse. Considerato tutto, e attesa la formola (w. 417), l'equazione del moto nel caso nostro sarà

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\left(=\frac{d\omega}{dt}\right)=\frac{3g}{2h}\cos\theta\ ,\ \frac{d\theta^2}{dt^2}(=\omega^2)=\frac{3g}{h}\operatorname{sen}\theta\ .$$

In conseguenza le due formole (w''. 419) che danno le componenti della pressione nel senso degli assi coordinati, avuto riguardo ai valori $x_1=\frac{1}{2}\,h\cos\theta$ ed $y_1=\frac{1}{2}\,h\operatorname{sen}\theta$, divengono

$$P=\frac{3}{2}\,mg\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{3}{4}\,mg\operatorname{sen}\theta\cos\theta=\frac{9}{4}\,mg\operatorname{sen}\theta\cos\theta\ ,$$

$$P'=mg+\frac{3}{2}\,mg\operatorname{sen}^2\theta-\frac{3}{4}\,mg\cos^2\theta$$

$$=mg\left(1+\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\theta-\frac{3}{4}\cos^2\theta\right).$$

Qui è da osservare che il rapporto tra le componenti P′ e P non è altro che la tangente dell'angolo $\alpha+\theta$, formato dalla direzione del-

la pressione risultante con P ossia coll'asse delle ascisse: avremo dunque

$$\frac{\tang\alpha+\tang\theta}{1-\tang\alpha\tang\theta}=\frac{P'}{P}=\frac{1+\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\theta-\frac{3}{4}\cos^2\theta}{\frac{9}{4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta};$$

da questa si ricavano le seguenti relazioni

$$\frac{\tang\alpha\tang\theta+\tang^2\theta}{1-\tang\alpha\tang\theta}=\frac{4}{9\cos^2\theta}+\frac{2}{3}\tang^2\theta-\frac{1}{3},$$

$$\tang\alpha\tang\theta\left(1+\frac{4}{9\cos^2\theta}+\frac{2}{3}\tang^2\theta-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{9\cos^2\theta}-\frac{1}{3}\tang^2\theta-\frac{1}{3},$$

$$\tang\alpha\tang\theta=\frac{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^2\theta-\frac{1}{3}\cos^2\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}+\frac{2}{3}},$$

e finalmente

$$\tang\alpha\tang\theta=\frac{1}{10}.$$

426. **Problema** III. *Mentre una verga rigida* AC, *pesante ed omogenea. oscilla in un piano verticale intorno all'estremità* A, *una forza tende a farla piegare ma senza effetto: vogliamo determinare il punto dove la forza esercita il massimo momento, e il valore di cotesto momento in tal punto.*

Sieno a, m, θ la lunghezza, la massa, e l'angolo che fa la verga colla direzione della gravità: b ed r sieno le distanze del punto cercato B, e di un elemento qualunque dr posto al di sotto di B, dalla estremità fissa A. La massa dell'elemento dr è $\frac{m\,dr}{a}$: perciò $\frac{m\,dr}{a} g \operatorname{sen}\theta$ è la componente della forza applicata ossia della gravità secondo la direzione del moto, $-\frac{m\,dr}{a}\frac{dv}{dt} = -\frac{m\,dr}{a} r \frac{d^2\theta}{dt^2}$ è poi nel senso medesimo la componente (299. 364) della forza effettiva che tende a diminuire l'angolo θ: la forza dunque acquistata o perduta secondo la direzione del moto dall'elemento dr per la connessione che è nel sistema, siccome quella che è data dalla differenza tra quelle due componenti, sarà espressa con

$$-\frac{m}{a}\left(r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + g \operatorname{sen}\theta\right) dr$$

Ora se in ordine al punto B facciamo la somma de'momenti di tutte le forze che per la connessione esistente acquistano o perdono gli elementi dr nel senso della direzione del moto, da questa somma risulterà il momento di quella forza che tende a piegare in B la verga AC; e l'espressione di questo momento sarà

$$-\frac{m}{a}\int_b^a \left(r\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + g \operatorname{sen}\theta\right)(r-b)\,dr.$$

Ma nel movimento della verga essendo $-\frac{1}{2} ma \operatorname{sen}\theta$ la somma dei momenti delle forze applicate rispetto a un asse fisso (422), e $\frac{1}{3} ma^2$ il momento d'inerzia della verga relativamente al medesimo asse (413. 1°.), ha luogo (417) l'equazione $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2a} \operatorname{sen}\theta$; conseguentemente l'espressione del momento della forza che tende a piegare la verga nel punto B, diviene

$$\frac{mg \operatorname{sen} \theta}{2a^2} \int_b^a (3r - 2a)(r - b)\, dr$$

$$= \frac{mg \operatorname{sen} \theta}{2a^2} \int_b^a (3r^2 - 2ar - 3br + 2ab) dr$$

$$= \frac{mg \operatorname{sen} \theta}{a^2} \left(\frac{1}{2} b^3 - ab^2 + \frac{1}{2} a^2 b \right) = \frac{mg \operatorname{sen} \theta}{4a^2}\, b(a - b)^2 .$$

Considerando b come variabile, il momento trovato diviene massimo insieme colla quantità $b(a-b)^2 = b^3 - 2ab^2 + a^2 b$; ma il massimo valore di questa risponde alla seconda radice (LXX) dell'equazione $3b^2 - 4ab + a^2 = 0$, cioè risponde al valore $b = \frac{1}{3} a$; dunque sopra la verga AC il punto B, e il centro di oscillazione sono simmetrici (424. 1°.) relativamente al centro di gravità. Il momento poi della forza che tende a piegare la verga nel punto testè determinato, ha per valore

$$\frac{mg \operatorname{sen} \theta}{4a^2} \, \frac{a}{3} \left(a - \frac{a}{3} \right)^2 = \frac{mg \operatorname{sen} \theta}{27}\, a .$$

§. 2°.

Movimento di un solido intorno a un punto fisso.

427. **Componenti della velocità per un punto qualunque del solido.** Quando un corpo solido, o un sistema rigido qualunque, legato a un punto fisso O (fig. 182a), si muove continuamente intorno a questo punto, il moto del medesimo corpo o sistema in un istante o tempo infinitesimo si può considerare come una semplice rotazione intorno a un certo asse OR, il quale passa e s'immagina condotto per il punto fisso O; e poichè un tale asse nell'interno del corpo cangia generalmente di posizione da

un istante all'altro, perciò viene esso chiamato *asse istantaneo di rotazione*.

Sieno OX, OY, OZ tre assi rettangolari che passano per il punto fisso; e alla fine di un tempo t essendo ω la velocità angolare del solido, o la sua velocità di rotazione intorno all'asse istantaneo, si rappresentino rispettivamente con p, q, r le componenti di questa velocità intorno ai predetti assi rettangolari: sieno inoltre x, y, z le coordinate di un punto qualunque M del solido, ρ la sua distanza dall'asse OZ, ossia la proiezione OH del raggio vettore OM sopra il piano coordinato XOY, ed ε l'angolo di questa proiezione coll'asse OX. La velocità di rotazione del punto M intorno all'asse componente OZ si esprimerà (364) col prodotto ρr, e si avranno manifestamente le due espressioni

$$x=\rho\cos\varepsilon\ ,\quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,\varepsilon :$$

ora chiamando ds l'arco circolare che nel tempuscolo dt descriverebbe il punto M intorno all'asse OZ, se fosse animato dalla sola velocità ρr, sappiamo che i due valori conseguenti

$$\frac{dx}{ds}=\frac{-\rho\,\mathrm{sen}\,\varepsilon\, d\varepsilon}{\rho\, d\varepsilon}=-\frac{y}{\rho}\ ,\quad \frac{dy}{ds}=\frac{\rho\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{\rho\, d\varepsilon}=\frac{x}{\rho}\ ,$$

rappresentano i coseni degli angoli che la direzione della velocità ρr fa coi rispettivi assi OX ed OY: si avranno quindi le componenti della velocità di rotazione del punto M intorno all'asse OZ, parallele agli altri due assi OX ed OY, moltiplicando rispettivamente l'espressione ρr per i due valori $-\frac{y}{\rho}$, $\frac{x}{\rho}$; e coteste componenti saranno per conseguenza $-ry$, $+rx$.

Supponiamo che a norma della convenzione indicata nel numero (386), la rotazione del solido si faccia da X verso Y per l'asse OZ, da Z verso X per l'asse OY, da Y verso Z per l'asse OX; come si sono ottenute in valore e in segno le componenti della velocità di rotazione del punto M intorno all'asse OZ, parallele agli assi OX

ed OY; così con regolare mutamento di lettere nelle espressioni di queste componenti, si otterranno in valore e in segno le componenti della velocità di rotazione intorno all'asse OY parallele agli assi OZ ed OX, e le componenti della rotazione intorno all'asse OX, parallele agli assi OY ed OZ, cioè si avranno

per gli assi	le componenti parallele	agli assi
OZ	$-ry$, $+rx$	OX, OY
OY	$-qx$, $+qz$	OZ, OX
OX	$-pz$, $+py$	OY, OZ.

Se ora si sommano insieme e si compongono le velocità parallele a un medesimo asse, risulteranno le componenti della velocità assoluta del punto M ossia (x, y, z), rispettivamente parallele ai tre assi rettangolari OX, OY, OZ; le espressioni di queste componenti saranno

$$v_x = qz - ry\ ,\ v_y = rx - pz\ ,\ v_z = py - qx.$$

È poi chiaro che in queste formole le rotazioni, considerate per es. come positive nel senso indicato di sopra, si dovranno considerare come negative nel senso opposto.

428. **Componenti della forza acceleratrice per un punto qualunque del solido.** Le componenti della forza acceleratrice parallele agli assi OX, OY, OZ, per un punto qualunque M, ossia (x, y, z) del solido, alla fine del tempo t si esprimono rispettivamente per i rapporti dei differenziali dv_x, dv_y, dv_z all' incremento dt, ossia per le derivate delle velocità componenti rispetto al tempo; sicchè dinotando con f_x, f_y, f_z, le dette componenti della forza acceleratrice, avremo

$$f_x = \frac{dv_x}{dt}\ ,\ f_y = \frac{dv_y}{dt}\ ,\ f_z = \frac{dv_z}{dt}\ .$$

Ora al variare del tempo t, come variano le coordinate x, y, z del punto M, così variano pure le componenti p, q, r della velocità angolare; per conseguenza le derivate delle velocità componenti v_x, v_y, v_z rispetto al tempo, attese le espressioni delle medesime velocità che sono state già trovate nel numero precedente, hanno evidentemente per valori

$$\frac{dv_x}{dt}=q\frac{dz}{dt}+z\frac{dq}{dt}-r\frac{dy}{dt}-y\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{dv_y}{dt}=r\frac{dx}{dt}+x\frac{dr}{dt}-p\frac{dz}{dt}-z\frac{dp}{dt},$$

$$\frac{dv_z}{dt}=p\frac{dy}{dt}+y\frac{dp}{dt}-q\frac{dx}{dt}-x\frac{dq}{dt}.$$

Tali saranno ancora i valori delle forze acceleratrici componenti f_x, f_y, f_z: e poichè in questi valori abbiamo (261. 427)

$$\frac{dx}{dt}=v_x=qz-ry\,,\quad \frac{dy}{dt}=v_y=rx-pz\,,$$

$$\frac{dz}{dt}=v_z=py-qx\,;$$

perciò le espressioni richieste delle componenti della forza acceleratrice parallele agli assi coordinati, per un punto qualunque (x, y, z) del solido o del sistema rigido, saranno le seguenti:

$$f_x=z\frac{dq}{dt}-y\frac{dr}{dt}+q(py-qx)-r(rx-pz)\,,$$

$$f_y=x\frac{dr}{dt}-z\frac{dp}{dt}+r(qz-ry)-p(py-qx)\,,$$

$$f_z=y\frac{dp}{dt}-x\frac{dq}{dt}+p(rx-pz)-q(qz-ry)\,.$$

429. **Equazioni del movimento.** Poniamo che gli assi rettangolari OX, OY, OZ (fig. 182ª) sieno invariabilmente legati al corpo solido, e mobili insieme con esso, e che di più i medesimi assi non sieno che gli assi principali d'inerzia del corpo relativamente al punto fisso O; cioè poniamo che la posizione arbitraria degli assi rettangolari, che noi abbiamo dovuto considerare come fissi ed invariabili nei due numeri precedenti, coincida colla posizione che occupano gli assi principali d'inerzia alla fine del tempo t. Secondo tre direzioni parallele agli assi mobili, sieno X, Y, Z le componenti della forza motrice che alla fine di un tempo t viene applicata ed agisce su di un punto del corpo solido, o di una molecola la quale ha m per massa ed x, y, z per coordinate; i tre prodotti della massa m per le componenti f_x, f_y, f_z trovate nel numero che precede, saranno secondo le direzioni parallele ai medesimi assi le componenti della forza che nel sistema produce il moto realmente concepito dal punto materiale (x, y, z): quindi in virtù del principio di d'Alembert nel sistema mobile intorno al punto fisso O, dovrà sussistere l'equilibrio tra le forze $X - mf_x$, $Y - mf_y$, $Z - mf_z$ perdute dal punto predetto, e le forze perdute da tutti gli altri punti; e dovendo a tale effetto (86. 1°) annullarsi la somma dei momenti di tutte quelle forze rispetto a ciascuno degli assi OX, OY, OZ, si avranno le tre equazioni

$$\Sigma m(yf_z - zf_y) = \Sigma(Zy - Yz),$$

$$\Sigma m(zf_x - xf_z) = \Sigma(Xz - Zx),$$

$$\Sigma m(xf_y - yf_x) = \Sigma(Yx - Xy),$$

somiglianti in tutto alle tre equazioni (v') del numero (394). Nei primi membri le somme indicate o gl'integrali si estendono alla massa intera del corpo, nei secondi membri poi si riferiscono alle forze esteriori che possono essere applicate a tutti o solo ad alcuni punti del corpo: se ora si chiamano L, M, N i secondi membri delle equazioni soprascritte, ossia le somme dei momenti del-

la forze applicate rispetto ai tre assi principali d'inerzia, e se di più si sostituiscono nei primi membri ad f_x, f_y, f_z i corrispondenti valori trovati già nel numero precedente, risulteranno

$$\frac{dp}{dt}\,\Sigma m(y^2+z^2)+qr\,\Sigma m(y^2-z^2)=\mathrm{L},$$

$$\frac{dq}{dt}\,\Sigma m(x^2+z^2)+pr\,\Sigma m(z^2-x^2)=\mathrm{M},$$

$$\frac{dr}{dt}\,\Sigma m(x^2+y^2)+pq\,\Sigma m(x^2-y^2)=\mathrm{N},$$

giacchè si riducono a zero tutti gli altri termini in cui si contengono come fattori le somme $\Sigma(m\,y\,z)$, $\Sigma(m\,x\,z)$, $\Sigma(m\,x\,y)$, essendo nulle (410) queste stesse somme per la ragione che sono stati presi per assi coordinati gli assi principali d'inerzia.

Ora designando con A, B, C i momenti principali d'inerzia del corpo o del sistema relativamente agli assi OX, OY, OZ, abbiamo (408)

$$\Sigma\,m(y^2+z^2)=\mathrm{A},\ \ \Sigma\,m(x^2+z^2)=\mathrm{B},\ \ \Sigma\,m(x^2+y^2)+\mathrm{C},$$

e per conseguenza abbiamo ancora

$$\Sigma m\,(y^2-z^2)=\mathrm{C}-\mathrm{B},\ \Sigma m(z^2-x^2)=\mathrm{A}-\mathrm{C},\ \Sigma m\,(x^2-y^2)=\mathrm{B}-\mathrm{A};$$

avremo dunque per le prime equazioni del moto di un solido intorno a un punto fisso le tre formole differenziali

$$(w^{\mathrm{VIII}})\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{A}\frac{dp}{dt}+(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,qr=\mathrm{L},\\&\mathrm{B}\frac{dq}{dt}+(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,pr=\mathrm{M},\\&\mathrm{C}\frac{dr}{dt}+(\mathrm{B}-\mathrm{A})\,pq=\mathrm{N}.\end{aligned}\right.$$

Per determinare il moto rotatorio del sistema, e risolvere compiutamente il problema, bisogna stabilire altre tre formole; ciò che noi faremo nel numero seguente.

430. Oltre gli assi mobili e principali d'inerzia OX, OY, OZ (fig. 183a), sia un altro sistema di assi rettangolari e fissi OX′, OY′, OZ′: essendo ON l'intersezione del piano XOY col piano X′OY′, s'indichi con θ l'inclinazione scambievole di questi due piani, ossia l'angolo ZOZ′ formato dagli assi OZ ed OZ′ da Z′ verso Z; si dicano pure φ, ψ gli angoli NOX ed X′ON, fatti dalla intersezione ON cogli assi OX, OX′, e contati l'uno dalla medesima intersezione, l'altro dall'asse OX′. Supponendo che gli assi mobili coincidano cogli assi fissi OX′, OY′, OZ′ al principio di un tempo t, ecco come possiamo concepire che i medesimi assi mobili insieme col solido prendano alla fine di questo tempo la posizione OX, OY, OZ: lasciando fisso l'asse OZ′, si faccia girare intorno ad esso il piano X′OY′ di un angolo ψ da X′ verso Y′; l'asse OX′ prenderà la posizione ON, e l'asse OY′ la posizione per es. OY_1: quindi senza che si sposti dal suo luogo l'asse ON, si rivolga intorno a questo il piano Y_1OZ' di un angolo θ da Y_1 verso Z′; essendo le tre rette OY_1, OZ′, OZ perpendicolari alla retta ON, e perciò situate in uno stesso piano Y_1OZ', nel rivolgimento di questo piano l'asse OZ′ prenderà la posizione OZ, e la retta OY_1 andrà a collocarsi nel piano XOY per es. in OY_2: in fine stando fermo l'asse OZ, si faccia girare intorno ad esso il piano NOY_2 di un angolo φ da N verso Y_2; la retta ON piglierà la posizione OX, e la retta OY_2 la posizione OY. Di tal modo colle tre rotazioni successive, fatte ciascuna nel tempo t, intorno agli assi OZ′, ON, OZ, gli assi mobili insieme col solido intorno alla origine O, dalla posizione OX′ OY′, OZ′ che hanno al principio del tempo t, passeranno alla posizione OX, OY, OZ, che occupano realmente alla fine del detto tempo; per conseguenza in ogni istante la rotazione del corpo intorno al corrispondente asse istantaneo equivale a tre rotazioni simultanee intorno agli assi OZ′, ON, OZ, dei quali il primo è sempre fisso, e gli altri due cangiano di posizione da un istante all'altro. Vede poi o-

gnuno essere l'angolo $Y'OY_1 = X'ON = \psi$, l'angolo $Y_1OY_1 = Z'OZ = \theta$, e l'angolo $Y_1OY = NOX = \varphi$.

Presa sopra l'asse OZ' una porzione qualunque OD, e fatta la stessa $OD = 1$, si abbassi dal punto D sopra OY_1 la perpendicolare DE; condotti quindi dal punto E i perpendicoli EF, EG sopra i rispettivi assi OX ed OY, si congiungano i punti F, G con D per mezzo delle rette FD, GD; essendo DE ed OZ parallele tra loro, come perpendicolari a una stessa retta OY_1, sarà DE perpendicolare anche al piano XOY; e poichè quando da un punto preso in un piano si conduce una perpendicolare a una retta situata nel piano stesso e s'innalza un'altra perpendicolare al piano, la retta che unisce i punti estremi delle due perpendicolari, giusta un teorema di geometria riesce perpendicolare alla retta situata nel piano, perciò le due rette DF, DG saranno rispettivamente perpendicolari agli assi OX, OY. Onde si avrà

$$OF = \cos Z'OX,\quad OG = \cos Z'OY;$$

ma si ha parimenti $OE = \cos Z'OY_1 = \operatorname{sen}\theta$, e quindi

$$OF = OE\cos XOY_1 = OE\operatorname{sen} NOX = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,$$

$$OG = OE\cos YOY_1 = OE\cos NOX = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi;$$

sussisteranno dunque i valori

$$\cos Z'OX = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi,\quad \cos Z'OY = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi.$$

Ciò posto noi già sappiamo (386) che le rotazioni rappresentate che sieno con rette prese sopra gli assi corrispondenti in proporzione alle rispettive loro grandezze, si compongono e si risolvono alla maniera di semplici forze; conseguentemente come per le forze, così per le rotazioni varrà il teorema delle proiezioni ortogonali, vale a dire che la proiezione della risultante di più rotazioni

sopra un asse qualunque è sempre uguale alla somma algebrica delle proiezioni di tutte le rotazioni componenti. Ora alla fine del tempo t, la rotazione del corpo solido intorno all'asse istantaneo, equivalendo alle tre rotazioni p, q, r intorno agli assi rettangolari OX, OY, OZ, è chiaro che avrà rispettivamente per proiezioni sopra questi assi le stesse rotazioni componenti p, q, r; di più equivalendo la medesima rotazione ω eziandio alle tre rotazioni che si concepiscono effettuate intorno agli assi obliqui OZ', ON, OZ, e che vengono espresse (364) dai rispettivi quozienti $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, giusta il teorema ora citato e mediante le proiezioni fatte sopra ciascuno degli assi rettangolari OX, OY, OZ, avranno luogo le equazioni

$$p = \frac{d\psi}{dt}\cos Z'OX + \frac{d\theta}{dt}\cos NOX + \frac{d\varphi}{dt}\cos ZOX,$$

$$q = \frac{d\psi}{dt}\cos Z'OY + \frac{d\theta}{dt}\cos NOY + \frac{d\varphi}{dt}\cos ZOY,$$

$$r = \frac{d\psi}{dt}\cos Z'OZ + \frac{d\theta}{dt}\cos NOZ + \frac{d\varphi}{dt}\cos ZOZ.$$

Sostituendo in queste formole i valori trovati poc'anzi dei fattori $\cos Z'OX$, $\cos Z'OY$, ed avvertendo che sono nulli i coseni degli angoli retti ZOX, ZOY, NOZ, e che inoltre si hanno $\cos NOX = \cos\varphi$, $\cos NOY = \cos(90° + \varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$, $\cos Z'OZ = \cos\theta$, $\cos ZOZ = \cos 0° = 1$; conseguiremo in fine le tre equazioni cercate, cioè

$$(w^{\text{VIII}})\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\theta}{dt} = p,\\ &\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\frac{d\psi}{dt} - \operatorname{sen}\varphi\frac{d\theta}{dt} = q,\\ &\cos\theta\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = r.\end{aligned}\right.$$

Queste tre equazioni insieme colle tre equazioni (w^{VII}), le quali sono dovute ad Eulero, risolvono compiutamente il problema del moto rotatorio di un solido intorno a un punto fisso, somministrandoci per un dato tempo la velocità angolare del mobile, o le sue componenti p, q, r, e la posizione (θ, φ, ψ) degli assi mobili: le somme dei momenti delle forze motrici, o le tre quantità L, M, N contenute nelle prime equazioni, si esprimono e vengono date in funzione degli angoli θ, φ, ψ. Peraltro le equazioni del moto rotatorio intorno a un punto non sappiamo integrarle, se non in un numero ben ristretto di casi particolari; e anche in questi casi l'integrazione ci conduce a tali quadrature, che generalmente non possono effettuarsi in quantità finite.

431. Determinate le tre componenti p, q, r, si conoscerà all'epoca t la velocità angolare del solido, o la velocità di rotazione $\omega=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ intorno all'asse istantaneo; la posizione poi di questo asse, sopra il quale la velocità d'ogni punto deve essere nulla, si determinerà per mezzo delle ultime equazioni del numero (427), facendo in esse uguali a zero i primi membri. Di tal guisa per la posizione dell'asse istantaneo alla epoca t, avremo le tre equazioni

$$qz-ry=0\,,\; rx-pz=0\,,\; py-qx=0\,;$$

le quali si riducono a due $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$, ossia

$$x=\frac{p}{r}z\,,\; y=\frac{q}{r}z\,,$$

e rappresentano le proiezioni del medesimo asse istantaneo sopra i piani coordinati XOZ, YOZ; e un tale asse, passando per l'origine o punto fisso O, forma cogli assi coordinati OX, OY, OZ tre angoli, i coseni dei quali in valore assoluto hanno rispettivamente per espressione (76)

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\ ,\quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\ ,\quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\ .$$

Quando i due rapporti $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ sono costanti, l'asse di rotazione resterà fisso nel corpo: ma è chiaro che la velocità angolare ω, ossia $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$, può andare soggetta a qualche variazione, sebbene rimanga invariabile l'asse di rotazione; come per contrario quella velocità può essere costante, quantunque l'asse di rotazione sia variabile.

432. **Soluzione del problema nel caso in cui le forze motrici sieno nulle.** Quando nel sistema non vi hanno forze motrici, oppure queste si fanno equilibrio intorno al punto fisso, sono nulle le tre somme L, M, N dei loro momenti rispetto agli assi principali d'inerzia; perciò le tre equazioni (w^{VII}) del numero (429) diverranno

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr=0\,,\\ &B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,pr=0,\\ &C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq=0\,. \end{aligned}\right.$$

Moltiplicate queste equazioni rispettivamente per p, q, r, e aggiuntele poi l'una alle altre, ci daranno

$$Ap\,\frac{dp}{dt}+Bq\,\frac{dq}{dt}+Cr\,\frac{dr}{dt}=0\,;$$

e quindi, mediante l'integrazione,

$$(2)\qquad Ap^2+Bq^2+Cr^2=h\,,$$

dove h rappresenta una quantità costante e positiva, essendo per sè positivi i momenti principali d'inerzia A, B, C. Si moltiplichino inoltre le medesime equazioni (1) per i rispettivi prodotti Ap, Bq, Cr, e di nuovo si sommino insieme; risulterà l'equazione differenziale

$$A^2p\frac{dp}{dt}+B^2q\frac{dq}{dt}+C^2r\frac{dr}{dt}=0,$$

e quindi un altro integrale

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=k^2, \tag{3}$$

dove con k^2 si designa la costante della nuova integrazione, la quale è pure essenzialmente positiva insieme col primo membro.

Le due equazioni (2), (3), risolute rispetto alle due quantità p, q, ci offrono i valori

$$\left\{\begin{aligned} p^2&=\frac{k^2-Bh+(B-C)Cr^2}{A(A-B)}, \\ q^2&=\frac{k^2-Ah+(A-C)Cr^2}{B(B-A)}; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

e sostituendo i valori di p, q nella terza delle equazioni (1), ne ricaveremo

$$dt=\frac{\pm C\sqrt{AB}\,dr}{\sqrt{k^2-Bh+(B-C)Cr^2}\,\sqrt{Ah-k^2+(C-A)Cr^2}}.$$

L'integrale di questa formola dipende da funzioni ellittiche; ma si può ottènere sotto forma finita, se due de' momenti d'inerzia A, B, C sono uguali tra loro, ovvero se la quantità k^2 risulta uguale a uno dei tre prodotti Ah, Bh, Ch. Il medesimo integrale ci darà il tempo t in funzione di r: onde per converso conosceremo

prima la componente r in funzione di t; quindi per mezzo delle due equazioni (4), verremo anche a conoscere in funzione del tempo t le altre componenti p, q della velocità angolare ω.

433. Determinate le tre quantità p, q, r, restano a determinare per mezzo di queste i tre angoli θ, φ, ψ. Alla fine di un tempo t le somme dei momenti delle quantità di moto relativamente agli assi principali d'inerzia OX, OY, OZ, ossia le somme delle coppie o dei loro momenti che si originano dalle quantità di moto e si riferiscono ai medesimi assi (*Vedi il num.* 396), hanno per espressioni

$$\Sigma m(yv_z - zv_y), \ \Sigma m(zv_x - xv_z), \ \Sigma m(xv_y - yv_x),$$

essendo m la massa di un punto (x, y, z), o di una molecola del solido. Sostituiti in queste espressioni i valori delle velocità componenti v_x, v_y, v_z, dati dalle ultime equazioni del numero (427), e attese le cose notate nel numero (429) intorno ai momenti principali d'inerzia e ai momenti complessi, si troverà per i valori delle sopraddette somme

$$\Sigma m(yv_z - zv_y) = p\,\Sigma m(y^2 + z^2) = Ap,$$

$$\Sigma m(zv_x - xv_z) = q\,\Sigma m(x^2 + z^2) = Bq,$$

$$\Sigma m(xv_y - yv_x) = r\,\Sigma m(x^2 + y^2) = Cr,$$

Queste somme o valori corrispondenti, essendo nulle le forze motrici nel sistema, resterebbero costantemente le stesse, se gli assi coordinati OX, OY, OZ fossero fissi: ma movendosi questi insieme col sistema, non saranno costanti quelle somme o valori, ma sarà costante (396) la somma dei loro quadrati, cioè sarà costante il trinomio $A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$, e rappresenterà il quadrato del momento invariabile della coppia risultante di tutte le quantità di moto ond'è animato il solido a un istante qualunque: chiaman-

do k il momento della coppia risultante che deve giacere in un piano invariabile, avremo

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=k^2;$$

ed è questa appunto l'equazione (3) trovata in altro modo nel numero precedente, della quale conosciamo adesso compiutamente il significato.

Per maggior semplicità prendiamo gli assi fissi OX′, OY′, OZ′ (fig. 183ª) in modo che OZ′ coincida coll'asse invariabile della coppia risultante o del suo momento k: poichè le tre coppie componenti o i loro momenti Ap, Bq, Cr possono rappresentarsi con rette proporzionali prese sopra i rispettivi assi mobili OX, OY, OZ, e poichè anche la coppia risultante o il suo momento si rappresenta con una retta $=k$, presa sopra l'asse corrispondente; perciò (29) sussisteranno le tre relazioni

$$\cos Z'OX=\frac{Ap}{k}\ ,\ \cos Z'OY=\frac{Bq}{k}\ ,\ \cos Z'OZ=\frac{Cr}{k}\ ,$$

le quali mediante i valori dei coseni già trovati nel numero (430) divengono

$$\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi=\frac{Ap}{k}\ ,\ \operatorname{sen}\theta\cos\varphi=\frac{Bq}{k}\ ,\ \cos\theta=\frac{Cr}{k}\ ,$$

Esse si riducono alle due formole

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{Ap}{Bq}\ ,\ \cos\theta=\frac{Cr}{k}\ ;$$

e queste formole ci fanno conoscere gli angoli φ, θ in funzione di p, q, r, e per conseguenza in funzione del tempo t.

Quanto all'angolo ψ si elimini la derivata $\frac{d\theta}{dt}$ dalle due prime equazioni (w^{VIII}) del numero (430): troveremo

$$p \operatorname{sen}\varphi + q \cos\varphi = \operatorname{sen}\theta \frac{d\psi}{dt} ;$$

ed avendosi $\operatorname{sen}\varphi = \frac{Ap}{k \operatorname{sen}\theta}$, $\cos\varphi = \frac{Bq}{k \operatorname{sen}\theta}$, si avrà per conseguenza

$$\frac{Ap^2 + Bq^2}{k \operatorname{sen}\theta} = \operatorname{sen}\theta \frac{d\psi}{dt} .$$

Onde, attesi (432) i valori $Ap^2 + Bq^2 = h - Cr^2$, $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{C^2r^2}{k^2} = \frac{k^2 - C^2r^2}{k^2}$, conseguiremo in fine l'equazione differenziale

$$d\psi = \frac{Ap^2 + Bq^2}{k \operatorname{sen}^2\theta} dt = \frac{k(h - Cr^2)}{k^2 - C^2r^2} dt ;$$

e se in questa equazione si ponga prima il valore dell'incremento dt trovato già nel numero precedente, e si faccia quindi l'integrazione che si riduce generalmente alle funzioni ellittiche, risulterà l'angolo ψ espresso in funzione di r, e perciò anche in funzione del tempo t. Le due quantità costanti k ed h si determinano colle due equazioni (3) e (2), conosciuto che sia lo stato iniziale del solido, cioè la sua posizione iniziale, e le velocità parimenti iniziali o le forze istantanee onde queste sono state prodotte.

434. Alcune proprietà del movimento nel medesimo caso. Prima di tutto notiamo che il principio delle forze vive, dimostrato nel numero (397), vale ancora per un sistema mobile intorno a un punto fisso, non entrando per nulla nel risultato la forza che proviene dal medesimo punto fisso: di più nel caso at-

tuale, in cui le forze motrici sono nulle o si equilibrano tra loro ad ogni istante attorno al punto fisso, la somma delle forze vive di tutti i punti del solido sarà costante (398), ed uguale appunto alla quantità h trovata nel numero (432). Infatti la somma delle forze vive di tutti i punti del corpo è $\Sigma(mv^2)$; ed attese le espressioni delle componenti rettangolari (427) della velocità v, si avrà

$$\Sigma(mv^2) = \Sigma m\left[(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2\right]$$

$$= p^2 \Sigma m(y^2 + z^2) + q^2 \Sigma m(x^2 + z^2) + r^2 \Sigma m(x^2 + y^2)$$

$$- 2qr\ \Sigma(myz) - 2rp\ \Sigma(mxz) - 2pq\ \Sigma(mxy).$$

Quindi siccome in questo ultimo membro le prime tre somme rappresentano (429) i momenti principali d'inerzia rispetto agli assi OX, OY, OZ, e le altre tre somme o momenti complessi sono nulli; perciò la somma delle forze vive si ridurrà alla espressione

$$\Sigma(mv^2) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Ora nel caso nostro questa espressione è costante ed è appunto quella quantità che abbiamo dinotata con h nel citato numero (432); sarà dunque $\Sigma(mv^2) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h$.

Ciò posto, abbiamo già veduto (433) che i coseni degli angoli fatti dall'asse della coppia risultante a un istante qualunque cogli assi principali d'inerzia OX, OY, OZ, si esprimono coi rispettivi rapporti $\frac{Ap}{k}$, $\frac{Bq}{k}$, $\frac{Cr}{k}$; sappiamo inoltre (431) che i coseni degli angoli formati rispettivamente coi medesimi assi principali dall'asse istantaneo di rotazione, sono $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, $\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$: sarà dunque (31. 3°.)

$$\frac{Ap^2+Bq^2+Cr^2}{k\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{h}{k\omega}$$

il coseno dell'angolo contenuto dall'asse della coppia risultante e dall'asse istantaneo: moltiplicando per questo coseno la velocità angolare ω del solido intorno all'asse istantaneo, avremo la componente $\frac{h}{k}$ di una tale velocità relativamente all'asse della coppia risultante; dunque *la componente della velocità angolare istantanea rispetto all'asse della coppia risultante, è una quantità costante; ed equivale alla somma delle forze vive di tutti i punti del solido, divisa per il momento della medesima coppia risultante.*

435. Oltre a ciò, l'ellissoide centrale, i cui assi coincidono con quelli delle coordinate, ha per equazione (410)

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1\,; \tag{5}$$

e l'asse istantaneo viene rappresentato (431) dalle due equazioni

$$x=\frac{p}{r}z\,,\quad y=\frac{q}{r}z:$$

considerando come identiche le variabili x, y, z di queste due equazioni e di quella prima, avremo (434)

$$r^2=(Ap^2+Bq^2+Cr^2)\,z^2=hz^2\,;$$

e quindi

$$z=\frac{r}{\sqrt{h}}\,,\; y=\frac{q}{\sqrt{h}}\,,\; x=\frac{p}{\sqrt{h}} \tag{6}$$

saranno le coordinate del punto, dove l'asse istantaneo incontra la superficie dell'ellissoide centrale.

Ciò premesso, immaginiamo condotto un piano tangente e una normale nel punto in cui l'asse istantaneo interseca la superficie della ellissoide centrale che è rappresentata dalla prima equazione: giusta le formole del numero (72), essendo

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}\ ,\quad \frac{By}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}\ ,$$

$$\frac{Az}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}$$

i coseni degli angoli che cogli assi coordinati fa la normale in un punto qualunque alla superficie della ellissoide, rispetto al punto d'incontro dell'asse istantaneo colla medesima superficie (attesi i valori precedenti delle rispettive coordinate ed avuto riguardo alla formola $A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=k^2$), saranno $\frac{Ap}{k}$, $\frac{Bq}{k}$, $\frac{Cr}{k}$, i valori dei coseni degli angoli che la normale forma pure cogli assi coordinati: ma tali sono anche (433) i valori dei coseni degli angoli che forma rispettivamente coi medesimi assi coordinati l'asse della coppia risultante; dunque si confondono insieme, o sono paralleli tra loro, l'asse della coppia risultante e la sopraddetta normale. Con ciò va congiunta l'una o l'altra delle due proposizioni seguenti: *il piano tangente la superficie dell'ellissoide centrale nel punto, dove la superficie viene intersecata dall'asse istantaneo di rotazione, è perpendicolare all'asse ovvero parallelo al piano della coppia risultante, e perciò ha come questo una direzione invariabile; ed anche se si conduce all'ellissoide centrale un piano tangente parallelo al piano della coppia risultante, il raggio condotto dal centro* O *al punto di contatto sarà l'asse istantaneo di rotazione.*

436. Prendiamo ora due formole dal Calcolo differenziale e dalla Geometria analitica: la prima è che rappresentando $f(x, y, z)$ $=$ Cost. una superficie curva, il piano tangente una tale superficie nel punto (x, y, z) ha per equazione

$$(X-x)\frac{df}{dx}+(Y-y)\frac{df}{dy}+(Z-z)\frac{df}{dz}=0\,,$$

dove con X, Y, Z vengono espresse le coordinate di un punto qualunque del piano; l'altra formola è che rappresentando $Z=mX+nY+l$ una superficie piana, la lunghezza della perpendicolare P, abbassata da un dato punto (x_1, x_1, z_1) sopra il piano, si ottiene quanto al valore numerico dal rapporto

$$P=\frac{l+mx_1+ny_1-z_1}{\sqrt{1+m^2+n^2}}\,.$$

A norma della prima di queste formole, il piano tangente la superficie dell'ellissoide centrale rappresentata dalla equazione (5) nel punto dove la superficie è incontrata dall'asse istantaneo e che noi chiameremo *polo istantaneo di rotazione*, avrà per equazione $Ax(X-x)+By(Y-y)+Cz(Z-z)=0$, ossia

$$AxX+ByY+CzZ=1\,;$$

la quale, attesi i valori (6) delle coordinate del punto di contatto si ridurrà poi alla forma $ApX+BqY+CrZ=\sqrt{h}$, ossia

$$Z=\frac{\sqrt{h}}{Cr}-\frac{Ap}{Cr}X-\frac{Bq}{Cr}Y:$$

quindi a norma della seconda formola, la lunghezza della perpendicolare P, abbassata dal centro o dalla origine O sopra il medesimo piano tangente, sarà una quantità costante ed avrà per valore (432)

$$P=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}}=\frac{\sqrt{h}}{k}\,.$$

Ne segue che il piano tangente all'ellissoide centrale nel polo istantaneo di rotazione, non solo è parallelo come abbiamo detto nel

numero precedente al piano fisso della coppia risultante ed ha perciò una direzione invariabile, ma di più è anche esso fisso ed immobile nello spazio: ciò vuol dire che rivolgendosi l'ellissoide centrale insieme col corpo solido intorno al punto fisso O, la sua superficie nei successivi istanti si applica al predetto piano fisso e lo tocca continuamente con un suo punto sempre diverso; i successivi punti di contatto non sono se non il polo istantaneo di rotazione, il quale per conseguenza si moverà senza punto strisciare sul piano fisso. Di che apparisce manifesta ad ognuno la verità della proposizione seguente, la quale è dovuta come le proposizioni precedenti al sig. Poinsot: *l'ellissoide centrale rimane sempre tangente al piano condotto ad una distanza* $=\frac{\sqrt{h}}{k}$ *dalla origine, parallelamente a quella della coppia risultante; il punto di contatto è il polo istantaneo di rotazione, e si muove senza strisciare sopra il piano fisso.*

La velocità angolare di rotazione è poi proporzionale al raggio R *della ellissoide intorno al quale si effettua istantaneamente la rotazione, cioè al raggio che dal centro va al polo istantaneo sulla superficie dell'ellissoide.* Infatti le formole (6) del numero precedente ci danno $h(x^2+y^2+z^2)=p^2+q^2+r^2=\omega^2$; onde si avrà $\omega=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{h}=\mathrm{R}\sqrt{h}$, essendo appunto $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ l'espressione del raggio della ellissoide centrale che va al punto di contatto col piano fisso.

437. **Doppio movimento di un solido libero.** Spesso avviene che i corpi, i quali si muovono da luogo a luogo nello spazio, oltre al moto di traslazione ne hanno anche uno di rotazione: se i corpi sono perfettamente liberi, questo doppio movimento si determina nei casi generali colle formole (v, v') stabilite al num. (394); qui vogliamo considerare un caso particolare, quando cioè il movimento di rotazione avviene come intorno a un asse fisso, ed ecco la proposizione che vogliamo dimostrare. *Il doppio moto iniziale di traslazione e di rotazione che prende nello spazio un corpo solido e libero, ha origine da ciò che l'impulso della forza*

istantanea non è diretto e non passa pel centro di gravità: di più i due movimenti si possono intendere in modo, che il traslatorio sia generato dalla forza istantanea trasferita parallelamente a sè stessa nel centro, e l'altro sia di rotazione intorno al centro di gravità come intorno a un punto fisso e generato dalla medesima forza.

Infatti, sia ABD (fig. 184ª) la sezione del corpo fatta con un piano che passa pel centro di gravità G, e lungo la direzione della forza impressa HH': sopra HH' conduciamo per G il perpendicolo AGH, prendiamo GK = GH, dividiamo in due parti uguali HH' in H'', e applichiamo in K due forze KK', KK'' contrarie di senso ma parallele e uguali ad HH''. Invece dell'unica forza HH' è evidente che possiamo sostituire le quattro H''H', KK', HH'', KK'': ora le due H''H', KK' hanno per risultante GG', che passa pel centro di gravità, ed è uguale e parallela alla forza impressa HH'; esse dunque generano il moto traslatorio del corpo. La ragione è manifesta: perchè come la forza HH' trasportata nel centro e rappresentata da GG', si potrebbe risolvere in più forze tutte uguali e parallele applicate a ciascun punto del corpo o ad altrettanti elementi uguali, e queste produrrebbero il moto traslatorio del corpo; così la stessa forza che è la risultante di queste, comunica una velocità uguale e parallela a tutti i punti del corpo, i quali prenderanno perciò un movimento comune di traslazione. Le altre due forze poi HH'', KK'' siccome sono uguali, contrarie e parallele, non valgono a spostare il centro di gravità, e non fanno altro che produrre una rotazione del corpo intorno al centro medesimo come intorno a un punto fisso, e nel senso della forza applicata: di più il momento con cui le dette forze generano il moto di rotazione, si esprime (54) colla somma $HH''.GH + KK''.GK = (HH'' + KK'')\,GH = HH'.\,GH$, che è il momento della forza impellente HH' riferito al centro di gravità. È dunque vera la proposizione enunciata; e lo è anche nel caso che le diverse parti del corpo ricevano a un tempo diversi impulsi, perchè allora il moto traslatorio e rotatorio del corpo risulta dalle traslazioni e ro-

tazioni parziali che sono dovute alle diverse forze e impulsi istantanei.

La medesima proposizione è ugualmente vera, trattandosi di forze continue. Infatti per ogni istante qualunque di tempo il corpo è allora sollecitato da forze istantanee corrispondenti al moto già concepito, e da forze continue che agiscono sopra di esso al principio di tempi elementari infinitesimi, e che perciò si possono in questi tempi considerare ancor esse come istantanee: è chiaro che i due sistemi di forze per ciascun elemento di tempo generano sul corpo i due movimenti, che abbiamo detto; conseguentemente un corpo sollecitato da forze continue si muove nello spazio, come se tutte le forze applicate alla sua massa raccolta nel centro di gravità producessero in lui il moto di traslazione per una curva, e le stesse forze applicate ai punti proprii di ciascuna producessero quello di rotazione intorno al centro di gravità riguardato come un punto fisso. E da notare peraltro che se le forze continue dipendono dalla posizione dei punti di applicazione, i due moti di traslazione e di rotazione non si potranno calcolare separatamente, per la ragione appunto che essi in tale ipotesi sono dipendenti l'uno dall'altro: lo si potrà però tutte le volte che le forze continue abbiano una direzione e una intensità costante, come avviene per es. nel caso della gravità.

Il moto di traslazione di un corpo si determina colle formole (v) del numero (394), e meglio con quelle (v'') del numero (395) le quali si riferiscono alla massa del corpo condensata tutta nel centro di gravità: il moto poi di rotazione intorno al medesimo centro, preso per origine delle coordinate e riguardato come un punto fisso, si determina colle formole (v') o meglio colle formole stabilite nel paragrafo presente. Peraltro quando la retta o l'asse, intorno al quale incomincia a farsi la rotazione, non muta di posizione, ma è trasportato insieme col corpo nello spazio sempre parallelo a sè stesso; allora la rotazione avviene come intorno a un asse fisso condotto pel centro di gravità, e un tal moto si può determinare mediante l'unica formola (w) stabilita al numero

(417). Soggiungiamo al solito alcuni problemi su quest' ultimo caso, e così chiudiamo la seconda parte della Meccanica.

438. **Problema** I. *Determinare il movimento di una ellissoide libera, pesante ed omogenea, la quale riceva istantaneamente un impulso diretto nel piano di una delle sue sezioni principali.*

Il moto di traslazione del solido si effettua, come se tutta la sua massa fosse condensata nel centro di gravità, e in questo punto fossero trasportate parallelamente a sè stesse sì la forza istantanea iniziale, e sì le forze continue di gravità che sollecitano le molecole del corpo: ora per l'applicazione di queste forze, il centro di gravità descrive nello spazio una parabola, tangente alla direzione della sua velocità iniziale, e che si potrà determinare come nel caso di un punto pesante libero, quando si conosca il valore di questa stessa velocità. Chiamando F la forza istantanea o la quantità di moto che la misura, M la massa dell'ellissoide, V la velocità iniziale del suo centro di gravità, avremo (13) l'equazione $VM = F$; e quindi la velocità iniziale del centro, la quale deve avere una direzione parallela a quella della forza d'impulso o di percossa, sarà in valore $V = \frac{F}{M}$.

Il moto di rotazione del solido, per l'azione di tutte le forze applicate nei punti proprii di ciascuna, si effettua intorno al centro di gravità come se questo fosse un punto fisso: ma poichè nel caso nostro le forze di gravità o i pesi delle molecole del corpo si riducono a una sola forza applicata al centro stesso di gravità, e non hanno alcuna influenza sul movimento di rotazione intorno a questo punto; perciò tutto il movimento rotatorio dell'ellissoide intorno al suo centro considerato come un punto fisso, sarà dovuto unicamente alla forza istantanea o all'impulso iniziale, che nel problema si suppone diretto nel piano di una sezione principale, per es. nel piano dei diametri principali o degli assi $2a$, $2b$. Essendo così diretta la forza istantanea, unica cagione del moto rotatorio, la rotazione della ellissoide intorno al suo centro si farà sempre ugualmente secondo il piano della forza medesima, cioè si farà con moto uniforme intorno al terzo asse $2c$, il quale è perpendicolare al piano del-

la forza e si deve considerare come fisso. Onde se si designa con l la distanza della forza d'impulso dal centro della ellissoide, e con $\Sigma(mr^2)$ il momento d'inerzia di questo solido relativamente all'asse $2c$, la velocità angolare e la velocità di rotazione intorno al medesimo asse, ottenendosi (418. w') per il rapporto tra il momento della forza data e il momento d'inerzia della ellissolde rispetto all'asse fisso, si esprimerà colla formola $\omega = \frac{Fl}{\Sigma(mr^2)}$, ossia (416)

$$\omega = \frac{5Fl}{M(a^2+b^2)} \; .$$

Questa formola se alla forza F si sostituisca il suo valore MV, si può anche scrivere

$$\omega = \frac{5Vl}{a^2+b^2} \; ,$$

e per tal modo ci fa conoscere il rapporto tra la velocità angolare dell'ellissoide e la velocità iniziale del centro di gravità. Mentre il centro di gravità si trasporta successivamente da luogo a luogo nello spazio per una curva parabolica, l'asse di rotazione rimane sempre parallelo a sè stesso; e poichè si conosce il movimento del centro, si potrà a ogni istante determinare la posizione dell'asse di rotazione che è diviso per metà dal centro, come anche la posizione di tutti i punti dell'ellissoide.

439. **Problema** II. *Una sfera omogenea di massa* m *è posta sopra un piano orizzontale, che offre al moto di essa un certo grado di attrito. A un medesimo istante viene comunicata alla sfera una velocità* v_0 *lungo il piano, e nel senso opposto una velocità angolare* ω_0 *intorno al diametro orizzontale e perpendicolare alla direzione di* v_0: *vogliamo determinare la velocità dei due movimenti di traslazione e di rotazione alla fine di un tempo qualunque* t.

Sia μ il coefficiente d'attrito che si sviluppa secondo il piano orizzontale (fig. 185.ª) nel corpo in moto, a il raggio della sfe-

ra, θ l'angolo che descrive questo raggio, ed x lo spazio percorso dal centro di gravità della sfera nel tempo t. La sfera si muove come se fosse affatto libera e fosse sollecitata (192) dalla forza costante di attrito μmg, che applicata al punto A di contatto tende a diminuire i due movimenti di traslazione e di rotazione; di più il diametro che è l'asse di rotazione, rimane sempre parallelo a sè stesso: potremo dunque determinarli separatamente, e il moto di rotazione si farà intorno al diametro come intorno a un asse fisso. Pertanto essendo μmga il momento della forza sollecitante rispetto al diametro o all'asse di rotazione, $\frac{2}{5} ma^2$ il momento d'inerzia relativamente allo stesso asse (414. 3.°); i due movimenti della sfera dipendono (395. 417) dalle due equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu g \,, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{5}{2}\frac{\mu g}{a} \,;$$

o dagli integrali loro

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 - \mu g t \,, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - \frac{5}{2}\frac{\mu g}{a} t.$$

Per mezzo di queste due formole si determina immediatamente la velocità $\frac{dx}{dt}$ del centro, e la velocità angolare $\frac{d\theta}{dt}$ della sfera intorno allo stesso centro. Ora di queste due velocità che vanno a mano a mano diminuendo, quella che è la prima a divenire nulla, si cangia poi in negativa e cresce in valore assoluto: in fatti al momento in che una velocità si annulla, la sfera prosegue ancora a muoversi strisciando sul piano orizzontale, ed ha luogo tuttavia l'attrito onde si generano i due moti di traslazione e di rotazione. Avverrà dunque necessariamente che dopo un certo tempo t, che noi dovremo determinare qui appresso, le due velocità $\frac{dx}{dt}$ ed $a\,\frac{d\theta}{dt}$, dalle quali è animato il punto A di contatto pel

doppio movimento del corpo, riescano uguali e contrarie, e sussista l'uguaglianza

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} + a\,\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Al punto in cui si avvera questa equazione, cesserà l'attrito di prima specie, e la sfera camminerà sul piano girando sopra sè stessa: il suo moto sarà poi uniforme, se non si abbia riguardo all'attrito che essendo di seconda specie si può trascurare (191) nel calcolo.

Adesso per determinare il tempo, trascorso il quale la sfera non ha che l'unico moto di rivolgimento intorno a sè stessa, basterà sostituire nell'equazione (2) i valori di $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ cavati dall'equazione (1) : avremo

$$(3) \qquad t = \frac{2}{7}\,\frac{v_0 - a\omega_0}{\mu g}.$$

Abbiamo detto innanzi che la condizione (2) generalmente parlando allora si verifica, quando una delle due velocità $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$ è divenuta negativa passando per lo zero, e l' altra restando positiva tende anch' essa a divenir zero: ne segue che il valore di t dato dalla formola (3), è compreso tra i due valori

$$t = \frac{v_0}{\mu g}, \quad t = \frac{2}{5}\,\frac{a\omega_0}{\mu g}$$

che si deducono dalle formole (1), e corrispondono alle rispettive condizioni $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Per la qual cosa se abbiasi $\frac{v_0}{\mu g} > \frac{2}{5}\,\frac{a\omega_0}{\mu g}$, la velocità angolare $\frac{d\theta}{dt}$ si annullerà prima di quella dal centro $\frac{dx}{dt}$; e in tal caso cessando l'attrito di prima

specie, il moto susseguente di rivolgimento si farà nel senso della velocità iniziale v_0: al contrario se è $\frac{v_0}{\mu g} < \frac{2}{5}\frac{a\omega_0}{\mu g}$, la velocità che si annulla per prima sarà $\frac{dx}{dt}$, e il moto di rivoluzione si farà dalla parte opposta nel senso della velocità angolare ω_0; finalmente se si ha $\frac{v_0}{\mu g} = \frac{2}{5}\frac{a\omega_0}{\mu g}$, si annullano contemporaneamente le due velocità $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, e la sfera rimarrà immobile sopra il piano senza nè pure rivolgersi e girare sopra sè stessa.

440. **Problema** III. *Supponiamo che una sfera omogenea m per la sola azione della gravità scorra giù per la lunghezza di un piano inclinato, in modo che o giri intorno a sè stessa, ovvero che mentre gira vada ancora radendo la superficie piana: nel primo caso vogliamo determinare la forza di attrito che impedisce alla sfera di strisciare sul piano, nel secondo cerchiamo quale è il suo movimento.*

1.° Per risolvere la prima questione, chiamiamo f la forza di attrito, α l'inclinazione del piano all'orizzonte, a il raggio della sfera, θ l' angolo descritto dal raggio nel tempo t, ed x lo spazio percorso dal centro di gravità. La forza f è direttamente contraria al moto del centro di gravità, e tende ad aumentare l'angolo θ; le due componenti della gravità sono mg sen α ed $mg \cos\alpha$, e di esse una è parallela, l'altra è perpendicolare alla lunghezza del piano inclinato: quindi la sfera si muove come se fosse libera e sollecitata dalle sole forze mg sen α, $-f$, applicate rispettivamente al centro di gravità e al punto di contatto col piano. Essendo dunque af, $\frac{2}{5}ma^2$ il momento delle forze e quello d' inerzia relativamente al diametro orizzontale di rotazione che rimane sempre parallelo a sè stesso, le due equazioni del moto saranno (437. 395. 417)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \operatorname{sen} \alpha - \frac{f}{m}, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{5f}{2ma}.$$

Ora se la sfera scende pel piano inclinato rivolgendosi soltanto intorno a sè stessa come abbiamo supposto, converrà che sieno uguali le opposte velocità $\frac{dx}{dt}$ ed $a\frac{d\theta}{dt}$, dallo quali per il doppio moto di traslazione e di rotazione è animato il punto di contatto: sussisterà dunque la condizione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad \text{ossia} \quad g \operatorname{sen} \alpha - \frac{f}{m} = \frac{5f}{2m};$$

e da questa si ottiene la forza cercata di attrito

$$f = \frac{2mg \operatorname{sen} \alpha}{7} = \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{7} mg \cos \alpha.$$

Se il coefficiente dell' attrito tra la superficie della sfera e il piano è più grande di $\frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{7}$, lo scendere della sfera si farà tuttavia rotando, ma non radendo e strisciando sul piano; se poi è più piccolo, scenderà la sfera rotando insieme e strisciando sul piano.

2.° Per determinare poi il movimento della sfera in questo secondo caso, rappresentiamo con μ il coefficiente dell'attrito, cosicchè $\mu mg \cos \alpha$ ne dinoti la forza: le due equazioni del moto saranno, allo stesso modo del caso precedente,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \operatorname{sen} \alpha - \mu g \cos \alpha, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\mu g \cos \alpha}{a}.$$

I primi integrali danno la velocità del centro e la velocità di rotazione, vale a dire

$$\frac{dx}{dt} = g(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)t, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\mu g \cos \alpha}{a} t;$$

i secondi poi somministrano lo spazio percorso del centro, e la posizione della sfera mobile ossia l'angolo descritto dal suo raggio,

$$x = \frac{1}{2} g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)t^2 , \quad \theta = \frac{5}{4} \cdot \frac{\mu g \cos\alpha}{a} t^2 .$$

Quindi si può anche calcolare la velocità acquistata $\frac{d\xi}{dt}$, e lo spazio ξ percorso dalla sfera, avuto riguardo al solo moto onde la medesima sfera striscia sulla superficie del piano inclinato: infatti attese le formole ora trovate, abbiamo

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - a\frac{d\theta}{dt} = g(\operatorname{sen}\alpha - \frac{7}{2}\mu\cos\alpha)t ,$$

e conseguentemente

$$\xi = \frac{1}{2} g(\operatorname{sen}\alpha - \frac{7}{2}\mu\cos\alpha)t^2 .$$

PARTE TERZA

IDROSTATICA

E

IDRODINAMICA

CAPO I.

EQUILIBRIO DEI FLUIDI IN GENERALE

441. **Corpi fluidi, liquidi o elastici.** Chiamiamo *fluidi* quei corpi le cui molecole benchè poste fra loro a sensibile contatto, sono indipendenti le une dalle altre e libere da ogni forza di coesione, sicchè a ogni minimo impulso possono muoversi senza alcuna resistenza e separarsi scambievolmente le une dalle altre. É vero che in natura non esistono corpi allo stato di perfetta fluidità, ossia non esistono fluidi senza una qualche coesione o anche senza un qualche attrito tra le loro molecole: siccome però questa forza generalmente è tanto poca cosa che, eccettuati alcuni fluidi, riesce in tutti gli altri appena sensibile, il supporla nulla che noi facciamo, ci gioverà a determinare più facilmente le leggi del loro equilibrio, e ad applicarle poi senza errore notabile ai medesimi fluidi quali sono in natura: l'errore che proviene dal trascurare ogni coesione ed attrito, potrebbe essere considerevole solo nel caso di un fluido in movimento.

I fluidi si distinguono in liquidi, e in elastici o gassosi: i *liquidi*, come l'acqua, il mercurio, ec. che furono anche detti incompressibili, sono quelli che di fatto non si contraggono sensibilmente, e che sottomessi alle forze ordinarie di compressione non

cangiano di volume e di densità: i *fluidi elastici*, come l'aria e i gas, sono anche detti *fluidi aeriformi*; si riguardano come dotati di una elasticità perfetta, si comprimono facilmente, e rimossa la forza di compressione tornano ad espandersi e dilatarsi.

442. Pressione idrostatica: uguaglianza di pressione, e di trasmissione nei fluidi. Dimostra l'esperienza che *una pressione esercitata perpendicolarmente sulla superficie libera di un fluido chiuso in un vaso e in equilibrio, si trasmette ugualmente attraverso il fluido per tutti i sensi*. Ciò vuol dire due cose; la prima è che una tal pressione è proporzionale all'ampiezza delle superficie piane che si considerano prese sulle pareti o sul fondo del vaso, oppure che s'immaginano condotte per un punto qualunque della massa fluida; l'altra è che non badando alle forze intrinseche della massa fluida (tali sarebbero il peso o l'elasticità delle molecole), un'area piana che passi per un dato punto del fluido in equilibrio, qualunque sia la sua posizione, è sottomessa sempre a una uguale pressione; avuto poi riguardo alle forze interne del fluido, quell'area soggiace da per tutto alla stessa pressione purchè essa sia infinitamente piccola. Questo è il *principio dell'uguaglianza di pressione in tutti i sensi intorno a un punto qualunque di una massa fluida in equilibrio*.

In una massa fluida sottomessa a qualsiasi forza e in equilibrio, la pressione totale ne' diversi suoi punti risulta dalla pressione esterna esercitata sopra la sua superficie, e dalle forze motrici interne che animano le sue molecole: la pressione dunque, la quale è sempre normale alla superficie su cui si esercita, generalmente parlando varia da un punto a un altro, e non può ritenersi come costante se non per una estensione infinitamente piccola. Ora quando si ha da determinare la pressione in un dato punto di una massa fluida in equilibrio, si suole considerare la pressione esercitata in quel punto contro una superficie piana infinitesima, e riferirla poi all'unità di superficie. Rappresentando dunque con ω la pressione contro l'area infinitesima α nel dato punto della massa fluida in equilibrio, e con p la pressione a cui soggiace l'unità di superficie presa sul piano dell'area infinitesi-

ma α, come se ciascun elemento di quella sostenesse la medesima pressione ω, avremo $\omega = p\alpha$: la quantità p è detta la *pressione idrostatica* nel dato punto della massa fluida, e riferita all'unità di superficie; il prodotto poi di questa pressione per l'area infinitesima α, è la pressione a cui soggiace quest'area stessa infinitesima.

443. **Equazioni generali dell'equilibrio dei fluidi.** Dentro una massa fluida m, sollecitata da forze di qualsiasi numero e specie, consideriamo un punto qualunque A (fig. 186ª) ; x, y, z sieno le sue coordinate ortogonali: sia μ la densità del fluido in tal punto; X, Y, Z sieno le componenti della forza acceleratrice φ, rispettivamente parallele agli assi coordinati; finalmente sia AB' un elemento infinitesimo della massa fluida, per es. un parallelepipedo rettangolo che abbia gli incrementi infinitesimi dx, dy, dz per lati intorno a un suo vertice. Ammettendo che la densità e la forza acceleratrice rimangano costanti per tutti i punti dell'elemento AB', potremo risguardare le forze motrici che internamente sollecitano il parallelepipedo elementare nelle direzioni parallele agli assi, come applicate al suo centro di gravità: esse dunque si esprimeranno (259) con

$$X\,dm, \qquad Y\,dm, \qquad Z\,dm,$$

ovvero (99) con

$$(1) \qquad \mu X\,dx\,dy\,dz, \qquad \mu Y\,dx\,dy\,dz, \qquad \mu Z\,dx\,dy\,dz.$$

Quanto alle pressioni esterne esercitate dagli strati circostanti della massa fluida sul parallelepipedo elementare, chiamiamo p la pressione idrostatica nel punto (x, y, z) riferita all'unità di superficie: in forza del principio d'uguaglianza di pressione, la quantità p rimane la stessa qualunque sia la posizione della piccola area condotta pel punto (x, y, z); dunque le pressioni normalmente dirette contro le facce del parallelepipedo AB' più vicine ai piani coordinati YOZ, XOZ, XOY, e rispettivamente parallele agli assi corrispondenti, sono (442)

$$(2) \qquad p\,dy\,dz\,, \quad p\,dx\,dz\,, \quad p\,dx\,dy\,.$$

Oltre a ciò, siccome la quantità p varia generalmente parlando da un punto a un altro della massa fluida, ed è funzione delle coordinate x, y, z; perciò (LXXVI) nel punto A′, ossia $(x+dx, y, z)$, essa diviene $p+d_xp$, e nei punti $(x, y+dy, z)$, $(x, y, z+dz)$ diviene rispettivamente $p+d_yp$, $p+d_zp$. Quindi è che le pressioni normali contro le facce del parallelepipedo opposte a quelle che abbiamo considerate poc'anzi, si espimeranno con

$$(3) \quad -(p+d_xp)\,dy\,dz\;, -(p+d_yp)\,dx\,dz, -(p+d_zp)\,dx\,dy.$$

Riflettendo adesso che ciascuna faccia dell'elemento AB′ può riguardarsi come premuta uniformemente; che le forze (2) e (3) si possono perciò immaginare applicate al centro di gravità della faccia corrispondente, e che esse sono direttamente opposte tra loro a due a due, ne conchiudiamo che le pressioni tutte, a cui è sottomesso il parallelepipedo AB′, si riducono alle tre forze

$$(4) \qquad -d_xp\,dy\,dz\,, \quad -d_yp\,dx\,dz\,, \quad -d_zp\,dx\,dy\,,$$

parallele ai rispettivi assi coordinati e dirette al centro del parallelepipedo medesimo.

Pertanto in una massa fluida m, un elemento dm, o un parallelepipedo elementare AB′, è internamente sollecitato delle tre forze (1), e esternamente dalle tre (4), che sono sì le une come le altre rispettivamente parallele ai tre assi rettangolari, e si possono riguardare come applicate al centro dello stesso parallelepipedo: ora noi sappiamo (65) che la condizione necessaria e sufficiente all'equilibrio di un sistema di forze applicate a un punto libero, è questa, che si annullino separatamente le somme delle proiezioni delle forze su tre assi ortogonali; dunque affinchè ciascun elemento di una massa fluida e la massa intera

sia in equilibrio, si dovranno verificare le tre equazioni seguenti

$$d_x p = \mu X\, dx\ ,\ d_y p = \mu Y\, dy\ ,\ d_z p = \mu Z\, dz$$

ovvero le tre

$$\text{(A)} \qquad \frac{dp}{dx} = \mu X\ ,\ \frac{dp}{dy} = \mu Y\ ,\ \frac{dp}{dz} = \mu Z\ ;$$

le quali poi si riducono (LXXVI) all'unica

$$\text{(A')} \qquad dp = \mu(X\, dx + Y\, dy + Z\, dz)\ .$$

Tale si è la formola che in un fluido qualunque in equilibrio ci dà il cangiamento di pressione, nel passare da un punto (x, y, z) a un altro punto infinitamente vicino $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Siccome poi la pressione p è necessariamente una funzione delle tre coordinate x, y, z; dalla medesima formola (A') s'inferisce che se il fluido sta in equilibrio, l'espressione $\mu(X\, dx + Y\, dy + Z\, dz)$ dovrà essere il differenziale esatto o totale di una certa funzione delle dette coordinate, la quale equivalga alla pressione p, ovvero differisca da questa di una quantità costante. Ancora è da avvertire che se il fluido è contenuto in un vaso chiuso da tutte le parti, abbastanza forte e riempiuto esattamente, il valore della pressione p dato dalla equazione (A') e relativo alla superficie del fluido, qualunque esso sia, equivarrà costantemente alla reazione delle pareti del vaso: se poi il fluido non si contiene in un vaso chiuso per ogni verso o non lo riempie esattamente, cioè se la superficie del fluido è libera e soggetta alle pressioni esterne, allora per l'equilibrio sarà necessario che il valore della pressione p, qual si ricava dalla formola (A'), in ciascun punto della superficie libera del fluido equivalga alla pressione esterna corrispondente, la quale di più dovrà essere diretta verso la parte interna del fluido medesimo.

444. Superficie di livello. In una massa fluida in equilibrio quella è detta *superficie di livello*, la quale in tutti i suoi punti

è sottomessa a una medesima pressione. Sieno x, y, z, le coordinate di un punto qualunque di una superficie di livello, e dx, dy, dz, rappresentino gli incrementi delle coordinate, quando su quella superficie si passa da un punto a un altro punto infinitamente vicino: la pressione p per definizione rimane costante per tutti i punti di quella superficie, e perciò sussiste la condizione $dp=0$; dunque in forza dell'equazione generale di equilibrio (A'), varrà anche l' equazione differenziale

$$(A'') \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0\,,$$

la quale rappresenta tutte le superficie di livello. Se questa equazione non si può integrare di per sè, lo si potrà dopo averla moltiplicata per la densità μ; per la ragione che nel caso di equilibrio l'espressione $\mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$, come abbiamo detto nel numero precedente, dee essere un differenziale totale o esatto che nasca dalla differenziazione di una funzione delle variabili indipendenti x, y, z. Se $F(x, y, z)$ rappresenti una tale funzione, sarà

$$F(x, y, z) = C$$

l'equazione finita di tutte le superficie di livello, le quali poi si determinano dando alla quantità costante e arbitraria C tutti i valori C_1, C_2 C_3, ... de' quali è capace. Ecco quindi due proprietà delle superficie di livello.

1.° *Ogni superficie di livello, cioè sottomessa in tutti i suoi punti a una medesima pressione, non può avere alcun punto comune colle altre superficie di livello.* Infatti rappresentando due differenti superficie di livello in una stessa massa fluida colle due equazioni

$$F(x, y, z) = C_1\,,\; F(x, y, z) = C_2\,,$$

a queste non si soddisfa cogli stessi valori finiti delle coordinate

x, y, z, mentre le quantità costanti C_1 e C_2 sono l'una diversa dall'altra: perciò le due superficie rappresentate da quelle equazioni non possono avere alcun punto (x, y, z) comune. Qui supponiamo che la funzione $F(x, y, z)$ rimanga costantemente finita e determinata per valori finiti delle coordinate x, y, z.

2.° Un'altra proprietà è che *le superficie di livello hanno ciascuna in tutti i loro punti una posizione normale alla direzione della rispettiva forza sollecitante.* Infatti immaginiamo tracciata una curva qualunque s in una data superficie di livello; e sieno ds, φ un elemento differenziale della curva, e la forza acceleratrice nel punto (x, y, z): l'equazione (A'') della superficie che si considera, divisa per $\varphi\, ds$, potrà scriversi nella forma seguente

$$\frac{X}{\varphi} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{Y}{\varphi} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{Z}{\varphi} \cdot \frac{dz}{ds} = 0 .$$

Ora $\frac{X}{\varphi}$, $\frac{Y}{\varphi}$, $\frac{Z}{\varphi}$ esprimono (29) i coseni degli angoli che la direzione della forza φ fa coi tre assi ortogonali, e $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ esprimono i coseni degli angoli che l'elemento ds, o la tangente dell'arco s nel punto (x, y, z), forma coi medesimi assi: essendo dunque nulla la somma dei prodotti tra que' coseni, la forza acceleratrice φ ha una direzione perpendicolare (31, 3.°) su tutte le rette tangenti la superficie di livello nel punto (x, y, z), e perciò è quivi stesso normale alla medesima superficie.

445. Posto che il trinomio $X dx + Y dy + Z dz$ sia il differenziale esatto di una funzione f delle variabili indipendenti x, y, z, cosicchè sussista la relazione

$$(A''') \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = df ,$$

l'equazione differenziale (A'. 443) che dee verificarsi nell'equilibrio di una massa fluida, diviene

$$dp = \mu df.$$

Ora in questa equazione il primo membro è il differenziale esatto di una funzione delle variabili x, y, z; perchè dunque i due membri della equazione sieno identici e sussista l'equilibrio, è necessario che sia anche un differenziale esatto il secondo membro μdf, e che però la densità μ della massa fluida o sia da per tutto la stessa, o almeno sia funzione della quantità f: di più, siccome la densità dipende anche dalla temperatura, lo stato d'equilibrio in una massa fluida richiede pure una tale temperatura la quale o sia costante in tutta la massa, ovvero sia funzione della detta quantità f. Ritornando adesso alle superficie di livello rappresentate dall'equazione (A''. 444), la condizione (A''') ci dà $df=0$, e quindi per la funzione f ci dà una quantità costante: dunque si conclude che *in ogni superficie di livello, oltre alla pressione idrostatica, sono pure quantità costanti la densità e la temperatura del fluido.*

L'ipotesi fatta al principio di questo numero ed espressa dall'equazione (A''') si verifica (230) nel caso di forze che operano in natura e che tendono a un centro fisso con una qualche legge relativa alle distanze. Per es. acciocchè la massa fluida dell'aria atmosferica, le cui molecole gravitano verso il centro della terra, stia in equilibrio, è necessario che la temperatura e la densità sieno costanti per ciascuna delle tante superficie di livello che sono tutte sferiche e concentriche colla superficie terrestre: ora questo è impossibile a ottenere per la ragione che il sole va a mano a mano riscaldando e dilatando inugualmente le diverse parti di uno stesso strato atmosferico; si conclude dunque che l'atmosfera terrestre non può mettersi mai in perfetto equilibrio in tutte le sue parti.

446. In questa stessa ipotesi in cui siamo, cerchiamo le formole per mezzo delle quali in un dato punto si determina la pressione e la densità dell'aria atmosferica, e generalmente dei fluidi elastici nello stato di equilibrio.

Secondo la legge di Mariotte dedotta dalle esperienze, le pressioni alle quali è sottomessa una massa fluida qualunque ed elastica, a temperatura uguale sono in ragione inversa dei volumi o anche in ragione diretta delle densità del fluido. Pertanto se si rappresenta con k una quantità costante per un dato grado di temperatura, e variabile colla diversa temperatura in un dato punto qualunque (x, y, z) di un fluido elastico che si considera, varrà l'equazione

$$p = k\mu .$$

Ora dividendo per questa l'altra formola $dp = \mu\, df$ del numero precedente, otterremo

$$\frac{dp}{p} = \frac{df}{k} ,$$

il cui integrale è

$$\log(p) = \int \frac{df}{k} + \log(C) = \log\left(e^{\int \frac{df}{k}}\right) + \log(C)$$

$$= \log\left(Ce^{\int \frac{df}{k}}\right) :$$

quindi è che se la temperatura e la quantità k che ne dipende, si conservano costanti per tutta la massa fluida, la pressione e la densità per un dato punto qualunque si determineranno colle formole

$$p = Ce^{\frac{f}{k}} , \mu = \frac{p}{k} = \frac{C}{k} e^{\frac{f}{k}} ;$$

se poi colla temperatura varia anche la quantità k che ne dipende, per determinare la medesima pressione e densità si adopreranno le formole

$$p = Ce^{\int \frac{df}{k}} \quad , \quad \mu = \frac{C}{k} e^{\int \frac{df}{k}} \quad .$$

447. **Condizione di equilibrio relativo nei fluidi in rotazione uniforme intorno a un asse fisso.** Una data massa fluida benchè abbia un qualche movimento locale di traslazione o di rotazione, con tutto ciò si dice essere in equilibrio quando conserva la forma che una volta ha preso, e la traslazione uniforme ovvero la rotazione che possiede, non altera punto la posizione relativa che antecedentemente avevano le molecole tra di loro. In questa ipotesi le forze che agiscono sempre sul fluido, debbono farsi scambievolmente equilibrio; poichè esse non valgono nè a turbare il moto preconcetto, nè la forma che ha preso la massa fluida: quindi è che le condizioni di equilibrio sono quelle medesime che si richieggono per lo stato di quiete assoluta, eccetto che alle forze continue converrà aggiungnere anche le centrifughe che per avventura si sviluppano nella massa pel moto uniforme di rotazione.

Consideriamo una massa fluida che abbia un movimento uniforme di rotazione intorno a un asse fisso, e cerchiamo le condizioni di equilibrio relativo per una molecola qualunque dm nel punto (x, y, z) a una distanza r dall'asse di rotazione che prendiamo per asse coordinato OZ. Sia ω la velocità angolare della massa fluida; la velocità assoluta della molecola dm si esprime (364) con $r\omega$, e con $\frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$ la forza centrifuga (363) sviluppata sulla molecola in forza della rotazione del fluido e diretta lungo il raggio r: siccome poi $\frac{x}{r}$ ed $\frac{y}{r}$ sono i coseni degli angoli formati rispettivamente dalla direzione di r cogli assi coordinati OX ed OY, perciò (26. 2°.) le componenti della forza centrifuga parallo-

le a questi assi sarannno $\omega^2 x$ ed $\omega^2 y$. Pertanto una molecola qualunque dm è sollecitata a un tempo dalla forza acceleratrice φ, ossia dalle sue componenti X, Y, Z, e dalla forza centrifuga $\omega^2 r$, ossia dalle sue componenti $\omega^2 x$ ed $\omega^2 y$; perciò la condizione di equilibrio (A'. 443) in questo caso è contenuta nell'equazione

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{IV}}) \left\{ \begin{array}{l} dp = \mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy)\,, \\ \text{ovvero} \\ dp = \mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \omega^2 r\,dr)\,, \end{array} \right.$$

essendochè la relazione $x^2 + y^2 = r^2$ tra le variabili x, y, r somministra $x\,dx + y\,dy = r\,dr$.

È poi manifesto che l'equazione differenziale delle superficie sottomesse a una pressione da per tutto uguale, ossia delle superficie di livello, sarà nel caso presente

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{V}}) \left\{ \begin{array}{l} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \omega^2(x\,dx + y\,dx) = 0\,, \\ \text{ovvero} \\ X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \omega^2 r\,dr = 0\,. \end{array} \right.$$

Terminiamo con alcuni problemi relativi alle cose discorse in questo primo capo.

448. **Problema** I. *Supponendo tutte le molecole di una massa fluida sollecitate da forze che tendono a un punto fisso, vogliamo determinare la forma che prenderà la massa fluida nello stato di equilibrio.*

Fissata l'origine delle coordinate rettangolari nel punto a cui tendono le forze, rappresentiamo con φ la forza acceleratrice nel punto (x, y, z), e con ρ la distanza di questo punto dal centro di attrazione: le componenti delle forze parallele agli assi, sono (310)

$$X = -\varphi \frac{x}{\rho} \ , \ Y = -\varphi \frac{y}{\rho} \ , \ Z = -\varphi \frac{z}{\rho} \ ,$$

e da queste si ha l'equazione

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\frac{\varphi}{\rho}\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

Ora nello stato di equilibrio di una massa fluida, in generale (443) ha luogo l'equazione

$$dp = \mu(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

per una molecola qualunque della massa; per le superficie poi di livello, o per le superficie che sono ugualmente premute in tutti i loro punti, vale l'altra equazione

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0\ :$$

dunque nell'ipotesi che le forze tendano a un centro fisso, l'equazione differenziale di tutte queste superficie di livello sarà

$$xdx + ydy + zdz = 0\,,$$

ed

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2$$

sarà l'equazione finita, la quale rappresenta (XXXIX) tante superficie sferiche quanti sono i valori che si possono attribuire alla costante C, ossia alla distanza tra il centro di attrazione e le molecole della massa fluida in equilibrio. Segue da ciò che se l'ultima e più lontana superficie della massa fluida non sia soggetta a pressione alcuna, ovvero sia premuta anch'essa da per tutto uniformemente, la intera massa fluida libera e in equilibrio prenderà la figura di una sfera, e lo abbiamo accennato al numero

(445) parlando della forma che ha la massa dell'aria atmosferica.

È opinione molto accreditata presso i fisici e nulla affatto ripugnante con ciò che ci dice la rivelazione intorno a questo universo creato, che la materia costitutiva dei pianeti sia stata da principio per elevata temperatura in istato fluido; e poi pel successivo raffreddamento sia divenuta solida: questa ipotesi come spiega bene la forma rotonda e sferica, nella quale si sono riunite le molecole dei pianeti attratte con forza prevalente verso il nucleo rispettivo, così anche rende ragione dello schiacciamento dei medesimi pianeti ai poli e del rigonfiamento all'equatore in forza della rotazione che hanno, e della forza centrifuga che ne nasce. Se poi la distanza C tra il centro di attrazione e la esterna ultima superficie di una massa fluida sia grande assai, è facile ad intendersi che la sua curvatura di sfera sarà piccola cosa, e che una piccola estensione di superficie si potrà riguardare come piana. Questo accade anche alle masse d'acqua sulla superficie della terra, e noi lo dimostreremo nel capo seguente.

449. **Problema** II. *Determinare la forma che prende, e la pressione a cui è sottomesso in un dato punto qualunque un liquido pesante ed omogeneo, contenuto in un vaso aperto alla bocca, mentre gira con moto uniforme di rotazione intorno a un asse verticale.*

Poniamo che l'asse di rotazione sia quello delle coordinate z, e che sia volto in su contro la direzione della gravità: avremo $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$; così le equazioni di equilibrio (A^{IV}), e delle superficie di livello (A^{V}) diverranno

$$(1) \qquad dp=\mu(\omega^2 r\,dr-g\,dz)\,,\quad \omega^2 r\,dr-g\,dz=0\,.$$

Presi gl'integrali, e rappresentata con c una quantità costante ed arbitraria, la seconda equazione ci porge

$$(2) \qquad r^2=\frac{2g}{\omega^2}(z-c)\,,$$

ovvero

$$x^2+y^2=\frac{2g}{\omega^2}(z-c),$$

attesa la relazione $r^2=x^2+y^2$ che passa tra la distanza r di una molecola qualunque dall'asse di rotazione e le sue coordinate x ed y.

Ora cotesta seconda equazione ci rappresenta (XXXIX) una superficie parabolica, quella cioè che è generata dalla parabola $r^2=\frac{2g}{\omega^2}(z-c)$ che gira intorno all'asse delle coordinate z: dunque un liquido pesante e sottomesso a un movimento uniforme di rotazione intorno a un asse verticale prende tal forma, che e la superficie libera premuta da per tutto ugualmente e le altre superficie di livello, fanno parte di altrettante paraboloidi di rotazione intorno a un medesimo asse. La quantità c è la distanza tra il vertice di ciascuna superficie e l'origine delle coordinate; perciò si avranno tante equazioni e superficie corrispondenti di livello, quanti sono i valori che si possono dare alla quantità c arbitraria e costante.

Passando adesso a determinare la pressione p in un punto qualunque del liquido o meglio in qualunque superficie di livello, rappresentiamo con c' una nuova quantità costante e arbitraria· la prima delle equazioni (1) integrata che sia ci somministra

$$p=\mu\left(\frac{\omega^2r^2}{2}-gz\right)+c',$$

che pel valore $\frac{\omega^2r^2}{2}-gz=-gc$ cavato dalla formola (2) e sostituito diviene

$$p=c'-\mu gc.$$

Per determinare la costante c', sia P la pressione a cui soggiace da per tutto la superficie libera del liquido, e C il valore del-

la quantità c corrispondente alla medesima superficie; sarà $c' = P + \mu g C$, e per conseguenza la pressione cercata è data dalla formola

$$p = P + \mu g (C - c) .$$

Il valore P della pressione esterna deve essere dato; la quantità C, ossia l'altezza del vertice della superficie libera sopra il fondo del vaso dove è posta l'origine delle coordinate, si può determinare agevolmente, quando si conosce il volume del liquido e la forma del vaso che lo contiene.

450. **Problema** III. *Quando si conoscano le dimensioni di un vaso conico e aperto alla bocca, e che ha una velocità angolare uniforme* ω *di rotazione intorno al proprio asse verticale, si domanda* 1°. *il volume di liquido che può essere contenuto nel vaso sotto la detta velocità,* 2°. *la minima velocità di rotazione in forza della quale non rimanga nel vaso nè pure una molecola del liquido contenuto* (fig. 187ª).

Abbiamo veduto nel problema precedente che mentre il vaso conico si rivolge intorno al suo asse verticale con una velocità ω di rotazione uniforme, la superficie libera del liquido prende una forma parabolica intorno allo stesso asse : ne segue che tanto sarà il volume del liquido contenuto nel vaso, quanto se ne richiede acciò la detta superficie giunga a toccare col suo lembo l'orlo del vaso; determineremo dunque il volume cercato di liquido, sottraendo il volume della paraboloide terminata alla superficie libera del liquido dal volume del dato cono retto. Rappresentando con a ed h il raggio alla base e l'altezza del vaso conico, le quantità $\frac{1}{3}\pi a^2 h$, $\pi \int_0^a r^2 dz$ esprimono rispettivamente il volume del cono e quello dalla paraboloide predetta (XCVI) ; perciò il volume cercato di liquido sarà espresso dalla formola

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 h - \pi \int_0^a r^2 dz ,$$

ovvero, atteso il valore $dz = \frac{\omega^2}{g} r\,dr$ cavato dalla seconda delle formole (1) del numero precedente e sostituito in questo luogo, dalla formola

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 h - \frac{\pi\omega^2}{g}\int_o^a r^3 dr = \pi a^2\left(\frac{h}{3} - \frac{\omega^2 a^2}{4g}\right).$$

L'altra parte della questione proposta si risolve anche più facilmente. Infatti per determinare la minima velocità angolare ω, che sia sufficiente a cacciar via tutto il liquido dal vaso, basta supporre $V=0$ nella formola trovata qui innanzi: avremo dunque

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{gh}}{a} .$$

In questo primo capo trattando dell' equilibrio dei fluidi, li abbiamo considerati in generale sotto l'azione di qualunque forza: nel capo che segue passiamo a dire più di proposito dell' equilbrio dei fluidi pesanti.

CAPO II.

EQUILIBRIO DEI FLUIDI PESANTI

451. **Equazione di equilibrio nei fluidi pesanti: superficie libera dei medesimi, quando sono contenuti ed equilibrati in un vaso.** Supponiamo che il piano coordinato XOY sia orizzontale, e che l'asse verticale OZ tenda all'ingiù nel senso della gravità: trattandosi di un fluido contenuto in un vaso e sottomesso alla sola azione della gravità, avremo $X=0$, $Y=0$, $Z=g$; perciò l'equazione (A'. 443) che dee verificarsi per l'equilibrio di tutte le molecole del fluido, diviene

(B) $$dp = \mu g\, dz .$$

Se la massa del fluido pesante non è sottomessa ad alcuna pressione esterna, ovvero se è ugualmente premuta sulla sua superficie libera, per ciascun punto di questa supeficie libera quando il fluido è in equilibrio sussiste

$$dp = 0 = \mu g\, dz \ ,$$

e si ha quindi $dz = 0$: ciò vuol dire che la distanza z di ogni punto della superficie libera dal piano orizzontale XOY, o è nulla ovvero è una quantità costante, e se ne conchiude che *la superficie libera di un fluido pesante e in equilibrio dentro un vaso è una superficie piana ed orizzontale.* — Le masse acquee in equilibrio sul globo terrestre hanno come questo la superficie piana e orizzontale per tratti poco estesi, curva e prossimamente sferica per tratti di estensione considerevole.

In generale nella equazione (B) essendo dp un differenziale esatto, dovrà essere pure esatto il differenziale $\mu g\, dz$: sarà dunque μ una funzione della variabile z; e però in ciascuna sezione orizzontale del fluido contenuto nel vaso in equilibrio, la densità risulterà costante al pari della z.

452. **Pressione idrostattica in un punto qualunque di un liquido pesante e omogeneo.** Fissiamo per piano coordinato e orizzontale XOY la stessa superficie libera del liquido pesante in equilibrio: la pressione in un punto situato a una distanza z dalla superficie esterna si ricava immediatamente dall'equazione (B) del numero precedente, la quale integrata che sia nell'ipotesi della densità μ costante, e denotando con C una quantità costante, ci porge

$$(B') \qquad p = \mu g z + C.$$

Si scorge da questa formola che per uno stesso piano orizzontale considerato dentro la massa liquida, la pressione è sempre la stessa su tutti i punti del piano: questi piani o sezioni orizzontali sono tutte superficie di livello, e la pressione sopra ciascuna sezio-

ne non dipende che dalla sua profondità z sotto la superficie esterna di livello.

La costante C esprime la pressione esterna, riferita all'unità di superficie e trasmessa egualmente (412) dentro tutta la massa liquida: infatti per tutti i punti della superficie esterna essendo $z=0$, si ha $p=C$; ma la pressione su ciascun punto della superficie libera equivale appunto (443) alla corrispondente pressione esterna: dunque ecc.

Se non si abbia a tener conto della pressione esterna, avremo la formola più semplice

$$(B'') \qquad p = \mu g z.$$

E qui vogliamo notare che poichè la pressione esterna si trasmette egualmente dentro a tutta la massa, essa non fa che aumentare di una quantità costante le pressioni dovute al peso del liquido e esercitate su ciascuna unità di superficie: egli è perciò che nel calcolare la pressione idrostatica in un dato punto di una massa liquida pesante, possiamo adoperare la formola (B''), senza badare alla pressione esterna che si determina e si aggiunge dipoi.

453. **Pressione idrostatica contro una superficie piana, immersa comunque in un liquido pesante e omogeneo.** Consideriamo un'area piana A, immersa orizzontalmente ovvero obliquamente in un liquido, e immaginiamola divisa in una infinità di piccole aree a infinitesime nelle due dimensioni: rappresentiamo rispettivamente con z_1, z la distanza del centro di gravità dell' area A, e la distanza di un elemento qualunque a dalla superficie libera o dal piano esterno di livello del liquido: non badando alla pressione esterna come se questa non esistesse, $\mu g z$ è la pressione idrostatica (452. B'') alla estremità inferiore della distanza z, $\mu g a z$ è la pressione (442) sopra la piccola area infinitesima a, e $\mu g \Sigma(az)$ è la somma delle pressioni esercitate su tutti gli elementi dell'area che si considera.

Tutte coteste pressioni agiscono in direzione perpendicolare al-

l'area A, ed essendo tutte parallele hanno una risultante unica ed equivalente alla somma di tutte; dunque la pressione totale P contro l'area A, sarà

$$P = \mu g \Sigma (az)$$

La quantità $\Sigma(az)$ è la somma di tutti i prodotti degli elementi di A per le rispettive loro distanze dal piano esterno di livello, ossia è la somma dei momenti delle aree elementari rispetto al piano XOY; e cotesta somma è uguale (109) al momento omologo dell'area totale, ossia è uguale al prodotto dell'intera area A per la distanza z_1 del suo centro di gravità dal detto piano: avremo dunque la formola

$$(B''') \qquad P = \mu g A z_1 .$$

Riflettendo bene, s'intende facilmente che Az_1 è il volume di un prisma geometrico che ha per base A e per altezza z_1, che μAz_1 è la massa di questo medesimo prisma pieno di liquido, e che $\mu g Az_1$ ne è la forza motrice prodotta dalla gravità, ossia è il peso di quel prisma liquido. Si può dunque enunciare la seguente proposizione: *la pressione a cui è sottomessa un'area immersa comunque in un liquido pesante, omogeneo e in equilibrio, equivale al peso di un prisma liquido che abbia per base l'area stessa, e per altezza la distanza del suo centro di gravità dal piano superiore o dalla superficie esterna del liquido.*

Quando il liquido è costante, e l'area immersa è sempre la stessa, la pressione P che questa sostiene, dipende unicamente dalla profondità z_1, a cui è abbassato il suo centro di gravità sotto alla superficie libera di livello; di più l'area A può rappresentare una porzione piana, presa dovunque nell'interna parete del vaso e che abbia ugual superficie: Quindi 1°. comunque l'area immersa si rivolga intorno al suo centro di gravità, non varia l'intensità della pressione a cui è sottomessa, se il centro rimane sempre alla medesima profondità. 2°. Finchè in un vaso rimane costante

l'altezza del liquido, la pressione sul fondo orizzontale è sempre la stessa, qualunque sia l'inclinazione delle pareti laterali, o la forma e la capacità del vaso stesso. 3°. Questa pressione sul fondo orizzontale del vaso tal volta è uguale al peso totale del liquido che vi si contiene, tal' altra è maggiore o minore, secondo che la forma del vaso è quella di un prisma retto, ovvero ha una forma convergente alla bocca oppure divergente (Ved. la fig. 188a). Si comprende ancora da questo come una piccola quantità di liquido versato in un vaso di base abbastanza larga e molto assottigliato in altezza, possa produrre sul fondo un'enorme pressione.

454. Centro di pressione, e formole per determinarlo in una superficie piana. È detto *centro di pressione* quel punto dall'area piana A, pel quale passa la risultante unica P delle pressioni esercitate dal liquido pesante sull'area medesima che vi è immersa. Se l'area immersa è orizzontale, il centro di pressione coincide col suo centro di gravità: infatti in questo caso essendo parallele e tutte uguali tra loro le pressioni elementari, la loro risultante passerà (49) per quello stesso punto dell'area, al quale è applicato il peso di questa, cioè la risultante di tutte le forze di gravità che agiscono sopra gli elementi dell'area immersa, e che sono pure uguali tra loro e parallele: ora questo punto non è altro che il centro di gravità dell'area; dunque ecc.

Se poi l'area è immersa obliquamente nel liquido, il centro di pressione è più basso del centro di gravità. Immaginiamo di fatto nell'area piana una retta orizzontale, che passi per il suo centro di gravità; resterà l'area divisa in due parti tali che i loro pesi abbiano uguali momenti relativamente alla retta che le divide: se le pressioni elementari sopra le due parti fossero tutte uguali come lo sono le azioni della gravità, anche i momenti delle pressioni sopra le due parti sarebbero uguali, e il centro di pressione si troverebbe nella retta immaginata che passa pel centro di gravità. Ma il fatto è che le pressioni sopra la porzione dell'area che è più bassa, sono più intense di quelle che si esercitano sull'altra porzione più alta; quindi dee avvenire che il momento di quella

essendo più grande, il centro di tutta la pressione sull'area si troverà al disotto della retta orizzontale, che abbiamo condotta pel suo centro di gravità.

Ora per determinare questo centro di pressione, sieno Z, Y, X le sue coordinate rettangolari, e sieno inoltre z, y, x le distanze di un elemento a totalmente infinitesimo dai piani coordinati XOY, XOZ, YOZ, il primo dei quali coincida col piano esterno di livello. Il momento della pressione totale P in ordine al piano XOY si esprime con PZ, e i momenti delle componenti pressioni parallele μgaz in ordine al medesimo piano, sono μgaz^2; varrà dunque (58) l'uguaglianza

$$PZ = \mu g \Sigma(az^2):$$

allo stesso modo pei due piani XOZ ed YOZ otterremo

$$PY = \mu g \Sigma(ayz), \quad PX = \mu g \Sigma(axz).$$

Sostituendo adesso il valore della quantità P dalla formola (B''', 453), avremo le tre formole

$$X = \frac{\Sigma(axz)}{Az_1}, \quad Y = \frac{\Sigma(ayz)}{Az_1}, \quad Z = \frac{\Sigma(az^2)}{Az_1},$$

mediante le quali si determina il centro di pressione sull'area A immersa in un liquido.

455. Gli assi coordinati e rettangolari OX, OY si prendano sul piano della superficie immersa A; di più l'asse OY coincida colla traccia del medesimo piano sopra la superficie libera del liquido, e dall'asse OX venga terminata la stessa superficie immersa (fig. 189a). Per determinare in questa disposizione di assi il centro di pressione, basteranno le due prime formole del numero precedente, le quali le possiamo scrivere nel modo che segue:

$$X = \frac{\Sigma(axz)}{\Sigma(az)} \quad , \; Y = \frac{\Sigma(ayz)}{\Sigma(az)} \; .$$

Ora essendo x, y le coordinate di un punto qualunque della linea AEC che termina la superficie immersa, l'elemento a si esprime col prodotto $dx\,dy$; la sua distanza z dalla superficie libera del liquido è proporzionale all'ascissa x, e può da questa essere surrogata nelle due formole; in fine le somme Σ che si estendono a tutti gli elementi dell'area immersa, equivalgono a un integrale doppio, il quale deve essere preso tra zero ed y rispetto all'ordinata, e tra i limiti proprii della linea-termine AEC rispetto all'ascissa: dunque le due formole diverranno

$$X = \frac{\int\int x^2 dx\,dy}{\int\int x\,dx\,dy} = \frac{\int x^2 y\,dx}{\int xy\,dx} \; ,$$

$$Y = \frac{\int\int xy\,dx\,dy}{\int\int x\,dx\,dy} = \frac{\int xy^2 dx}{2\int xy\,dx} \; .$$

Varrebbero queste medesime formole, se gli assi OX ed OY fossero tra loro inclinati sotto un angolo θ; perchè in questo caso s'introduce nelle formole, come vedremo chiaramente nel numero seguente, un fattore costante in funzione di θ, il quale trovandosi nei due termini delle frazioni, si può togliere e non apparisce affatto nelle medesime formole.

456. Quando l'area è simmetrica relativamente a un asse che divide in parti uguali tutte le sue corde orizzontali, il centro di pressione si determina colla sola prima formola del numero precedente, che qui vogliamo trovare più direttamente. La superficie piana, chiusa dal perimetro CAC′ (fig. 189a), sia simmetrica relativamente all'asse AX, che divide in parti uguali tutte le corde orizzontali e parallele a CC′: fissando l'origine delle coordinate nel punto O dove l'asse AX incontra la superficie libera del liquido, prendiamo OX per l'asse delle ascisse e per quello delle ordinate la retta orizzontale YOY′, che è l'intersezione del piano del-

l'area immersa colla superficie libera del liquido. È manifesto che tutte le aree elementari infinitesime e orizzontali, una delle quali è EE′, hanno il centro di pressione sull'asse OX; conseguentemente la risultante totale delle pressioni sarà anch'essa applicata a un punto di questo asse, e basterà determinare la sola ascissa X = OP, per conoscere la posizione del centro P di pressione.

Sieno x ed y le coordinate di un punto qualunque E preso sul perimetro dell' area immersa, θ l'angolo che formano gli assi, ed ω l' angolo dell'asse OX con una retta verticale: l'area elementare EE′ si esprime (XCIV) con $2y \operatorname{sen}\theta\, dx$, e la distanza BB′ di questo elemento dalla superficie libera Y′OB′ del liquido con $x\cos\omega$. Quindi $2\mu gxy \operatorname{sen}\theta \cos\omega\, dx$ sarà (452. 442) la pressione elementare, e $2\mu g \operatorname{sen}\theta\cos\omega \int xy\, dx$ la pressione totale a cui è sottomessa l' area immersa; i momenti poi di queste pressioni rispetto alla superficie del liquido saranno $2\mu gy^2x \operatorname{sen}\theta\cos^2\omega\, dx$, e $2\mu g\mathrm{X}\operatorname{sen}\theta\cos^2\omega \int xy\, dx$; onde il momento della pressione totale essendo uguale alla somma di quei delle pressioni parziali componenti, si avrà la formola

$$(\mathrm{B}^{v}) \qquad \mathrm{X} = \frac{\int x^2 y\, dx}{\int xy\, dx} ,$$

nella quale gli integrali sono da estendere per tutta la metà dell' area sottomessa alla pressione.

457. **Esempi.** *Trovare il centro di pressione in un parallelogrammo, in un triangolo, e in un' area di circolo, quando le loro aree immerse in un liquido sfiorano la superficie libera del liquido.*

1°. Del parallelogrammo sia a la retta, o l' asse che congiunge i punti di mezzo delle basi $2b$; la ordinata y è costante, ed $= b$: poichè per ipotesi una delle basi coincide colla superficie libera del liquido, la formola (B^{v}) ci darà per l'ascissa del centro di pressione

$$\mathrm{X} = \frac{\int_0^a bx^2\, dx}{\int_0^a bx\, dx} = \frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}a^2} = \frac{2}{3}a .$$

Così il centro di pressione divide l' asse a in due parti, una delle quali è doppia dell'altra.

2°. Nel triangolo sia $2b$ la base orizzontale, a l' asse ossia la distanza dal vertice al punto di mezzo della base. Se il vertice sfiori la superficie libera di livello, sarà $y=\frac{b}{a}x$; perciò

$$X=\frac{\int_0^a x^3dx}{\int_0^a x^2dx}=\frac{3}{4}a;$$

se poi è la base che coincide colla superficie libera del liquido, sarà $y=\frac{b}{a}(a-x)$, e conseguentemente

$$X=\frac{\int_0^a x^2(a-x)dx}{\int_0^a x(a-x)dx}=\frac{\frac{1}{3}a^4-\frac{1}{4}a^4}{\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{3}a^3}=\frac{1}{2}a.$$

3°. Nel circolo, la cui periferia tocca la superficie del liquido OY (fig. 190.a), e il cui raggio è a, abbiamo (VI. XLVII) le equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} y=(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}, \\ x^2=2ax-y^2, \\ x\,dx=a\,dx-y\,dy. \end{cases}$$

Laonde se chiamiamo α il mezzo segmento OEB terminato dall'ordinata $y=$ EB, primieramente (XCIV) abbiamo $\int y\,dx=\alpha$; poi attesa la terza delle equazioni (1), abbiamo ancora

$$(2) \qquad \int xy\,dx = \int y(\,a\,dx - y\,dy) = a\alpha - \frac{y^3}{3}\ :$$

finalmente adoperando la seconda e la prima delle formole (1), e facendo l'integrazione per parti, avremo il valore

$$\int x^2y\,dx = \int (2ax - y^2)y\,dx = 2a\int xy\,dx - \int (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= 2a\int xy\,dx - \int x^{\frac{3}{2}}(2a - x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= 2a\int xy\,dx - \frac{2}{5}\,x^{\frac{5}{2}}(2a - x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\int x^{\frac{5}{2}}(2a - x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 2a\int xy\,dx - \frac{2}{5}xy^3 - \frac{3}{5}\int x^2y\,dx\ ,$$

e conseguentemente

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int x^2y\,dx = \frac{5}{4}\,a\int xy\,dx - \frac{1}{4}\,xy^3 \\ &= \frac{5}{4}\,a^2\alpha - \frac{5}{12}\,ay^3 - \frac{1}{4}\,xy^3\ . \end{aligned} \right.$$

Adesso non rimane a fare altro che sostituire nella formola (B^{IV}) i valori delle equazioni (2) e (3), e se ne dedurrà una nuova equazione che ci darà l'ascissa del centro di pressione sul segmento ODE terminato dalla doppia ordinata $2y$: facendo quindi $y = 0$, avremo rispetto all'intera area del circolo la formola

$$X = \frac{5}{4}\,a = a + \frac{1}{4}\,a\,,$$

la quale dimostra che il centro di pressione sull'area circolare immersa dista dal centro della figura d'un quarto del raggio.

458. **Pressione, e centro di pressione in una superficie curva.** Se la superficie S immersa in un liquido non è piana, ma curva, è manifesto che le pressioni elementari non sono parallele, e non sempre si potranno ridurre ad una sola risultante; di più anche nel caso che si riducano tutte a una forza equipollente, si sa che essa non si può esprimere colla somma di tutte le componenti. Con tutto ciò, siccome in ogni caso la somma di tutte le pressioni che sostengono le piccole aree piane, ossia gli elementi piani infinitesimi dS della superficie curva, situati a una profondità z dal piano superiore di livello, si esprime (452. B'', 109) con $\mu g\Sigma(z\,dS) = \mu g\, S z_1$; così chiamando questa somma la *pressione totale sopra la superficie curva*, potremo avere per dimostrata la proposizione seguente: *la pressione totale sopra una superficie curva immersa in un liquido omogeneo, è uguale alla pressione che si eserciterebbe sopra una area piana equivalente alla data superficie curva, e che passa pel centro di gravità della medesima superficie.* Se la superficie curva si rappresenti colla equazione $z=f(x, y)$, la formola per il calcolo della pressione esercitata contro la medesima superficie, sarà (125)

$$P=\mu g z_1 \int\int\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dx\,dy\,,$$

dove gli integrali si devono estendere a tutta la superficie premuta.

459. Quando le pressioni che si esercitano su di una superficie curva S, immersa in un liquido omogeneo, ammettono una risultante unica P, potremo riguardare come centro di pressione il punto, dove la direzione di quella risultante incontra la superficie premuta S: cerchiamo qui la condizione da verificarsi, affinchè le pressioni si riducano tutte ad una sola risultante o forza equivalente, e la superficie ammetta così un solo céntro di pressione; e nello stesso

tempo determiniamo l' intensità e la direzione della risultante unica, e la posizione del centro di pressione nella superficie S.

Si chiami p la pressione sull'elemento dS, riferita all' unità di superficie; sarà $p\,dS$ la pressione esercitata sopra lo stesso elemento, infinitesimo per ogni verso: sieno x, y, z le coordinate dell'elemento dS che si può considerare come un piccolo piano tangente, relativamente ai soliti assi rettangolari; ed (N, X), (N, Y), (N, Z) sieno gli angoli che fa coi rispettivi tre assi la direzione della pressione elementare $p\,dS$, e perciò della normale N alla superficie curva S nel punto (x, y, z). Le componenti della pressione elementare $p\,dS$, parallele agli assi coordinati, sono $p\cos(N, X)dS$, $p\cos(N, Y)dS$, $p\cos(N, Z)dS$; quindi le somme di tutte le componenti rispettivamente parallele ai tre assi, ovvero le somme delle proiezioni di tutte le pressioni elementari sopra i tre assi coordinati, e le somme dei momenti delle stesse pressioni rispetto ai medesimi assi, saranno (85)

$$(4)\qquad \begin{cases} P_x = \Sigma[p\cos(N, X)dS], \\ P_y = \Sigma[p\cos(N, Y)dS], \\ P_z = \Sigma[p\cos(N, Z)dS], \end{cases}$$

$$[5)\qquad \begin{cases} M_x = \Sigma[y\cos(N, Z) - z\cos(N, Y)]\,p\,dS, \\ M_y = \Sigma[z\cos(N, X) - x\cos(N, Z)]\,p\,dS, \\ M_z = \Sigma(x\cos(N, Y) - y\cos(N, X)]\,p\,dS. \end{cases}$$

Ora la condizione necessaria e sufficiente, perchè tutte le forze o le pressioni esercitate dal liquido in equilibrio contro la superficie S si riducano ad una sola pressione risultante P, consiste (87) nell' avveramento della equazione $P_x M_x + P_y M_y + P_z M_z = 0$; dunque adoperando i valori (4) e (5), otterremo

$$\left\{\begin{array}{l}\Sigma[p\cos(N,X)dS]\,\Sigma[y\cos(N,Z)-z\cos(N,Y)]p\,dS\\ +\Sigma[p\cos(N,Y)dS]\,\Sigma[z\cos(N,X)-x\cos(N,Z)]p\,dS\\ +\Sigma[p\cos(N,Z)dS]\,\Sigma[x\cos(N,Y)-y\cos(N,X)]p\,dS\end{array}\right\}=0$$

per la condizione da verificarsi, affinchè le pressioni su di una superficie curva S ammettano una risultante unica P.

Avverata questa condizione, le tre risultanti parziali P_x, P_y, P_z concorreranno in uno stesso punto, e l'intensità della risultante totale sarà data dalla formola $P=\sqrt{P_x^2+P_y^2+P_z^2}$. Quanto alla direzione di questa medesima risultante, prendiamo dal numero (87) due qualunque di quelle tre equazioni, dalle quali si deduce immediatamente la condizione (e^{IV}) applicata poc'anzi al caso nostro: avremo per es. le due equazioni

$$y_1 P_z - z_1 P_y = M_x\,,\quad z_1 P_x - x_1 P_z = M_y\,,$$

dove x_1, y_1, z_1 sono le coordinate del punto di applicazione, o meglio le coordinate di un punto qualunque della risultante P; e quindi, attesi i valori (4) e (5), avremo ancora

$$y_1\,\Sigma[p\cos(N,Z)\,dS]-z_1\,\Sigma[p\cos(N,Y)\,dS]$$

$$=\Sigma[y\cos(N,Z)-z\cos(N,Y)]\,p\,dS,$$

$$z_1\,\Sigma[p\cos(N,X)\,dS]-x_1\,\Sigma[p\cos(N,Z)\,dS]$$

$$=\Sigma[z\cos(N,X)-x\cos(N,Z)]\,p\,dS.$$

Queste due equazioni rappresentano le proiezioni della direzione di P sopra i due piani coordinati YOZ ed XOZ, e perciò ci fanno conoscere l'andamento della risultante di tutte le pressioni: congiunte poi colla equazione della superficie premuta $z=f(x, y)$,

quando in esse si ponga $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, ci faranno conoscere altresì le cooordinate, e quindi la posizione del punto dove la pressione risultante incontra la superficie, ossia la posizione del centro di pressione.

In tutte le formole precedenti le somme Σ equivalgono ciascuna a un integrale doppio: di più in esse sussistono (125) i valori

$$\cos(N, X)\, dS = dy\, dz, \cos(N, Y)\, dS = dx\, dz, \cos(N, Z)\, dS = dx\, dy;$$

e nella solita disposizione degli assi cordinati, si ha pure il valore $p = \mu g z$.

460. **Equilibrio dei liquidi pesanti nei vasi comunicanti**. Immaginiamo due vasi V,V′ (fig. 191.ª) di qualunque forma e inclinazione, comunicanti fra loro per mezzo del canale C, in modo che uu liquido abbia il passaggio libero dall'uno nell'altro vaso: nel primo si contenga un liquido omogeneo di densità μ, e riempia anche il canale e parte del secondo vaso; in questo poi sia contenuto un altro liquido pure omogeneo, la cui densità è μ'. Posto che i due liquidi in equilibrio rimangano separati senza mescolarsi insieme e confondersi, la superficie che li separa, dovrà essere piana e orizzontale; perchè altrimenti sopra qualche sezione orizzontale dei liquidi la densità non sarebbe la stessa in tutti i punti, e questo è contrario alla proprietà che si è dimostrata al numero (451) per un fluido qualunque pesante in equilibrio. Si rappresentino pertanto con z, $z+z'$ le rispettive distanze di un punto qualunque della sezione orizzontale di separazione dalle superficie esterne ed orizzontali dei due liquidi tra loro equilibrati: la pressione riferita all'unità di superficie, si esprime in quel punto (452. B′) coll'una o coll'altra delle due somme $\mu g z + C$, $\mu' g (z + z') + C'$; dunque rispetto a due liquidi in equilibrio dentro ai vasi comunicanti, dovrà sussistere l' uguaglianza

$$(B'') \qquad \mu g z + C = \mu' g\, (z + z') + C',$$

nella quale C e C' non sono altro che le pressioni esterne, a cui sono rispettivamente soggette le superficie dei liquidi medesimi.

Ora facciamo l'ipotesi 1°. che ne' due vasi si contenga lo stesso liquido; sarà $\mu gz = \mu' gz$, e l'equazione (B$^{\text{v}}$) diviene

$$z' = \frac{C - C'}{\mu' g}\ .$$

In questa se è $C = C'$, la distanza tra le due superficie libere del liquido (è detta la differenza di livello) nei vasi comunicanti sarà nulla; ciò vuol dire che *a pressioni esterne uguali il liquido è ugualmente alto nei due vasi*; se poi è $C' < C$, ovvero $C < C'$, riuscira $z' > 0$, ovvero < 0; e significa che *a pressioni esterne disuguali il liquido s' innalza più da quella parte, dove è minore la pressione esterna.*

Supponiamo 2°. che la densità dei liquidi sieno diverse, mentre sono uguali le pressioni esterne sulle superficie libere dei due liquidi; l'equazione (B$^{\text{v}}$) d'equilibrio diviene

$$\mu z = \mu'(z + z')\ ;$$

da questa poi si deduce la proporzione

$$z : z + z' = \mu' : \mu,$$

cioè *a parità di pressioni esterne le altezze di due liquidi diversi in equilibrio dentro a due vasi comunicanti, computate al di sopra del comun piano orizzontale che divide gli stessi liquidi l'uno dall'altro, sono in ragione inversa delle loro densità.*

461. Da questo che si è dimostrato, si rende facilmente ragione di molti fenomeni idraulici: tali sono l'innalzarsi delle acque nel sifone e nelle trombe, il sostenersi che fa la colonna di mercurio nel barometro, e simili. Colla medesima teoria si possono anche risolvere diversi problemi che spettano alla pratica: sapendosi per

es. che nel barometro l'altezza del mercurio che fa equilibrio alla pressione ordinaria o media dell'atmosfera, è di metri 0, 76; se si domanda l'altezza di una colonna d'acqua che si equilibri pure colla pressione atmosferica, basterà richiamare dalla fisica che presa per unità la densità dell'acqua stillata, quella del mercurio è $=13, 586$. Quindi poichè le altezze delle due colonne di mercurio e di acqua, che si equilibrano colla pressione atmosferica e tra loro, devono essere in ragione inversa delle loro densità, si avrà per l'altezza dell'acqua $a=13, 586 . 0^m, 76=10^m, 33$ in circa. Il peso di questa colonna d'acqua sarà la misura della pressione atmosferica sopra un'uguale base: e siccome il grammo è il peso di un centimetro cubo di acqua stillata presa alla massima sua densità, così la pressione dell'atmosfera su di un centimetro quadrato equivarrà al peso di 1033 grammi, ossia di $1^k, 033$.

462. Formole per l'equilibrio dei fluidi elastici e pesanti. Vogliamo dimostrare che nell'equilibrio dei fluidi pesanti ed elastici valgono le formole

$$(B^{VI}) \quad \begin{cases} dp=-\mu g dz, \\ p=k\mu, \\ k=k_0(1+\alpha\theta), \end{cases}$$

nelle quali z dinota la distanza di un punto qualunque del fluido da un dato piano orizzontale, μ la densità che corrisponde alla pressione p ed alla temperatura θ, α è il coefficiente di dilatazione per ciascun grado del termometro centigrado, k_0 e k sono quantità costanti che dipendono dalla natura dei fluidi e rispettivamente corrispondono alle temperature zero e θ.

La prima formola che riguarda un fluido pesante qualunque, già è stata da noi dimostrata (451) al principio di questo capo: essa è di segno negativo per la ragione che l'asse delle coordinate z lo prendiamo diretto all'insù contro la direzione della gravità.

La seconda è la traduzione della legge di Mariotte citata (446) nel capo precedente, cioè che la densità di una massa fluida ed elastica a temperatura costante è proporzionale alla pressione a cui è sottoposta, purchè questa pressione sia minore di quella che riduce i gas in liquidi.

Per ciò che riguarda la terza formola, conviene ricordare la legge di Gay-Lussac, cioè che il volume di un fluido elastico qualunque sotto a una pressione costante cresce o diminuisce egualmente per uguali aumenti o diminuzioni di temperatura: quindi chiamato α il coefficiente di dilatazione cubica per ciascun grado del termometro centigrado, V il volume di una data massa fluida ed elastica sotto una pressione $=p$, e a temperatura zero, lo stesso volume di fluido sotto la stessa pressione a una diversa temperatura θ viene espresso dal prodotto

$$V(1+\alpha\theta).$$

Siccome però a parità di massa le densità sono (99) in ragione inversa dei volumi, perciò dinotando con μ_0 e μ le densità del fluido sotto la stessa pressione p, ma a diverse temperature zero e θ, avremo

$$\mu : \mu_0 = V : V(1+\alpha\theta),$$

e conseguentemente

$$\mu_0 = \mu(1+\alpha\theta).$$

Quindi per la seconda delle formole (B^{VI}) essendo $k\mu = p = k_0\mu_0$, si deriva la terza formola

$$k = k_0 \frac{\mu_0}{\mu} = k_0(1+\alpha\theta).$$

463. Formole per misurare le altezze col barometro. Applichiamo adesso all'aria atmosferica le formole stabilite qui innanzi, e cerchiamo una formola pratica la quale ci serva a poter misurare col barometro le altezze z al di sopra della superficie terrestre.

A questo fine, dividiamo la prima delle formole (B^{VI}) per la seconda, e adoperiamo il valore di k datoci dalla terza: avremo

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{k_0(1+\alpha\theta)} ,$$

ovvero anche

$$dz = -\frac{k_0(1+\alpha\theta)}{g} \cdot \frac{dp}{p} .$$

Integrando questa equazione per tutta l'altezza z nell' ipotesi che la gravità e la temperatura rimangano costanti, otterremo

$$z = -\frac{k_0(1+\alpha\theta)}{g} \log(p) + C :$$

e rappresentando con p_0 la pressione dell' atmosfera presso la superficie terrestre, dove è $z = 0$, si ha il valore

$$C = \frac{k_0(1+\alpha\theta)}{g} \log(p_0) , \tag{6}$$

cosicchè varrà la formola

$$z = \frac{k_0(1+\alpha\theta)}{g} \log\left(\frac{p_0}{p}\right) .$$

Il logaritmo in questa equazione è il neperiano: ora rappresentando con L i logaritmi volgari a base 10, e atteso il modo onde si fa passaggio da un sistema di logaritmi a un altro, abbiamo (LI)

$$\log\left(\frac{p_0}{p}\right)=\mathrm{Log}\left(\frac{p_0}{p}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{Log}(e)}$$

$$=\mathrm{Log}\left(\frac{p_0}{p}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{Log}(2,7182818\ldots)}=\mathrm{Log}\left(\frac{p_0}{p}\right)\cdot\frac{1}{0,4342945}\cdot$$

perciò fatto

$$\frac{k_0}{0,4342945g}=\mathrm{K},$$

la formola (6) diviene

$$(7)\qquad z=\mathrm{K}(1+\alpha\theta)\mathrm{Log}\left(\frac{p_0}{p}\right).$$

Le pressioni p_0, p dell'atmosfera alla superficie terrestre e al punto supremo dell'altezza che si vuol misurare, sono evidentemente tra loro come le corrispondenti altezze h_0, h della colonna barometrica ridotte alla stessa temperatura $=0$ del mercurio: infatti rappresentando con D la densità del mercurio a temperatura zero, poichè è nulla la pressione sulla superficie superiore del mercurio dentro la camera barometrica, quelle pressioni (452. B″) si esprimono con $p_0=\mathrm{D}gh_0$, $p=\mathrm{D}gh$; e si avrà $\frac{p_0}{p}=\frac{h_0}{h}$. Di più, benchè nell'aria la temperatura θ vada variando insensibilmente coll' altezza z; pure stando all'esperienza, poco ci allontaneremo dall'esattezza se prendiamo per essa il valore costante e medio $\frac{1}{2}(t_0+t)$ fra quelle temperature, che si osservano alla superficie terrestre e al punto dell' altezza che si vuol misurare. Finalmente è stato sperimentato che il coefficiente α di dilatazione, tanto per gli altri fluidi elastici quanto per l'aria secca, ha un valore numerico $=0,00366$ circa: siccome però l'aria atmosferica contiene sempre una quantità di vapor d'acqua, avuto riguar-

do anche a ciò si è fissato di prendere $\alpha = 0,004 = \frac{1}{250}$. Sostituiti tutti questi valori nell' equazione (7), essa si trasforma in quest' altra

$$(8) \qquad z = K[1 + \frac{1}{500}(t_0 + t)] \operatorname{Log}\left(\frac{h_0}{h}\right).$$

Il coefficiente K si può determinare colla stessa equazione (8), sostituendovi per z quel valore che in un dato luogo dànno le misure dirette o le misure trigonometriche. Adoperando in questo modo, si trova $K = 18393^m$; conseguentemente la formola pratica per misurare le altezze col barometro è

$$z = 18393^m\left(1 + \frac{t_0 + t}{500}\right) \operatorname{Log}\left(\frac{h_0}{h}\right).$$

Questa formola suppone che la quantità g sia costante, il che non è vero in tutto: verrebbe una formola più esatta, se si avesse riguardo alla variazione insensibile che si opera nella gravità tanto per le diverse latitudini geografiche, quanto per le diverse altezze al di sopra della superficie terrestre: ma noi ci contenteremo della formola trovata, la quale è abbastanza esatta, specialmente nelle latitudini poco diverse dalla media, e nel caso che le altezze z da misurarsi non sieno molto grandi.

464. Nella medesima formola le quantità h_0 ed h non sono altro, come abbiamo già detto, che le altezze del barometro H_0 ed H, osservate nel punto infimo e supremo della z, e ridotte alla stessa temperatura di zero gradi. Ora per determinare il rapporto di h_0 ed h per mezzo di H_0 ed H, e delle temperature T_0 e T del mercurio nelle due stazioni, notiamo che il mercurio chiuso nel barometro non riducendosi se non dopo qualche tempo ad uguaglianza di temperatura coll' aria circostante, le temperature T_0, T del mercurio barometrico nelle due stazioni si osservano

e definiscono per mezzo di un termometro annesso al barometro, mentre le temperature corrispondenti t_0, t dell'aria si conoscono per mezzo di un termometro separato.

Ciò posto, si sa dalla Fisica che il mercurio per ogni grado del termometro centigrado si dilata di $\frac{1}{5550}$ del suo volume alla temperatura zero: espresso con β questo coefficiente di dilatazione, le altezze barometriche h_0, h a gradi zero, si aumenteranno per ciascun grado di temperatura delle rispettive quantità βh_0, βh; quindi per le temperature T_0, T diverranno rispettivamente

$$H_0 = h_0 + \beta h_0 T_0, \quad H = h + \beta h T.$$

Se ne deducono le due espressioni

$$h_0 = \frac{H_0}{1+\beta T_0}, \quad h = \frac{H}{1+\beta T},$$

e quindi il rapporto

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0(1+\beta T)}{H(1+\beta T_0)} = \frac{H_0}{H(1+\beta T_0)(1+\beta T)^{-1}}:$$

sviluppata la potenza negativa del binomio, e trascurati siccome piccolissimi i termini che hanno per fattore le potenze di β superiori alla prima, risulterà

$$\frac{h_0}{h} = \frac{H_0}{H(1+\beta T_0)(1-\beta T)} = \frac{H_0}{H} \ \frac{1}{1+\beta(T_0-T)}.$$

Onde avremo

$$\text{Log}\left(\frac{h_0}{h}\right) = \text{Log}\left(\frac{H_0}{H}\right) - \text{Log}\left(1+\frac{T_0-T}{5550}\right);$$

466. Se non che trattandosi di livellare un lungo tratto di terreno, la livellazione va soggetta a due errori principali che per un giusto risultato si debbono apprezzare e correggere.

La prima causa di errore è la rifrazione dei raggi luminosi a traverso l'aria. Vedremo nella Appendice che la luce attraversando strati aerei di diversa densità si rifrange continuamente e descrive una curva; quindi è che la mira osservata a distanza notabile ci apparirà più alta del vero nella visuale orizzontale, e perciò all'altezza indicata dalla mira nell'asta converrà fare qualche giunta perchè corrisponda al livello del liquido nel tubo. La quantità da aggiugnersi o la correzione da farsi per la rifrazione della luce, giusta molte esperienze eseguite dagli Idraulici, si può risguardare come uguale in valore medio alla settima parte della correzione da farsi per la sfericità della terra.

L'altra causa di errore nella livellazione è dunque la sfericità della terra, stante la quale il livello del liquido nel tubo e la mira osservata sull'asta in lontananza non si trovano ad ugual distanza dal centro della terra, cioè non sono realmente ad uguale altezza tra loro. Sulla superficie della terra sia M (fig. 163ª) la stazione dell'osservatore, MM'... un circolo massimo del globo terrestre nella direzione della livellazione che si vuole effettuare, MT la tangente del circolo sull'orizzonte del punto M, e D un punto preso sulla tangente MT: supponendo che il livello del liquido nel tubo e la mira nell'asta si trovino sulla visuale parallela ad MD, e corrispondano rispettivamente ai due punti M e D, si vede chiaro che al pari di questi non saranno ugualmente distanti dal centro della terra nè ad uguale altezza tra loro: perchè condotto e prolungato il raggio CM'D, è DM' la differenza di distanza dal centro o di altezza conveniente per la livellazione. Ora per trovare l'espressione di questa differenza DM' che si deve togliere all'altezza osservata nell'asta, chiamiamo r il raggio della terra ed a la distanza che passa tra i punti M e D, o prossimamente tra tra i punti M ed M': essendo la tangente in un circolo media proporzionale tra la secante e il segmento esterno, si avrà

$$2CM' + DM' : MD = MD : DM';$$

e potendo trascurarsi senza errore sensibile la quantità DM′ d'ordinario assai piccola in confronto del diametro terrestre, si avrà pure

$$2r : a = a : DM'.$$

Se ne deduce l'espresssione $DM' = \frac{a^2}{2r}$, la quale ci fa conoscere che nella livellazione per correggere l'errore proveniente dalla sfericità della terra e ridurre così il livello apparente al livello vero, conviene ribassare l'altezza osservata nell'asta di una quantità uguale al rapporto tra il quadrato della lunghezza del tratto che si livella e il diametro della terra. — Le applicazioni degli altri principii le faremo risolvendo i problemi che seguono.

467. **Problema** I. *Una portina* AE (fig. 192ª), *che intercetta un corso d'acqua in un canale, può girare intorno a un asse verticale* BC, *ed è composta di un rettangolo* ABCD *e di un quadrante circolare* CBE: *si vuol determinare la larghezza* CD *da dare al rettangolo, affinchè quando l'acqua sfiora la linea superiore* DCE, *la portina si apra a un piccolissimo impulso.*

Sia a il raggio del circolo, b la cercata larghezza da dare al rettangolo, ed x, y sieno le rispettive distanze di un punto qualsiasi o del rettangolo o del quadrante dall'asse verticale CB, e dalla retta orizzontale DCE. Acciocchè la portina si possa aprire al più piccolo impulso quando l'acqua è all'altezza DCE, debbono essere uguali relativamente all'asse CB i momenti delle pressioni alle quali le due figure sono sottomesse. Ora $\mu g y\, dx\, dy$ è (452. 442) la pressione sull'area infinitesima $dx\, dy$; e $\mu g x y\, dy\, dy$ è il momento della pressione relativamente all'asse CB. Questa ultima espressione integrata rispetto alla y tra i limiti zero ed a, ovvero (VI) tra zero ed $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, somministrerà i valori

$$\frac{1}{2}\mu g a^2 x\,dx\ ,\quad \frac{1}{2}\mu g x(a^2-x^2)\,dx$$

che sono i rispettivi momenti delle pressioni sull'elemento rettangolare $a\,dx$, e sull'elemento $y\,dx$ del quadrante circolare. Integrando di nuovo quelle espressioni in ordine alla x, la prima tra zero e b, l'altra tra zero ed a, se ne avranno i momenti delle pressioni su tutto il rettangolo e su tutto il quadrante espressi rispettivamente da

$$\frac{1}{4}\mu g a^2 b^2\ ,\quad \frac{1}{2}\mu g\left(\frac{a^4}{2}-\frac{a^4}{4}\right).$$

Uguagliando come è detto da principio questi momenti, si ha l'equazione $\frac{1}{4}a^2b^2=\frac{1}{8}a^4$; da questa poi si deduce il valore che si voleva, cioè

$$b=\frac{a}{\sqrt{2}}\ .$$

468. **Problema** II. *Un vaso cilindrico e verticale contiene masse uguali di liquidi differenti le une sulle altre senza mescolarsi e tutte in equilibrio: si vogliono determinare le pressioni che ciascuna massa esercita contro le pareti laterali del vaso.*

Anche in questo problema è da notare ciò che è stato dichiarato nel numero (460); vale a dire che le superficie di separazione tra i diversi liquidi in equilibrio, sono tutte piane e orizzontali. Ciò posto, e incominciando dal liquido più alto, sieno μ_1, μ_2, μ_3, ... le densità dei diversi liquidi; a_1, a_2, a_3, ... le corrispondenti loro altezze, ed r il raggio interno del vaso cilindrico. Consideriamo uno strato qualunque n^{simo} formato da un liquido la cui densità è μ_n, l'altezza a_n, e la pressione sull' unità di superficie presa nel piano superiore di livello è p_n: una pressione consimile, esercitata in que-

sto stesso strato su un punto situato a una distanza z dalla superficie esterna dei liquidi, si esprimerà (452. B') con $p_n + \mu_n g z$, e con $2\pi r (p_n + \mu_n g z) dz$ si esprimerà la pressione su un elemento $2\pi r\, dz$ della superficie laterale del vaso cilindrico. Dunque la pressione totale, esercitata dal predetto strato liquido sulla superficie laterale del vaso, si esprimerà colla formola

$$P = 2\pi r \int_0^{a_n} (p_n + \mu_n g z) dz = 2\pi r p_n a_n + \pi r g \mu_n a_n^2 .$$

Siccome però nei liquidi le pressioni si trasmettono in tutti i sensi, la pressione p_n è uguale a tutte le pressioni sommate insieme degli strati superiori; perciò avremo

$$p_n = g(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_{n-1} a_{n-1}) ;$$

e perchè le masse dei diversi liquidi $\pi r^2 \mu_1 a_1$, $\pi r^2 \mu_2 a_2$, ... per ipotesi sono uguali, e questo importa $\mu_1 a_1 = \mu_2 a_2 = \ldots = \mu_{n-1} a_{n-1}$, avremo anche

$$p_n = (n-1) g \mu_1 a_1 .$$

Dunque sostituendo otterremo

$$P = 2(n-1) \pi r g \mu_1 a_1 a_n + \pi r g \mu_n a_n^2 :$$

attesa poi l'uguaglianza $a_n = \frac{\mu_1 a_1}{\mu_n}$, essa si trasforma in

$$P = 2(n-1) \pi r g \frac{\mu_1^2 a_1^2}{\mu_n} + \pi r g \frac{\mu_1^2 a_1^2}{\mu_n} = \pi r g \mu_1^2 a_1^2 \frac{2n-1}{\mu_n} .$$

Se in luogo di n si sostituiscono i numeri 1, 2, 3, ..., avremo le pressioni esercitate dai singoli liquidi contro la parete laterale del cilindro, e le medesime saranno tra loro come i numeri

$$\frac{1}{\mu_1}, \frac{3}{\mu_2}, \frac{5}{\mu_3}, \dots.$$

469. **Problema** III. *Trovare la posizione in cui sostenere una mezza sfera piena di un liquido omogeneo e chiusa da un piano, affinchè la pressione esercitata contro tutta la superficie del vaso sia massima* (fig. 193a).

Rappresenti μ la densità del liquido, r il raggio della sfera e θ l'angolo che l'asse del vaso forma con una retta verticale: la questione si riduce a determinare il valore di θ, che corrisponde alla pressione massima.

A questo fine rammentiamoci che l'area circolare del piano che chiude la mezza sfera, è πr^2; che la distanza del centro di gravità di questo piano dal punto o dalla superficie suprema del liquido, è $r \operatorname{sen} \theta$; che $2\pi r^2$ è la superficie sferica del vaso e che $r \operatorname{sen} \theta + \frac{r}{2} \cos \theta$ è la distanza (122) del centro di gravità della medesima dalla superficie superiore del liquido, il qual centro è situato sul mezzo dell'asse. Ciò posto, le pressioni esercitate rispettivamente dal liquido sulle superficie piana e curva, sono (453. 458) $\mu g \pi r^3 \operatorname{sen} \theta$, $2\mu g \pi r^3 \operatorname{sen} \theta + \mu g \pi r^3 \cos \theta$: perciò la loro somma

$$\mu g \pi r^3 (3 \operatorname{sen} \theta + \cos \theta)$$

sarà la pressione totale, a cui è sottoposta l'intera superficie del vaso. Il valore di θ pel quale questa pressione diviene massima, si ricava (LXX) dall'equazione

$$3 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta = 0;$$

e così la pressione è massima contro la superficie del vaso, quando si ha

$$\theta = \text{arc. tang } 3.$$

CAPO III.

EQUILIBRIO DEI SOLIDI IMMERSI NEI FLUIDI PESANTI

470. **Pressione sopra un solido immerso in un fluido pesante e in equilibrio.** Dentro a una massa fluida pesante e perfettamente in equilibrio separiamo col pensiero una porzione di forma qualunque, e immaginiamo che tutte le molecole di questa porzione si connettano tra loro con linee rigide e geometriche: la cosa, come si vede, torna a considerare questa porzione come divenuta solida, senza che siasi mutata la sua densità e il suo volume. È manifesto che l' equilibrio non s' è turbato per questo; e che la risultante di tutte le pressioni esercitate dal fluido circostante sulla superficie della porzione divenuta solida, quando il fluido non sia sollecitato da altre forze che dalla gravità, è uguale e direttamente opposta al peso della porzione stessa. Ma le pressioni su questa porzione solida sono le medesime che sopra un vero solido qualunque sostituito in luogo di quella, e che abbia in tutto la stessa forma; dunque la pressione totale che sostiene un solido immerso tutto o in parte (fig. 194.ª) in un fluido pesante e in equilibrio, è uguale al peso del fluido rimosso, ed è direttamente opposta alla direzione di questo peso. Questo è il gran principio di Archimede, e ordinariamente si enuncia dicendo che *un corpo immerso in un fluido o in un liquido perde tanto di peso, quanto è il peso del fluido o del liquido spostato.*

471. Il principio di Archimede si può anche dimostrare per via di considerazioni analitiche nel modo seguente. Sulla superficie del corpo immerso in un fluido prendiamo a considerare l' elemento infinitesimo ω, situato presso un punto qualunque (x, y, z). In questo punto sia p la pressione riferita all'unità di superficie;

e α, β, γ sieno gli angoli che fa la normale, che è pure la direzione della pressione, con tre assi coordinati, due orizzontali e uno verticale: sarà $p\omega$ la pressione che sostiene l'elemento ω; e $p\omega\cos\alpha$, $p\omega\cos\beta$, $p\omega\cos\gamma$ saranno le componenti della medesima pressione secondo gli assi. Ma i tre prodotti $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ non sono altro (125) che le proiezioni dell'area infinitesima ω sui tre piani coordinati; chiamando dunque a, b, c queste proiezioni, le dette componenti si esprimeranno coi prodotti pa, pb, pc.

Ora nelle pressioni esercitate dal fluido sull'intera superficie del solido immerso, le componenti pa, pb rispettivamente parallele agli assi orizzontali OX, OY si distruggono tutte scambievolmente a due a due. Infatti prolungando nel solido se fia d'uopo il piccolo cilindro orizzontale che ha per basi ω ed a, facilmente s'intende come a ciascuno elemento ω corrisponda sulla parte opposta della superficie un altro elemento ω', che ha una stessa proiezione a sul piano YOZ; d'altronde la pressione p, riferita all'unità di superficie, per l'elemento ω' rimane pure la stessa che per l'elemento ω, trovandosi questi due elementi alla stessa profondità sotto il livello esterno del fluido: dunque secondo l'asse OX le componenti delle pressioni $p\omega$ e $p\omega'$ esercitate sopra i due elementi ω ed ω', sono uguali ciascuna a pa; e siccome nella medesima direzione agiscono anche in senso opposto, così si conchiude che le componenti pa di tutte le pressioni si distruggono tra loro a due a due. Ciò stesso avviene alle componenti pb, parallele all'altro asse orizzontale OY, e perpendicolari al piano XOZ; non restano dunque che le componenti verticali pc, dalle quali risulterà la pressione totale del fluido sul corpo solido che vi è immerso.

Considerando queste ultime componenti, vede ognuno che il cilindro verticale di base ω, generalmente intercetterà sulla parte superiore della superficie del solido un altro elemento ω_1; e che rispetto a un tale elemento sarà c la proiezione sul piano XOY come per rispetto ad ω, ma la pressione riferita all'unità di superficie sarà p_1 minore di p: i due elementi ω ed ω_1 saranno dun-

que premuti verticalmente in senso opposto dalle forze pc, $-p_1c$, e l'elemento cilindrico $\omega\omega_1$ del solido si troverà così sottoposto da basso in alto alla pressione verticale $(p-p_1)c$. Ora supponendo che il liquido sia omogeneo e di densità μ', abbiamo $p=\mu'gz+C$, $p_1=\mu'gz_1+C$: dunque essendo l la lunghezza del piccolo cilindro $\omega\omega_1$, la pressione esercitata sopra di esso di basso in alto è

$$(p-p_1)c=\mu'g(z-z_1)c=\mu'gcl,$$

ed equivale evidentemente al peso del fluido di cui quell'elemento solido occupa il luogo. Applicando un somigliante discorso a tutti e singoli gli elementi verticali del solido, si viene alla medesima conclusione del numero precedente; vale a dire che tutte le pressioni esercitate da un fluido omogeneo contro un solido che vi sia immerso, si riducono a una sola forza verticale diretta nel senso opposto alla gravità, uguale al peso del fluido rimosso, e applicata al centro di gravità di questo stesso fluido.

Una tal conclusione sussiste sempre, come è chiaro, sia che il solido s'immerga totalmente nel fluido omogeneo o solo in parte; ed è anche vera, quando la densità μ' varia nel fluido da uno strato all'altro. Imperocchè in questo ultimo caso, distruggendosi sempre a vicenda le pressioni orizzontali, ciascuno dei cilindri elementari $\omega\omega_1$ dovrà pur sostenere la pressione verticale $(p-p_1)c$: ora chiamando z_0 quel particolar valore di z, pel quale la pressione p diviene uguale a una costante C, abbiamo evidentemente (451)

$$p=g\int_{z_0}^{z}\mu'dz+C\,,\quad p_1=g\int_{z_0}^{z_1}\mu'dz+C\,;$$

sarà dunque la detta pressione

$$(p-p_1)c=gc\left(\int_{z_0}^{z}\mu'dz-\int_{z_0}^{z_1}\mu'dz\right)=\int_{z_1}^{z}\mu' gc\,dz.$$

È poi manifesto che questo ultimo integrale rappresenta il peso

del fluido, di cui tengono il luogo i singoli elementi verticali del solido.

472. Condizioni di equilibrio per un solido immerso in un fluido. Segue da ciò che si è detto nei numeri precedenti che *due sono le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un solido immerso in un fluido: la prima è che il peso del corpo sia uguale a quella del fluido espulso, l'altra che i centri di gravità del solido e del fluido espulso sieno situati sopra una medesima retta verticale.* Se non si verifica la prima condizione, si ha nel solido un movimento di traslazione in alto ovvero in basso; se non si verifica la seconda, si ha un movimento di rotazione: quando non si verifica nè l'una nè l'altra condizione, si hanno i due movimenti a un tempo.

Per stabilire adesso una formola, la quale ci sia di norma per giudicare se nei casi particolari si possa o no verificare la prima delle due condizioni suddette, rappresentiamo con v il volume del solido immerso totalmente ovvero in parte nel fluido, e con μ la densità costante del solido se è omogeneo, ovvero la densità media se è eterogeneo: rappresentiamo similmente con v', μ' il volume del fluido spostato, e la sua densità che supponiamo uniforme. Esprimeranno (99. 259) $g\mu v$, $g\mu' v'$ le forze motrici della gravità, ossia i pesi del solido e del fluido: dunque la prima delle due condiziuni di equilibrio richiede che sussista l'equazione

$$\text{(D)} \qquad \mu v = \mu' v' .$$

473. E qui si debbono considerare tre casi che possono occorrere, secondo che la densità del solido è maggiore, uguale o minore di quella del fluido, p. es. di un liquido dentro al quale esso è immerso.

Sia 1.° $\mu > \mu'$: siccome non può essere $v < v'$, così in questo caso non si può mai soddisfare all'equazione (D); quindi è che il solido posato sulla superficie del liquido o immerso dentro di esso, non potrà rimanere in equilibrio, ma scenderà in basso fino a che trovi un ostacolo a cui si arresti. Dico che scenderà;

perchè secondo il principio di Archimede riferito di sopra, il peso che rimane al solido immerso si esprime con

$$g(\mu v - \mu' v') ,$$

e la forza motrice nel caso nostro risulta positiva e tende all'ingiù nel senso della gravità. La forza acceleratrice colla quale discende il solido poi che è immerso, si esprime (259) con

$$\frac{g(\mu v - \mu' v')}{\mu v} = g\left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right) :$$

ora questa forza rimane costante e la discesa si farebbe con moto uniformemente accelerato, se la resistenza del mezzo liquido non vi si opponesse.

2.° Sia $\mu = \mu'$: per soddisfare all'equazione (D), o alla prima delle due condizioni di equilibrio, è necessario che sia $v = v'$, cioè che il solido sia immerso totalmente nel liquido: dunque in questo secondo caso il solido dovunque sia collocato dentro al liquido rimarrà in equilibrio, purchè il suo centro di gravità e quello del liquido espulso sieno sopra una medesima retta verticale; ciò che costituisce l'altra condizione di equilibrio, e si verifica sempre nei solidi omogenei nei quali il centro di gravità coincide con quello del liquido spostato. In questo caso stesso in cui siamo, collocato che sia il solido sulla superficie del liquido, così che si abbia $v > v'$, sarà anche $\mu v > \mu' v'$; e non verificandosi l'equazione (D), il solido si moverà discendendo e tuffandosi nel liquido con una forza

$$g(\mu v - \mu' v') > 0.$$

3.° Sia finalmente $\mu < \mu'$: per soddisfare all'equazione (D), deve essere $v > v'$; questo vuol dire che acciò il solido possa stare in equilibrio, non dee essere immerso totalmente nel liquido, ma in parte soltanto e galleggiare sopra di esso. Affinchè poi

sussista di fatto questo equilibrio, oltre al verificarsi l' altra condizione che i centri di gravità del solido e del liquido espulso si trovino sopra una medesima retta verticale, il volume v dee essere tanto più grande di v' quanto la densità μ è più piccola di μ'. Questo si esprime colla proporzione

$$v' : v = \mu : \mu' ,$$

e vuol dire che nell'equilibrio la parte immersa sta al solido intero, come la densità di questo sta a quella del liquido. In questo caso se si immerga il solido dentro al liquido, lo si vedrà salire alla superficie; poichè essendo $v = v'$, la forza motrice è

$$g(\mu v - \mu' v') < 0.$$

474. **Equilibrio stabile o instabile dei galleggianti.** Consideriamo un solido quanto a figura e a densità simmetrico relativamente a un piano verticale MN, e galleggiante sopra un liquido omogeneo: nel caso di equilibrio i centri di gravità del solido e del liquido espulso sono situati sopra una stessa verticale, e i pesi del solido stesso e del liquido espulso sono anche uguali. Immaginiamo adesso che venga impressa a tutti i punti del solido una velocità infinitamente piccola e parallela al piano di simmetria, cosicchè il solido si sposti un tantino dalla sua posizione di equilibrio: ciò fatto, o il solido tende a tornare alla primitiva posizione di equilibrio, ovvero tende ad allontanarsene sempre più; nel primo caso l'equilibrio del galleggiante è detto *stabile*, e nell'altro è *instabile*. Siccome poi è manifesto che il solido tende a riprendere la posizione primitiva di equilibrio ovvero se ne allontana sempre più, secondo che quello spostamento si conserva infinitesimo o no; perciò la questione della stabilità o della instabilità d' equilibrio nei galleggianti torna a dover determinare se quel movimento impresso rimane o no infinitesimo. Ora noi veniamo a trattare appunto di questo, e come abbiamo detto innan-

zi supponiamo il solido simmetrico relativamente a un piano verticale, e lo spostamento dalla posizione naturale di equilibrio fatto in direzione parallela al piano di simmetria.

475. Sia AB (fig. 195.ª) la sezione del solido col piano orizzontale, dove termina il liquido; $A'B' = b$ la nuova posizione che prende la sezione primitiva di equilibrio AB, dopo lo spostamento infinitesimo che si è dato al galleggiante; DE la sezione del solido con un piano orizzontale condotto per C, centro dell' area A'B'; G, G' i centri di gravità del solido e del liquido espulso dalla porzione del solido A'NB'; finalmente sia a la distanza GG' tra i due predetti centri, θ l' angolo formato da GG' colla verticale, ζ la distanza del punto C dalla superficie esterna AB del liquido che noi prenderemo pel piano delle coordinate x ed y, M la massa del solido, μ la densità del liquido, e V il volume del liquido corrispondente alla porzione A'NB' e il cui peso è uguale al peso di tutto il solido galleggiante.

Tutte le forze dalle quali è sollecitato il solido sono la sua gravità e le pressioni sulla sua parte immersa: queste pressioni essendo (470) uguali al peso del liquido espulso e direttamente opposte alla direzione di questo peso, producono sugli elementi della parte immersa quell'effetto medesimo che produrrebbero delle forze verticali tendenti in alto, applicato agli stessi elementi che tengono il luogo del liquido, e rispettivamente uguali ai pesi dei volumi corrispondenti del liquido stesso. Quindi $Z = g\,dM$ sarà la forza motrice di ciascun elemento che è posto fuori del liquido, e $Z = g\,dM - g\mu\,d\omega$ la forza motrice di ciascun elemento della parte immersa, dove $d\omega$ rappresenta un elemento del volume immerso nello stato di movimento. Ora se chiamiame v quella velocità variabile che per un piccolo spostamento del solido dalla posizione di equilibrio concepisce un elemento qualunque dM situato a una distanza z dalla superficie AB del liquido; essendo le cumponenti $X = 0$ ed $Y = 0$, l'equazione delle forze vive (397) integrata che sia ci darà

$$\Sigma(v^2\,dM) = 2\int\Sigma(g\,dM\,dz) - 2\int\Sigma(g\mu\,d\omega\,dz) + C,$$

ovvero

$$(1) \qquad \Sigma(v^2 dM) = 2g\Sigma(z\,dM) - 2g\mu\,\Sigma(z\,d\omega) + C.$$

Il primo membro è una quantità infinitesima di secondo ordine, per la ragione che le velocità v sono per ipotesi infinitesime; perciò è che nel secondo membro non si potranno trascurare se non le quantità infinitesime di ordine superiore al secondo: la lettera C rappresentata una costante arbitraria, e la somma ovvero l'integrale Σ nel primo termine si deve estendere a tutta la massa del solido, e nell'altro alla parte del volume che è immersa. Cerchiamo ora le espressioni delle diverse parti dell'equazione stabilita.

476. Per ciò che riguarda il primo termine nel secondo membro, sia z_1 la distanza del centro di gravità G di tutto il solido dal piano AB: poichè il peso gM del corpo nello stato di equilibrio è uguale al peso $g\mu V$ del liquido espulso, e si ha $M = \mu V$; perciò (109) abbiamo $\Sigma(z\,dM) = Mz_1 = \mu V z_1$, e per conseguenza

$$(2) \qquad 2g\Sigma(z\,dM) = 2g\mu\,Vz_1.$$

Quanto all'altro termine nel secondo membro dell'equazione (1), l'espressione $\Sigma(z\,d\omega)$ rappresenta relativamente al piano AB la somma de' momenti degli elementi del volume immerso nello stato di movimento, ed è uguale (109) al momento di tutto il volume. Ora il volume immerso si compone di AE e DNE, ossia di AE, di $A'NB' = V$, di CEB', e di $-CDA'$; per trovare dunque il valore dell'espressione $\Sigma(z\,d\omega)$ quanto al volume immerso, basterà determinarne il valore per ciascuna di quelle quattro parti che compongono il volume. — 1.° Per ciò che riguarda la porzione AE compresa tra i due piani orizzontali AB e DE, il valore di $\Sigma(z\,d\omega)$ è manifestamente $b\zeta \cdot \frac{1}{2}\zeta$, e si ha

$$\Sigma(z\,d\omega)=\frac{1}{2}b\zeta^2\,,$$

per la ragione che AE si può considerare come un cilindro infinitesimo di basse b e di altezza ζ. — 2.° Quanto al volume A'NB', la distanza del centro di gravità G' dalla superficie esteriore del liquido è $z_1 \mp a\cos\theta$, nella quale espressione si dee prendere il segno superiore ovvero l'inferiore, secondo che il centro di gravità di tutto il solido è al di sotto o al di sopra del centro di gravità del liquido espulso: e siccome (LVIII) si ha $\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{2.3.4}-\ldots$ $=1-\frac{\theta^2}{2}$, trascurando come si vede gli infinitesimi di ordine superiore al secondo; perciò la suddetta distanza si esprime anche con $z_1\mp a\pm\frac{a\theta^2}{2}$, e così il valore di $\Sigma(z\,d\omega)$ sarà $V\left(z_1\mp a\pm\frac{a\theta^2}{2}\right)$, cioè si avrà

$$\Sigma(z\,d\omega)=Vz_1\mp Va\pm\frac{Va\theta^2}{2}$$

rispetto al volume A'NB', menzionato di sopra. — 3.° Finalmente gli altri due volumi CEB', — CDA' si possono dividere in prismi verticali che abbiano per base l'elemento $d\alpha$ della sezione A'B', e per altezza la quantità HK $\cos\theta$: quindi se rappresentiamo con r la distanza KC di un elemento qualunque $d\alpha$ da una retta condotta per C e perpendicolare al piano di simmetria, esprimerà $\pm \text{HK}\cos\theta\,d\alpha=\pm r\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\alpha=\pm r\left(\theta-\frac{\theta^3}{2.3}+\ldots\right)$ $\left(1-\frac{\theta^2}{2}+\ldots\right)d\alpha=\pm r\theta\,d\alpha$ un elemento prismatico di uno dei due volumi CEB', — CDA'; la espressione poi $\zeta=\pm\frac{1}{2}r\,\text{sen}\,\theta$

$=\zeta \pm \frac{1}{2} r\theta$ rappresenterà la distanza tra il centro dello stesso elemento ossia tra il punto di mezzo della verticale HK, e l'esterna superficie del liquido AB. Laonde riguardando r come positiva o come negativa, secondo che si considera la parte B'C ovvero l'altra A'C, e stendendo la somma Σ a tutta l'area A'CB', pe' due volumi insieme sussiste il valore $\Sigma(z\,d\omega)$ $=\Sigma r\theta\, d\alpha\left(\zeta + \frac{1}{2} r\theta\right) = \theta\zeta\Sigma(r\,d\alpha) + \frac{\theta^2}{2}\Sigma(r^2 d\alpha)$: ma $\Sigma(r\,d\alpha)$ è il momento dell'area A'B' relativo a una retta che passa pel suo centro normalmente al piano di simmetria, e che perciò è nullo; di più si può dire che il fattore $\Sigma(r^2 d\alpha)$ sia il momento (406) d'inerzia dell'area stessa in ordine alla medesima retta, e che può rappresentarsi con bk^2; dunque per ciò che riguarda i due volumi CEB', —CDA' de' quali parliamo, l'espressione precedente diviene

$$\Sigma(z\,d\omega) = \frac{bk^2\theta^2}{2} .$$

Raccogliendo adesso in una somma i tre valori relativi alle diverse parti dell'espressione $\Sigma(z\,d\omega)$, avremo pel volume immerso nello stato di movimento

$$\Sigma(z\,d\omega) = \frac{1}{2} b\zeta^2 + Vz_1 \mp Va \pm \frac{Va\theta^2}{2} + \frac{bk^2\theta^2}{2} ,$$

e in conseguenza anche

$$-2g\mu\,\Sigma(z\,d\omega) = -g\mu\, b\zeta^2 - 2g\mu Vz_1 \pm 2g\mu Va - g\mu(bk^2 \pm Va)\theta^2 .$$

Ora se questo valore insieme con quello dell'equazione (2) si sostituisce nella (1), e si fa poi la costante $\pm 2g\mu\, Va + C = c$, si avrà

(D′) $\Sigma(v^2 dM) = -g\mu b\zeta^2 - g\mu(bk^2 \pm Va)\theta^2 + c$,

nella quale la costante c è una quantità positiva e infinitamente piccola, per la ragione che al principio del moto essendo nulle le quantità ζ, θ, e le velocità v essendo per ipotesi infinitesime, in quel principio medesimo anche la somma $\Sigma(v^2 dM)$ è positiva e infinitesima.

477. Ora venendo più da presso alla questione proposta, il centro di gravità del solido o è situato al di sotto, ovvero al di sopra di quello del liquido espulso. Se è situato al di sotto, nel secondo membro dell'equazione (D′) si dee prendere il segno positivo, e la somma dei primi due termini che sono negativi riesce sempre minore del termine c, per la ragione che il primo membro di quella è sempre positivo: quella somma poi non può divenire minore di c infinitesima, se le quantità ζ e θ non rimangono sempre infinitamente piccole; dunque *se il centro di gravità del galleggiante è situato al di sotto del centro di gravità del liquido espulso quando è nello stato di equilibrio, un minimo movimento comunicato al solido rimane costantemente infinitesimo, e perciò l'equilibrio è stabile.*

Se poi il centro di gravità del solido è al di sopra di quello del liquido espulso, nel secondo membro dell' equazione (D′) si dovrà prendere il segno negativo: quindi affinchè le quantità ζ e θ rimangono infinitesime e l' equilibrio sia stabile deve sussistere

$$bk^2 - Va > 0 \text{ , ossia } a < \frac{bk^2}{V} .$$

Ciò vuol dire che *quando il galleggiante è simmetrico relativamente a un piano verticale ed è spostato di poco dalla posizione di equilibrio nel senso del piano di simmetria, benchè abbia il centro di gravità sopra quello del liquido espulso, tuttavia l'equilibrio può essere stabile; lo sarà però realmente tutte le volte che*

la distanza tra i due centri è minore del quoziente che si ottiene dal dividere pel volume della parte immersa il momento d'inerzia della sezione alla superficie, relativamente a una retta condotta pel centro di questa sezione e perpendicolare al piano di simmetria.

478. **Del metacentro.** Nelle ricerche sulla stabilità d'equilibrio dei corpi galleggianti si considerava per l'addietro, e si considera tuttora nella architettura navale un certo punto singolare che è detto *metacentro*: prima di venire ai consueti problemi, sarà bene che facciamo conoscere un tal punto e accenniamo la regola che rispetto ad esso si suol dare, per saper distinguere in pratica se un galleggiante sia o no in equilibrio stabile.

Supponiamo come nei numeri precedenti che il corpo galleggiante sia simmetrico per rispetto al piano verticale MN (fig. 195a) e che nel senso di questo piano si rimuova un poco dalla sua posizione di equilibrio: la retta verticale che nello stato di equilibrio conteneva i centri di gravità del galleggiante e dell'acqua spostata, s'inclinerà anch'essa insieme col corpo per es. in GG'; il punto G o il centro di gravità del solido resterà sempre sulla retta GG', ma il punto G' o il centro di gravità dell'acqua spostata uscirà in generale dalla medesima retta, e fuori di essa prenderà una certa posizione che noi ci figuriamo in G''. S'immagini ora una retta verticale condotta pel punto G'', cioè pel centro di gravità dell'acqua espulsa dopo lo spostamento del solido dalla sua posizione di equilibrio: questa retta verticale incontrerà la retta GG' in un certo punto O, ed è questo punto che chiamasi il *metacentro*.

479. Per dire adesso alcuna cosa intorno alla regola fondata sul metacentro, consideriamo il galleggiante già rimosso un poco dalla sua posizione di equilibrio, e vediamo qual sorta di movimento dovrà in esso succedere. Nella nuova posizione il solido è sollecitato a muoversi da due forze verticali ed opposte, cioè dal proprio peso applicato al suo centro di gravità in G, e dalla pressione o spinta del fluido che è una forza applicata in G'' al centro di gravità dell'acqua espulsa ed agisce contro il peso nella direzione G''O. Da queste due forze possono nascere (437) i

moti di traslazione e di rotazione. Quanto al moto di traslazione, esso sarà nullo se non s'imprime nel solido alcuna velocità iniziale, e se il volume del liquido spostato sia sempre uguale a quello che occupa il galleggiante nella sua posizione di equilibrio: la ragione si è perchè in questa ipotesi le due forze contrarie, il peso del solido e la spinta del liquido, sono anche uguali; e però considerate ambedue nel centro G, vi si distruggono scambievolmente.

Quanto al moto di rotazione intorno al centro di gravità, dobbiamo riguardare questo centro G come fisso conforme alla teoria del numero citato (437): di tal guisa rimarrà senza effetto il peso del corpo; e il galleggiante girerà intorno a un asse orizzontale che s'immagina condotto pel punto G normalmente al piano di simmetria MN, in virtù della sola pressione o spinta dell'acqua nella direzione G″O. Onde la regola per riconoscere dal metacentro se l'equilibrio del galleggiante sia o no stabile, è la seguente: *se nel detto movimento di rotazione il metacentro* O *resta sempre al di sopra del punto* G, *o del centro di gravità del corpo, l'equilibrio sarà stabile,* tendendo in questo caso la spinta del fluido a ritornare la retta GG′ nella posizione verticale che risponde all'equilibrio del galleggiante; *se poi il metacentro si trova sempre al di sotto del centro di gravità, l'equilibrio del solido sarà instabile,* tendendo in quest'altro caso la spinta del fluido ad allontanare sempre più la retta GG′ dalla posizione verticale. L'equilibrio sarebbe indifferente, se il metacentro coincidesse col centro di gravità del galleggiante; e la considerazione del metacentro non servirebbe più a nulla quanto alla determinazione della stabilità d'equilibrio, se esso nel movimento di rotazione fosse ora al di sopra e ora al di sotto del centro di gravità del corpo galleggiante. Veniamo adesso alla soluzione di qualche problema.

480. **Problema** I. *Determinare la densità, ossia il peso specifico di un dato corpo.*

A parità di volume le densità dei corpi omogenei sono tra loro come le masse (99), o anche come i pesi (98): quindi è che se per unità, come si è convenuto pe' solidi e per i liquidi,

prendiamo la densità dell' acqua distillata alla temperatura di quattro gradi del termometro centigrado (l'esperienza dimostra che l'acqua a questa temperatura ha la massima densità); la densità degli altri corpi a volume uguale a quello dell'acqua, si determina dividendo rispettivamente i loro pesi per quello dell'acqua. La densità così espressa è detta *peso specifico* dei corpi, cioè il peso di un dato corpo riferito a quello dell'acqua preso per unità di misura sotto pari volume.

Ciò posto, per determinare la densità o il peso specifico di un dato corpo, basta conoscere a parità di volumi il peso del corpo e quello dell'acqua: questi due pesi poi si conoscono applicando il principio di Archimede (470). Se il corpo è un solido, lo si pesa prima nell'aria coi metodi usati, e poi nell'acqua: la differenza tra i due pesi è quel tanto di peso che ha perduto nell'acqua, ossia è il peso dell'acqua a volume uguale col solido: quindi il quoziente del suo peso nell'aria diviso per la differenza ottenuta, dà la densità o il peso specifico di quel solido. È vero che l'esperienza dovrebbe farsi nel vuoto, acciocchè il risultato riuscisse più esatto: il solido perde anche una parte del suo peso per essere realmente immerso nell'aria; ma essendo questa perdita una cosa da nulla, si può e si usa di trascurarla senza errore sensibile. — Se poi il corpo è un liquido, si usa di prendere un solido del quale si conosce il peso, e s'immerge successivamente nel dato liquido e nell'acqua: nell'uno e nell'altra esso perde una diversa qnantità di peso; questa diversa quantità è il peso diverso del liquido e dell'acqua a volumi uguali: il quoziente tra questi due pesi è il peso specifico del liquido proposto.

Quando un corpo è composto di due altri omogenei, dei quali si conocono i pesi p, p', e le densità μ, μ', nel caso che la composizione avvenga senza variazione dei volumi, si può determinare la densità x, o il peso specifico del composto pure omogeneo. Rappresentino m ed m', v e v' le rispettive masse e i volumi dei corpi componenti: avremo (99. 98)

$$x = \frac{m + m'}{v + v'} = \frac{m + m'}{\frac{m}{\mu} + \frac{m'}{\mu'}} = \frac{p + p'}{\frac{p}{\mu} + \frac{p'}{\mu'}} \, ,$$

ossia

$$x = \frac{\mu\mu'(p + p')}{\mu' p + \mu p'} \, .$$

In generale quando tra le cinque quantità x, p, p', μ, μ' se ne conoscano quattro, per mezzo della formola qui sopra stabilita potrà determinarsi anche la quinta.

481. **Problema** II. *Determinare le posizioni di equilibrio in un prisma retto e omogeneo, che ha le basi quadrate ed è immerso in un liquido in modo che le basi sieno verticali, e uno degli spigoli orizzontali sia fuori del liquido.*

A noi basterà di considerare la sezione di questo prisma fatta con un piano verticale, condotto se si vuole pel suo centro. Sia dunque ABCD (fig. 196ª) la sezione del prisma fatta con un piano verticale, sia G il centro di gravità di questa sezione quadrata, A il vertice dello spigolo fuori del liquido, LL′ la sezione del quadrato colla superficie libera del liquido, E il punto di mezzo della retta LL′, ed H il centro di gravità del triangolo ALL′ che è fuori del liquido. Per la proprietà che hanno i centri di gravità, una retta che congiunge il centro di gravità di un corpo qualunque e di una di due porzioni che lo compongono, passa anche pel centro di gravità dell'altra porzione: dunque il centro di gravità della porzione immersa o anche del liquido espulso, è situato sulla retta HG prolungata, che nel caso di equilibrio ha una posizione verticale. Quindi è che avendo condotta EK parallela ad HG fino a che incontra la diagonale AC nel punto K, in qualunque posizione di equilibrio saranno uguali le distanze KL e KL′.

Ciò posto, cerchiamo le equazioni che esprimano le due condizioni di equilibrio (473. 3°.). A questo fine chiamiamo a il lato del quadrato ABCD, x ed y le due parti AL ed AL′ fuori del liquido, le quali è necessario determinare per qualsivoglia posiione di equilibrio. Nel triangolo ALL′ il centro di gravità H è situato sulla retta AE, e la sua distanza dal vertice è $AH=\frac{2}{3}AE$: quindi essendo HG parallela ad EK, sarà pure $AG=\frac{2}{3}AK$; per conseguenza $AK=\frac{3}{2}AG=\frac{3}{4}AC$, e la proiezione AP della retta AK sopra le direzioni AB, AD si esprimerà con $\frac{3}{4}a$. Laonde nei triangoli AKL, AKL′ si ha dalla geometria

$$\overline{KL}^2=x^2+\overline{AK}^2-2x.\frac{3}{4}a,\ \overline{KL'}^2=y^2+\overline{AK}^2-2y.\frac{3}{4}a:$$

ora in forza della prima condizione d'equilibrio la retta HG nella quale si trovano i centri di gravità del quadrato ABCD e del liquido spostato, dee essere verticale di posizione; e perciò, come accennammo di sopra, debbono essere uguali le distanze KL e KL′: dunque la prima condizione di equilibrio è data dall'equazione unica

$$x^2-2x\frac{3}{4}a=y^2-2y.\frac{3}{4}a$$

che si può scrivere sotto la forma

$$(x-y)\left(x+y-\frac{3}{2}a\right)=0;$$

ovvero da una delle due

(1) $$x-y=0\,,$$

(2) $$x+y-\frac{3}{2}a=0.$$

Per determinare adesso l'equazione che esprime la seconda condizione di equilibrio, sieno μ e μ' le densità del galleggiante e del liquido: siccome la porzione immersa del quadrato e il quadrato tutto intero si rappresentano rispettivamente con $a^2-\frac{1}{2}xy$ ed a^2, così l'altra condizione di equilibrio per la quale la porzione immersa sta all'intero quadrato come la densità del solido sta a quella del liquido, si esprimerà colla equazione

$$\frac{a^2-\frac{1}{2}xy}{a^2}\;\frac{1}{2}=\frac{\mu}{\mu'}\,,$$

ovvero

(3) $$xy=2a^2\left(1-\frac{\mu}{\mu'}\right).$$

Quest' ultima equazione combinata colla (1), ovvero colla (2), ci darà tutte le posizioni di equilibrio che noi adesso passiamo a discutere.

1.° Ponendo mente alle equazioni (1) e (3), la prima posizione di equilibrio corrisponde ai valori

$$x=y=a\sqrt{2\left(1-\frac{\mu}{\mu'}\right)}:$$

siccome però le parti x ed y debbono essere sempre più piccole di a, quella prima posizione di equilibrio non sussisterà, se il rapporto $\frac{\mu}{\mu'}$ non avrà un valore compreso dentro i limiti $\frac{1}{2}$ ed 1.

2.° Considerando le equazioni (2) e (3), dalla prima si deduce

$$y=\frac{3}{2}a-x;$$

e la seconda, con sostituirvi questo valore di y, diviene

$$x\left(\frac{3}{2}a-x\right)=a^2\left(2-2\frac{\mu}{\mu'}\right):$$

da queste si ricavano i valori

$$x=\frac{1}{4}a\left(3\pm\sqrt{32\frac{\mu}{\mu'}-23}\right),$$

$$y=\frac{1}{4}a\left(3\mp\sqrt{32\frac{\mu}{\mu'}-23}\right),$$

ai quali corrispondono due altre posizioni di equilibrio affatto simmetriche, secondo che si prendono i segni superiori ovvero gli inferiori. Perchè sussistano queste due posizioni, il rapporto $\frac{\mu}{\mu'}$ dee essere compreso tra i valori delle frazioni $\frac{23}{32}$ e $\frac{24}{32}$: se $\frac{\mu}{\mu'}=\frac{23}{32}$, le due posizioni tornano a una sola, cioè a quella determinata innanzi (1°.); se $\frac{\mu}{\mu'}=\frac{24}{32}$ cosicchè ne risultino $x=a$ ed $y=\frac{1}{2}a$ o viceversa, il prisma starà ancora in equilibrio, purchè due dei suoi spigoli sieno immersi, un terzo spigolo sia alla superficie del liquido. e il quarto ne sia fuori.

482. **Problema** III. *Si domanda quale è la condizione di equilibrio stabile in un parallelepipedo rettangolo e omogeneo immerso in un liquido sì che le basi sieno orizzontali, e lo spostamento dalla posizione di equilibrio si faccia in direzione parallela alle faccie verticali.*

Sieno a, b le dimensioni della base, c l'altezza del parallelepipedo, μ e μ' la densità del solido e del liquido: abc è il volume del solido, e conseguentemente in forza della seconda condizione di equilibrio (473. 3°.) sarà $\frac{\mu}{\mu'} abc$ il volume della parte immersa, che è di un parallelepipedo rettangolo la cui altezza $=\frac{\mu}{\mu'} c$.

Di più, i centri di gravità di tutto il solido e della porzione immersa o del liquido espulso, distano dalla base inferiore e comune alle due figure di $\frac{c}{2}$ e di $\frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{c}{2}$; perciò l'altezza del centro di gravità del galleggiante su quello del liquido espulso, o con altre parole la distanza tra i due centri viene espressa dal prodotto $\frac{c}{2}\left(1-\frac{\mu}{\mu'}\right)$.

Finalmente rappresentando con r la distanza di un elemento $b\,dr$ della sezione rettangolare che la superficie libera del liquido fa col solido immerso, da una retta condotta pel centro di questa sezione e parallela al lato b, il momento d'inerzia di questa sezione relativamente a quella retta si esprime evidentemente con

$$\int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} br^2 dr = \frac{1}{12}\, ba^3 .$$

Per la qual cosa secondo la regola esposta al numero (477), la condizione di equilibrio stabile pel parallelepipedo proposto in ordine a un movimento parallelo alle facce ac, è data dalla inuguaglianza

$$\frac{c}{2}\left(1-\frac{\mu}{\mu'}\right) < \frac{\frac{1}{12}\, ba^3}{\frac{\mu}{\mu'}\, abc}$$

che si può scrivere ancora

$$\frac{a^2}{c^2} > 6\frac{\mu}{\mu'}\left(1 - \frac{\mu}{\mu'}\right)$$

L'equilibrio sarebbe instabile, se il rapporto $\frac{a^2}{c^2}$ fosse minore del secondo membro; sarebbe poi indifferente, se vi fosse uguaglianza tra i due membri.

CAPO IV.

MOVIMEMTO DEI FLUIDI IN GENERALE.

483. **Equazioni nel movimento dei fluidi.** I fluidi in equilibrio, siccome abbiamo detto nel capo primo, in virtù delle azioni molecolari hanno la proprietà di trasmettere ugualmente in tutti i sensi attraverso alla propria massa le pressioni applicate alla loro superficie, e di esercitare normalmente una pressione uguale in ogni verso su ciascuno elemento di superficie intorno a un punto qualunque nell'interno della massa. Questa seconda proprietà, la quale riposa essenzialmente sull'ipotesi di una fluidità o mobilità perfetta, pare che non abbia sempre luogo nei fluidi in moto: in tal caso la pressione può non essere normale all'elemento sul quale si esercita, nè riuscire uguale in tutte le direzioni intorno a un medesimo punto; per la ragione che scorrendo le molecole le une sopra le altre, sappiamo dalla esperienza che prende forza una certa coesione tra le parti del fluido e si sviluppa un certo attrito di tanto maggior grado quanto più grande è la velocità del movimento. Ciò non ostante, quando il moto dei fluidi non è assai rapido, la detta proprietà si può ammettere come esistente tuttavia nei medesimi fluidi; giacchè i risultati che si ottengono in questa ipotesi, si accordano sufficientemente con quelli che ci danno le osservazioni e le esperienze. Di tal modo come sul principio della uguaglianza

di pressione normale e di trasmissione abbiamo stabilito le equazioni di equilibrio, così sulla medesima proprietà possiamo fondare le formole del moto nei fluidi che non scorrono con velocità troppo grandi.

Le formole di cui si fa uso nel determinare il movimento di un sistema di punti nello spazio, generalmente sono quelle che servono ad esprimere le coordinate di ciascun punto in funzione del tempo: ma trattandosi di un fluido, invece di seguire nel suo corso l'andamento di ciascuna molecola per la rispettiva traiettoria o per le successive posizioni, torna più comodo di considerare un punto preso ad arbitrio nell'interno della massa fluida, e di trovar quindi le diverse quantità relative allo stato dinamico della molecola che passa per quel punto alla fine di un tempo qualunque. Le quantità da trovarsi per riguardo alla molecola che alla fine di un tempo t passa per un punto (x, y, z), sono la pressione p, la densita μ, e la velocità della stessa molecola in quel punto, o piuttosto le componenti della velocità u_1, u_2, u_3 rispettivamente parallele a tre assi rettangolari: ora per determinare queste cinque quantità e con esse il moto del fluido soggetto all'azione di qualunque forza, ci vogliono generalmente cinque distinte equazioni o relazioni tra le medesime quantità variabili. Ricerchiamo pertanto coteste equazioni o relazioni; ma nel ricercarle, dobbiamo avvertire che le quantità prenominate, cioè la pressione e la densità e le velocità componenti, si hanno a risguardare ciascuna come funzione delle quattro variabili indipendenti x, y, z, t: imperocchè egli è evidente che le dette quantità e variano insieme col punto arbitrario (x, y, z) alla fine di uno stesso tempo t, e variano pure col tempo in uno stesso punto o luogo dello spazio. Con tale avvertenza mettiamoci senz'altro alla ricerca delle equazioni accennate.

484. **Equazioni delle forze sollecitanti.** Nelle direzioni parallelle agli assi sieno X, Y, Z le componenti della forza acceleratrice, che alla fine di un tempo t agisce sulla molecola situata nel punto (x, y, z) della massa fluida. Conforme al prin-

cipio di d' Alembert, in un sistema materiale qualunque si deve ammettere l' equilibrio tra le forze realmente applicate, e le forze uguali e contrarie a quelle che produrebbero nei punti del sistema se fossero liberi, i movimenti attuali e osservati: ora facendo astrazione dalle pressioni scambievoli delle molecole e risguardando i punti della massa fluida come se fossero interamente liberi, le forze che nella direzione degli assi sono capaci di produrre in qualsivoglia molecola o punto (x, y, z) il movimento attuale e osservato, si esprimono (261) coi prodotti $\frac{1}{dt}\,du_1$, $\frac{1}{dt}\,du_2$, $\frac{1}{dt}\,du_3$ (rappresentiamo in tal guisa sotto forma di prodotti le forze mentovate, per distinguerle dalle derivate parziali $\frac{du_1}{dt}$, $\frac{du_2}{dt}$, $\frac{du_3}{dt}$ delle velocità componenti relativamente al tempo t): si dovranno dunque equilibrare tra loro le forze X, Y, Z da una parte, e all' altra le forze $-\frac{1}{dt}\,du_1$, $-\frac{1}{dt}\,du_2$, $-\frac{1}{dt}\,du_3$; ciò torna a dire che dimorerà nell' equilibrio qualsiasi molecola della massa fluida, o un punto qualunque (x, y, z) sollecitato dalle forze acceleratrici

$$X - \frac{1}{dt}\,du_1\,,\ \ Y - \frac{1}{dt}\,du_2\,,\ \ Z - \frac{1}{dt}\,du_3\,.$$

Laonde al medesimo punto o molecola potremo applicare le tre equazioni (A), che per l'equilibrio di una massa fluida si sono stabilite al numero (413); e così nel movimento della stessa massa avremo per ciascuna molecola le formole

$$\frac{dp}{dx} = \mu\left(X - \frac{1}{dt}\,du_1\right),\quad \frac{dp}{dy} = \mu\left(Y - \frac{1}{dt}\,du_2\right),$$

$$\frac{dp}{dz} = \mu\left(Z - \frac{1}{dt}\,du_3\right).$$

Ora dal numero (LXXVII) della Introduzione abbiamo che il differenziale totale della velocità componente u_1 si esprime in questo modo

$$du_1 = \frac{du_1}{dx} dx + \frac{du_1}{dy} dy + \frac{du_1}{dz} dz + \frac{du_1}{dt} dt;$$

e una tale espressione, attesi i valorori (261) degli incrementi $dx = u_1 dt$, $dy = u_2 dt$, $dz = u_3 dt$, che nel movimento della molecola considerata ricevono le tre coordinate x, y, z nel tempuscolo infinitesimo dt, si riduce evidentemente all' alira

$$du_1 = \left(u_1 \frac{du_1}{dx} + u_2 \frac{du_1}{dy} + u_3 \frac{du_1}{dz} + \frac{du_1}{dt} \right) dt:$$

di più a questa espressione sono in tutto somiglianti quelle, che si ottengono per gli altri differenziali totali du_2, du_3. Le tre equazioni del moto che abbiamo scritto di sopra, diventano dunque

$$(E). \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = \mu\left(X - u_1 \dfrac{du_1}{dx} - u_2 \dfrac{du_1}{dy} - u_3 \dfrac{du_1}{dz} - \dfrac{du_1}{dt} \right), \\[2ex] \dfrac{dp}{dy} = \mu\left(Y - u_1 \dfrac{du_2}{dx} - u_2 \dfrac{du_2}{dy} - u_3 \dfrac{du_2}{dz} - \dfrac{du_2}{dt} \right), \\[2ex] \dfrac{dp}{dz} = \mu\left(Z - u_1 \dfrac{du_3}{dx} - u_2 \dfrac{du_3}{dy} - u_3 \dfrac{du_3}{dz} - \dfrac{du_3}{dt} \right). \end{cases}$$

Queste tre formole nel movimento di una massa fluida si dicono le *equazioni delle forze sollecitanti*: la formola che viene appresso, chiamasi l' *equazione della continuità*; perchè essa non ha luogo, se non supponendo che le molecole scorrano insieme senza separarsi le une dalle altre, e che la massa fluida durante il suo moto si mantenga continua.

485. **Equazione della continuità.** Nello spazio occupato dal fluido, in un punto (x, y, z) immaginiamo un parallelepipedo infinitamente piccolo $AB = dx\,dy\,dz$ (fig. 186.ª), e supponiamolo aperto in tutte le facce parallele ai tre piani coordinati, sicchè il fluido nel suo movimento vi possa entrare ed uscirne senza veruno ostacolo: ora mentre il fluido attraversa lo spazio AB mantenendosi continuo, la sua massa subisce generalmente in quello stesso luogo ad ogni istante dt una certa variazione che si può esprimere in due modi diversi, e sono i seguenti.

La massa del fluido che si contiene nel parallelepipedo rettangolo AB, è $\mu\,dx\,dy\,dz$ alla fine di un tempo t ; alla fine del tempo $t + dt$, cangiandosi con questo la densità in uno stesso luogo, la detta massa diviene $\left(\mu + \frac{d\mu}{dt}\,dt\right)dx\,dy\,dz$: adunque la variazione che nel tempuscolo dt subisce la massa del fluido compreso nello spazio AB, si esprimerà in questo primo modo

$$(1) \qquad \frac{d\mu}{dt}\,dx\,dy\,dz\,dt\ .$$

Per trovare l'altra espressione, osserviamo che il prodotto μu_1 si può risguardare come costante insieme coi fattori μ ed u_1 in tutto il tempuscolo dt e per tutta l'estensione della faccia $dy\,dz$ più vicina al piano coordinato YOZ, e che il medesimo prodotto sulla faccia opposta e parallela per la variazione della x diviene $\mu u_1 + \frac{d(\mu u_1)}{dx}\,dx$. Ciò osservato, è chiaro che ciascuna delle molecole poste sulla faccia $dy\,dz$ descrive nell'istante dt lo spazio infinitesimo $u_1 dt$, e però di tanto si troverà spostato verso l'interno dello spazio AB lo strato fluido che costituiva alla fine del tempo t la stessa faccia $dy\,dz$· quindi è che nel tempuscolo dt s'introduce per questa faccia nel parallelepipedo AB la massa fluida $\mu u_1 dt\,dy\,dz$, e ne esce tutt'insieme per la faccia opposta un'altra massa $\left[\mu u_1 + \frac{d(\mu u_1)}{dx}\,dx\right]dt\,dy\,dz$; e così l'eccesso

della quantità di fluido che entra nel parallelepipedo sopra quella che ne esce nella direzione dell'asse OX, si avrà dal prodotto

$$-\frac{d(\mu u_1)}{dx}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Similmente gli eccessi delle quantità di massa che s'introducono per le faccie $dx\,dz$, $dx\,dy$ sopra quelle che escono per le faccie parallele durante il tempuscolo dt nella direzione degli altri assi OY e OZ, saranno dati rispettivamente dai due prodotti

$$-\frac{d(\mu u_2)}{dy}\,dx\,dy\,dz\,dt\,,\quad -\frac{d(\mu u_3)}{dz}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Se adesso si sommano insieme tra loro i tre eccessi o prodotti trovati, risulterà

$$(2)\qquad -\left[\frac{d(\mu u_1)}{dx}+\frac{d(\mu u_2)}{dy}+\frac{d(\mu u_3)}{dz}\right]dx\,dy\,dz\,dt\,;$$

e sarà questo il secondo modo, onde si esprime la variazione che avviene nell'intervallo infinitesimo dt alla massa del fluido contenuto nello spazio AB. Uguagliando tra loro le due espressioni (1) e (2), e dividendole quindi per $dx\,dy\,dz\,dt$, otterremo

$$(E')\qquad \frac{d\mu}{dt}+\frac{d(\mu u_1)}{dx}+\frac{d(\mu u_2)}{dy}+\frac{d(\mu u_3)}{dz}=0\,;$$

la quale è appunto l'equazione della continuità, ed è la quarta di quelle che servono a determinare il moto dei fluidi.

486. **Equazione relativa alla natura del fluido.** Rimane ancora a trovare nel movimento dei fluidi una quinta equazione, la quale ci verrà data dalla diversa natura dei fluidi stessi. Pertanto 1°. se il fluido è elastico e compressibile, come l'aria e i gas, avremo tra la pressione e la densità la relazione già notata altrove (446)

$$(E'') \qquad p = k\mu,$$

dove il coefficiente k non dipende che dalla temperatura della massa fluida ed elastica: con questa equazione (E''), e colle altre quattro (E) ed (E') si determinano tutte e cinque le quantità p, μ, u_1, u_2, u_3 in funzione delle variabili x, y, z, t nel caso di un fluido elastico qualunque.

2°. Se poi il fluido è incompressibile come i liquidi, ma omogeneo in tutta la sua massa; allora la densità μ è costante, e si annulla la derivata parziale $\frac{d\mu}{dt}$: onde in tal caso l'equazione della continuità (E') si ridurrà nel primo membro a tre soli termini, e toltone quindi il fattore costante e comune μ, diverrà semplicemente

$$(E''') \qquad \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dy} + \frac{du_3}{dz} = 0 .$$

In questo medesimo caso non si hanno a determinare che le quattro funzioni p, u_1, u_2, u_3; e a tale effetto bastano le quattro equazioni (E) ed (E''').

3°. Finalmente trattandosi di un fluido incompressibile ma eterogeneo, si rifletta che quantunque la densità del liquido sia differente nelle diverse molecole, nondimeno essa si conserva costante ed invariabile in ciascuna molecola per tutto il corso del movimento : la quantità μ si deve dunque considerare come una funzione delle quattro variabili x, y, z, t; ma nel medesimo tempo si deve questa funzione fare uguale per ciascuna molecola a una costante C, la quale cangerà poi di valore nel passare da una malecola all'altra. Adunque potremo scrivere l'equazione

$$\mu = f(x, y, z, t) = C:$$

quindi differenziando questa stessa equazione, e sostituendo ai

differenziali dx, dy, dz i valori corrispondenti al movimento di una medesima molecola, cioè (261) u_1dt, u_2dt, u_3dt; otterremo (LXXVI)

$$d\mu = \frac{d\mu}{dx} u_1dt + \frac{d\mu}{dy} u_2dt + \frac{d\mu}{dz} u_3dt + \frac{d\mu}{dt} dt = 0,$$

ossia

$$\text{(E'')} \qquad \frac{d\mu}{dt} + u_1\frac{d\mu}{dx} + u_2\frac{d\mu}{dy} + u_3\frac{d\mu}{dz} = 0.$$

Il primo membro di questa equazione non è che una parte della equazione (E') sviluppata; l' altra parte di questa ultima consiste poi nel prodotto $\mu\left(\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dy} + \frac{du_3}{dz}\right)$: sarà dunque uguale a zero anche il trinomio $\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dy} + \frac{du_3}{dz}$; cioè l'equazione (E''') sussisterà pure nel caso di un liquido eterogeneo, e servirà a determinarne il movimento insieme colle altre quattro (E) ed (E'').

Avvertiamo qui in ultimo che quando si sieno avute le velocità componenti u_1, u_2, u_3 per mezzo delle variabili indipendenti x, y, z, t relativamente a una molecola qualunque che passa per un punto (x, y, z) preso ad arbitrio nello spazio occupato dalla massa fluida, si potranno poi anche avere nel movimento della stessa molecola le tre coordinate x, y, z in funzione del tempo t mediante le formole

$$u_1 = \frac{dx}{dt}, \quad u_2 = \frac{dy}{dt}, \quad u_3 = \frac{dz}{dt}.$$

487. **Condizioni relative alle superficie che sono in contatto col fluido.** Le equazioni che abbiamo ottenuto, sono sufficienti a determinare il movimento di un fluido, se questo è indefinito e si conoscano le quantità p, μ, u_1, u_2, u_3 relative

al suo stato iniziale. Ma se il fluido è terminato da qualche parte, allora per le molecole situate alla sua superficie hanno luogo delle condizioni particolari, le quali insieme con quelle dello stato iniziale servono alla determinazione delle funzioni arbitrarie che s' incontrano nell' integrare le equazioni differenziali del moto. D' ordinario si suppone che le molecole che si trovano in contatto con una parete, fissa o mobile, vi restino indefinitamente; e di più che le molecole spettanti alla superficie libera del fluido, non se ne partano durante il moto, ma seguitino a far parte della medesima superficie: cerchiamo in queste due ipotesi le equazioni relative ai limiti, dai quali è circoscritto il fluido nel suo corso.

1°. Quanto alla superficie sulla quale deve sempre dimorare una molecola o un punto (x, y, z) del fluido, e che generalmente è variabile col tempo, sia $F(x, y, z, t)=0$ la sua equazione. Crescendo il tempo t della quantità infinitesima dt, le coordinate della molecola fluida divengono $x+u_1dt$, $y+u_2dt$, $z+u_3dt$; e dopo queste variazioni debbono tuttavia soddisfare all'equazione della superficie, sulla quale rimane per ipotesi la stessa molecola: dunque alla fine del tempo $t+dt$ si avrà

$$F(x+u_1dt,\ y+u_2dt,\ z+u_3dt,\ t+dt)=0.$$

La differenza tra i primi membri di questa equazione e dell'equazione primitiva non è altro (XLIV) che il differenziale totale della funzione F: sottraendo dunque dalla seconda la prima equazione otterremo (LXXVI) dopo di aver tolto il fattore comune dt la seguente condizione

$$\frac{dF}{dt}+u_1\frac{dF}{dx}+u_2\frac{dF}{dy}+u_3\frac{dF}{dz}=0.$$

Se la superficie è una pareto fissa, la funzione F sarà indipendente dal tempo o dalla variabile t: quindi essendo allora $\frac{dF}{dt}=0$,

si avrà semplicemente

$$u_1 \frac{dF}{dx} + u_2 \frac{dF}{dy} + u_3 \frac{dF}{dz} = 0;$$

e ciò vuol dire che la velocità della molecola è diretta in ciascun istante secondo una tangente della superficie fissa.

2°. Quanto alla superficie libera di un fluido o di un liquido in moto, ordinariamente essa è sottoposta a una data pressione esteriore P, uguale in tutti i suoi punti e indipendente dalle coordinate di questi, ma che può nondimeno variare col tempo: quindi per una tal superficie sussisterà l'equazione $p - P = 0$; e da questa equazione ossia dalla equazione $p = P$, pei punti liquidi che si trovano e debbono restare alla superficie, si ricava come nel primo caso la condizione

$$\frac{dp}{dt} + u_1 \frac{dp}{dx} + u_2 \frac{dp}{dy} + u_3 \frac{dp}{dz} = \frac{dP}{dt}.$$

188. **Riduzione delle equazioni del moto dei fluidi in un caso particolare.** Le equazioni del moto dei fluidi possono ridursi a un minor numero e a forma più semplice, quando rispetto alle tre coordinate le velocità e le forze componenti sieno le derivate parziali, le prime di una funzione φ delle variabili x, y, z, t, e le seconde di un'altra funzione Φ; ossia quando rimanendo costante il tempo, i due trinomii $u_1dx + u_2dy + u_3dz$, $Xdx + Ydy + Zdz$ sono per rispetto ad x, y, z i differenziali esatti delle due rispettive funzioni φ, Φ. Di fatti in tal caso essendo

$$u_1 = \frac{d\varphi}{dx}, \quad u_2 = \frac{d\varphi}{dy}, \quad u_3 = \frac{d\varphi}{dz},$$

$$X = \frac{d\Phi}{dx}, \quad Y = \frac{d\Phi}{dy}, \quad Z = \frac{d\Phi}{dz};$$

le tre equazioni (E. 484) delle forze sollecitanti si potranno scrivere nel modo seguente:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}=\frac{d\Phi}{dx}-\frac{d^2\varphi}{dxdt}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dxdy}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dxdz},$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dy}=\frac{d\Phi}{dy}-\frac{d^2\varphi}{dydt}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dxdy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dydz},$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}=\frac{d\Phi}{dz}-\frac{d^2\varphi}{dzdt}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dxdz}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dydz}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per dx, dy, dz e sommandole insieme, si ottiene (LXXVI) una sola formola equivalente

$$(E^{v})\qquad \frac{dp}{\mu}=d\Phi-d\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right];$$

nella quale i differenziali debbono essere presi per rispetto alle variabili x, y, z, e la quantità t deve considerarsi come costante. In questa stessa ipotesi in cui siamo, l'equazione della continuità, ossia l'equazione (E′) del numero (485), si riduce immediatamente alla forma

$$(E^{vi})\qquad \frac{d\mu}{dt}+\frac{d\left(\mu\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\mu\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\mu\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}=0.$$

489. E qui vogliamo considerare due casi speciali, quello di un liquido omogeneo, e l'altro di un fluido elastico di temperatura costante. 1°. Se il fluido è un liquido omogeneo, la densità μ avrà un valore costante, e sarà nulla la derivata $\frac{d\mu}{dt}$: quindi l'equazione (E^{v}) si potrà integrare per rispetto alle variabil

x, y, z, e l'equazione (E^{VI}) si ridurrà a tre soli termini senza il fattore μ; e così per un tal liquido l'equazione delle forze sollecitanti e quella della continuità saranno rispettivamente le due formole

$$\frac{p}{\mu}=\Phi-\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0\,.$$

Da questa ultima equazione, integrando e determinando le funzioni arbitrarie, conosceremo il valore di φ in funzione delle coordinate x, y, z; conosciuta una volta la funzione φ, i suoi differenziali parziali ci daranno le tre velocità componenti u_1, u_2, u_3; e la pressione p si troverà mediante la penultima equazione, nella quale non abbiamo aggiunto alcuna costante per la ragione che questa dovrebbe essere una funzione arbitraria del tempo e si può risguardare come già contenuta nella stessa funzione φ.

2°. Se il fluido è elastico e la sua temperatura rimane costante, dal numero (446) si ha $p=k\mu$; sarà dunque μ una funzione di p, ed uguale precisamente al rappporto $\frac{p}{k}$. Colla sostituzione di questo valore il primo membro dell' equazione (E^{V}), diviene $k\,\frac{dp}{p}$, e per tal modo la medesima si può integrare rispetto alle variabili x, y, z: è poi evidente che l'integrale consiste nella formola

$$k\log(p)=\Phi-\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],$$

dalla quale si può ricavare il valore della pressione p in funzione di φ. Un tale valore, sostituito che sia nella equazione della continuità che è la stessa (E^{VI}), ci darà una nuova formola

per determinare la funzione φ, e conseguentemente le tre velocità componenti u_1, u_2, u_3.

490. Le formole di questi ultimi numeri si applicano al caso in cui i due trinomii $Xdx+Ydy+Zdz$, $u_1dx+u_2dy+u_3dz$ sieno i differenziali esatti delle rispettive funzioni Φ , φ. Ora trattandosi di quelle forze che operano spontaneamente in natura, il primo trinomio è sempre un differenziale esatto di una funzione delle variabili x, y, z, come abbiamo già dimostrato nei numeri (230.231). Quanto al secondo trinomio, Lagrange ci ha lasciato un criterio per riconoscerne l' integrabilità, ed è il seguente: *se il trimonio $u_1dx+u_2dy+u_3dz$ si trovi essere un differenziale esatto a qualche istante del movimento di un fluido, si conchiude che esso tale è stato sempre per l' innanzi e tale si manterrà pure per tutto il tempo del moto.*

Per acquistare la certezza di questa proposizione, supponiamo pertanto che allo spirare di un certo tempo t il trinomio $u_1dx+u_2dy+u_3dz$ sia il differenziale esatto della funzione φ relativamente alle coordinate x, y, z; e proviamo come lo stesso trinomio sia stato tale un istante prima e lo sia anche un istante dopo, cioè alla fine del tempo $t\mp dt$. Essendo per ipotesi u_1, u_2, u_3 le derivate parziali di φ rispetto ad x, y, z alla fine del dato tempo t, le equazioni (E.484) divise ciascuna per μ divengono a questa epoca

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}=X-\frac{du_1}{dt}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dxdy}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dxdz}\ ,$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dy}=Y-\frac{du_2}{dt}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dxdy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dy^2}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dydz}\ ,$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}=Z-\frac{du_3}{dt}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dxdz}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d^2\varphi}{dydz}-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dz^2}\ :$$

moltiplicandole rispettivamente per dx, dy, dz, e intendendo che i differenziali delle funzioni sieno presi per rispetto alle variabili

x, y, z, dalla somma delle medesime equazioni risulterà (LXXVI la formola

$$\frac{dp}{\mu}=(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)-\left(\frac{du_1}{dt}dx+\frac{du_2}{dt}dy+\frac{du_3}{dt}dz\right)$$

$$-\frac{1}{2}d\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right].$$

Ora in questa formola il primo membro è un differenziale esatto nel caso dei liquidi omogenei, o dei fluidi elastici a temperatura invariabile, dove la densità μ è costante o funzione di p; differenziali esatti sono pure nel secondo membro il primo e il terzo trinomio: dunque deve essere esatto anche il trimonio differenziale

$$\frac{du_1}{dt}dx+\frac{du_2}{dt}dy+\frac{du_3}{dt}dz\,.$$

Ciò posto, nel trinomio $u_1dx+u_2dy+u_3dz$, dove i primi fattori dei singoli termini sono funzione delle coordinate e del tempo, supponiamo che subisca una variazione infinitesima la sola quantità t: di tal modo quel trinomio alla fine del tempo $t\mp dt$ sarà stato o diventerà

$$\left(u_1\mp\frac{du_1}{dt}dt\right)dx+\left(u_2\mp\frac{du_2}{dt}dt\right)dy+\left(u_3\mp\frac{du_3}{dt}dt\right)dz$$

$$=u_1dx+u_2dx+u_3dz\mp\left(\frac{du_1}{dt}dx+\frac{du_2}{dt}dy+\frac{du_3}{dt}dz\right)dt\,.$$

Laonde il trinomio che stiamo considerando, un istante prima o dopo il tempo t si compone di due parti; l'una di queste parti è la stessa espressione del trinomio corrispondente al tempo t, ed è integrabile per ipotesi, l' altra è pure integrabile perchè

risulta dal prodotto della quantità costante dt pel trinomio differenziale che poc' anzi abbiamo dimostrato essere esatto: dunque se il trinomio $u_1dx+u_2dy+u_3dz$ è un differenziale esatto alla fine di un tempo t, sarà pure esatto e integrabile un istante dopo o prima di quel tempo. Così trascorrendo successivamente da un istante all' altro del tempo passato o avvenire, e applicandovi la stessa dimostrazione, si conchiuderà che nella detta ipotesi il trinomio è sempre un differenziale esatto.

491. Quinci si deduce che se al principio del moto le velocità componenti u_1, u_2, u_3 sono nulle o costanti in tutti i punti del fluido, il trinomio $u_1dx+u_2dy+u_3dz$ si dovrà risguardare come un differenziale esatto e integrabile a qualunque epoca del movimento; giacchè in tal caso sarebbe un differenziale esatto allo stesso cominciare del moto, e il suo integrale consisterebbe in una funzione arbitraria del tempo, ovvero in una funzione del tempo e delle coordinate.

Dobbiamo però notare che nel movimento dei fluidi l'integrazione delle formole si può talvolta effettuare, quantunque il trinomio $u_1dx+u_2dy+u_3dz$ non sia un differenziale esatto: dichiariamo la cosa con un esempio. Poniamo che un liquido pesante e omogeneo giri equabilmente intorno a un asse verticale OZ, senza che si cangi la posizione relativa delle sue molecole. Chiamiamo ω la velocità angolare costante, e prendiamo l'asse di rotazione per quello dello z: le velocità componenti di ciascuna molecola saranno (419) le seguenti

$$u_1=\frac{dx}{dt}=-y\omega\ ,\ u_2=\frac{dy}{dt}=x\omega\ ,\ u_3=\frac{dz}{dt}=0\ ;$$

e quindi si avrà pel nostro trinomio l'espressione

$$u_1dx+u_2dy+u_3dz=\omega(x\,dy-y\,dx)$$

che non è certamente un differenziale esatto, mancandovi il fat-

tore $\frac{1}{x^2}$. Ciò non ostante, si potranno ottenere in questo caso coll'integrazione gli elementi del moto. Infatti oltre ai valori già notati, avendosi anche o ricavandosene gli altri

$$X=0\,,\ Y=0\,,\ Z=g\,,$$

$$\frac{du_1}{dt}=0,\ \frac{du_2}{dt}=0,\ \frac{du_3}{dt}=0,\ \frac{du_1}{dx}=0,\ \frac{du_2}{dx}=\omega\,,$$

$$\frac{du_3}{dx}=0,\ \frac{du_1}{dy}=-\omega,\ \frac{du_2}{dy}=0,\ \frac{du_3}{dy}=0,\ \frac{du_1}{dz}=0\,,$$

$$\frac{du_2}{dz}=0,\ \frac{du_3}{dz}=0\,;$$

la tre equazioni (E) del numero (484) diverranno

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}=x\omega^2\,,\ \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dy}=y\omega^2\,,\ \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}=g,$$

e si comporranno quindi nell'unico differenziale totale

$$dp=\mu\omega^2(x\,dx+y\,dy)+\mu g\,dz\ ,$$

che ha per integrale l'espressione $p=\frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2+y^2)+\mu g z+C.$

492. **Equazioni nel moto lineare dei liquidi.** Chiamiamo *lineare* il moto dei liquidi, quando le molecole ond' è formato ciascuno degli strati sottilissimi dei medesimi liquidi, procedono nel loro corso con velocità prossimamente uguali tra loro e parallele a una data linea, che si appella *direttrice* ed è normale ai detti strati. Prendiamo a considerare un liquido pesante ed omogeneo, e supponiamo che la linea direttrice del movimento sia una retta verticale, sicchè le molecole di ciascuna sezione orizzontale discendano vertical-

mente con una velocità comune: in questo caso che unicamente vogliamo trattare, per determinare il movimento del liquido non si hanno a trovare che la pressione p, e la velocità verticale u, che alla fine di un tempo t hanno luogo in una molecola sollecitata dalla forza di gravità presso un punto (x, y, z) della massa totale.

493. Prendendo l' asse della z nella direzione stessa della gravità, nelle formole generali (E) che si sono stabilite nel numero (484) per la considerazione delle forze sollecitanti, dovremo fare $X = 0$, $Y = 0$, $Z = g$, ed $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = u$: onde la prima e la seconda di quelle formole divengono

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \frac{dp}{dy} = 0:$$

la terza poi si trasmuta nella equazione seguente

$$\frac{dp}{dz} = \mu\left(g - u\,\frac{du}{dz} - \frac{du}{dt}\right). \qquad (1)$$

Di queste tre equazioni la prima e la seconda ci mostrano che si esercita una stessa pressione in qualunque punto (x, y) di una medesima sezione orizzontale, la quale sia posta a una data distanza z dalla origine delle coordinate; e la terza alla fine di un tempo t, e alla distanza z, ci dà in funzione della velocità u la stessa pressione delle singole molecole nella detta sezione orizzontale.

Ora la velocità u si può determinare facilmente per la legge della continuità. A questo effetto nella fine del tempo t sia v la velocità del liquido che trovasi sopra una sezione ω stabile e conosciuta, ed α sia l' area della sezione posta alla distanza z dall' origine delle coordinate: i volumi o le quantità di liquido che passano per le due sezioni orizzontali nel tempuscolo infinitesimo dt, si esprimono rispettivamente coi prodotti $\omega v\, dt$ e $\alpha u\, dt$;

per la ragione che quelle quantità di liquido si possano risguardare come due prismi che hanno per basi ω ed α, e per altezze gli spazii infinitamente piccoli $v\,dt$ e $u\,dt$. Laonde nella supposizione che il liquido sia continuo, dovendo le due quantità prenominate essere uguali tra loro, si avrà l'altra equazione del moto

$$(2) \qquad u = \frac{\omega}{\alpha} v.$$

494. Nelle due equazioni (1) e (2), le velocità u e v si riferiscono a un medesimo valore del tempo t: per tempi diversi la velocità v è funzione della sola variabile t, la sezione α dipende dalla quantità z ed è funzione della medesima, e la velocità u è funzione insieme delle due variabili t, z. Onde se nella espressione della quantità u si fa variare la sola t, si avranno le velocità dei successivi strati liquidi per quell' istante di tempo che passano per una stessa sezione: se poi si fa variare la sola z, risulteranno le velocità dei differenti strati per uno stesso momento di tempo: finalmente se variano insieme le due quantità t e z, si otterrà la velocità di uno strato liquido che in diversi tempi passa per diverse sezioni orizzontali.

Ciò posto, la pressione p che si esercita presso i punti della sezione α situata a una distanza z, si può esprimere per la velocità v che ha luogo nei punti della sezione fissa ω, e che dipende solo dal tempo: a questo fine basta che dalla formola (1) del numero precedente si elimini per mezzo della formola (2) la funzione u delle due variabili t, z. Ora poichè dalla formola (2) procedono le derivate parziali

$$\frac{du}{dz} = -\frac{\omega v}{\alpha^2}\frac{d\alpha}{dz}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\omega}{\alpha}\frac{dv}{dt};$$

l' altra formola (1), mediante la sostituzione di questi valori [e dello stesso valore u, si ridurrà all' equazione

$$\frac{dp}{dz}=\mu\left(g+\frac{\omega^2 v^2}{\alpha^3}\frac{d\alpha}{dz}-\frac{\omega}{\alpha}\frac{dv}{dt}\right):$$

moltiplicando prima per dz, e prendendo dipoi gli integrali per rispetto a z, otterremo nel caso che si considera le due equazioni del moto

$$(E^{VII}) \qquad p=\mu\left(gz-\frac{\omega^2 v^2}{2\alpha^2}-\omega\frac{dv}{dt}\int\frac{dz}{\alpha}\right)+C,\ u=\frac{\omega}{\alpha}v\ .$$

In queste formole C dinota una quantità arbitraria, che non dipende dalla z, ma che può essere funzione del tempo t: quanto all'espressione integrale $\int\frac{dz}{\alpha}$, essa deve essere presa tra certi limiti definiti, come vedremo in un caso più particolare nel capo seguente, e la si può sempre determinare, essendo α una funzione data della variabile z.

Aggiungiamo qui in fine del capo due problemi, i quali si riferiscono alla pressione esercitata dai fluidi in movimento contro le superficie dei solidi.

495. **Problema** I. *Un tronco di cono retto si trova immerso in un fluido, il quale si muove uniformemente nella direzione dell' asse del medesimo cono: conoscendosi l'altezza e la base maggiore del tronco, si determini il vertice del cono a cui deve appartenere lo stesso tronco, affinchè la pressione esercitata dal fluido sopra la base minore e sopra la superficie convessa del tronco, nel senso dell' asse, sia la più piccola possibile.*

Nel moto relativo di un fluido e di un solido si ammette d'ordinario in seguito di molte esperienze, che la pressione esercitata normalmente sopra ciascuno elemento della superficie percossa dal fluido, è uguale a questo stesso elemento, moltiplicato per una costante k, per la densità del fluido, e per il quadrato della velocità relativa stimata secondo una retta normale all' elemento.

Applicando questa legge alla soluzione del problema proposto, chiamiamo v la velocità relativa del fluido, μ la sua densità, k

l'altezza data del tronco di cono, a il raggio della base maggiore, b quello della minor base, ed α l'angolo delle rette generatrici coll'asse del cono. La pressione che si esercita sopra la base minore, viene espressa dal prodotto

$$k \mu v^2 . \pi b^2$$

Di più essendo $v \operatorname{sen} \alpha$ la velocità del fluido stimata secondo una retta perpendicolare a ciascun elemento della superficie convessa, la pressione esercitata normalmente su di questa si rappresenterà col prodotto dell'area della superficie medesima per la quantità $k\mu v^2 \operatorname{sen}^2\alpha$; e quindi la pressione componente, parallela all'asse del cono, sarà evidentemente uguale al prodotto di $k\mu v^2 \operatorname{sen}^2\alpha$ per la proiezione della superficie curva del tronco sopra la sua base maggiore, cioè la pressione contro la superficie convessa del tronco di cono nel senso dell'asse avrà per valore

$$k \mu v^2 \operatorname{sen}^2\alpha . \ \pi (a^2 - b^2) .$$

La somma delle due pressioni trovate consiste nella espressione

$$k\mu v^2 \pi [a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)] = k\mu v^2 \pi (a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) ,$$

e per i diversi valori dell'angolo α diviene minima insieme col fattore $a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2\alpha$ Ora se si chiami c la differenza tra i raggi delle due basi, e dal centro della base minore s'immagini condotta alla base maggiore una retta parallela a un lato del cono, si hanno le due relazioni $b = a - c$, $\operatorname{tang}\alpha = \frac{c}{h}$: dalla prima di queste relazioni si deduce il valore $b \cos \alpha = a \cos \alpha - c \cos \alpha$, che per ragione della seconda diviene $b \cos \alpha = a \cos \alpha - h \operatorname{sen} \alpha$; e quindi il fattore che deve prendere un minimo valore nelle variazioni dell'angolo α, si trasforma nel trinomio

$$a^2 - 2ah \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + h^2 \operatorname{sen}^2 \alpha .$$

Facendo la derivazione rispetto alla variabile α, e uguagliando a zero (LXX) il risultato, otteniamo successivamente

$$2ah \operatorname{sen}^2 \alpha - 2ah \cos^2 \alpha + 2h^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0 ,$$

$$a - a \operatorname{cotg}^2 \alpha + h \operatorname{cotg} \alpha = 0 , \operatorname{cotg}^2 \alpha - \frac{h}{a} \operatorname{cotg} \alpha - 1 = 0 ;$$

onde il valore di α, che rende minimo il fattore sopraddetto e la pressione considerata nel problema, si ricaverà dalla equazione

$$a \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{2} h + \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} h^2}.$$

Questa equazione ci dimostra che all' effetto richiesto nel problema il vertice del cono retto e il contorno della base maggiore del suo tronco devono trovarsi a uguale distanza dal punto di mezzo della retta h, la quale unisce i centri delle due basi: la ragione è chiara; perchè il prodotto $a \operatorname{cotg} \alpha$ rappresenta l' asse dell' intero cono, il binomio $a \operatorname{cotg} \alpha - \frac{1}{2} h$ esprime la distanza del vertice dal punto di mezzo della retta h, e il radicale equivalente $\sqrt{a^2 + \frac{1}{4} h^2}$ ci dà la distanza del contorno della base dal medesimo punto di mezzo della retta h.

496. **Problema** II. *Determinare la forza di attrito in un liquido pesante, il quale scorra per un lungo tubo un poco inclinato all' orizzonte.*

Quando il movimento del liquido è divenuto permanente, mostra l' esperienza che ciascuna molecola in tutto il suo corso si muove con una velocità costante; ma sono diverse tra loro le velocità delle diverse molecole, movendosi queste tanto più rapidamente, quanto sono più discoste dalle pareti del tubo e più vicine all' asse: di che la colonna liquida si può risguardare

come formata di strati concentrici, che scorrono gli uni sugli altri con velocità tanto minori, quanto maggiori sono i loro raggi.

Ciò posto, supponiamo che il tubo abbia da per tutto una medesima sezione trasversale ω, e rappresentiamo con α l'inclinazione del suo asse sulla verticale: considerando una porzione l di quest' asse, chiamiamo z_0 e z_1 le distanze delle due estremità della medesima porzione da un piano orizzontale, p_0 e p_1 le pressioni medie sulla unità di superficie nelle due basi ω del cilindro liquido che ha la stessa l per altezza, μ la densità del liquido, ed F una forza applicata al detto cilindro nel senso opposto del suo movimento ed equivalente a tutto l'attrito che si sviluppa tra le sue molecole. Essendo queste animate ciascuna da un movimento uniforme, è chiaro che devono equilibrarsi tra loro le forze che agiscono sopra ciascuna di esse, e per conseguenza anche le forze applicate al cilindro ωl: ora le forze applicate a questo cilindro e dirette verso il suo centro, sono le pressioni sulle basi opposte $p_0\omega$, $-p_1\omega$, l'attrito $-$ F, e il peso $\mu g\omega l$; deve dunque sussistere l' equilibrio tre queste quattro forze. Il quale equilibrio ricercando per condizione che si annulli la somma delle proiezioni di tutte le forze sull' asse del tubo, avremo

$$p_0\omega - p_1\omega + \mu g\omega l \cos\alpha - \mathrm{F} = 0 \; ;$$

e quindi atteso il valore $l\cos\alpha = z_0 - z_1$, avremo anche il valore cercato della forza

$$\mathrm{F} = \omega(p_0 - p_1) + \mu g\omega(z_0 - z_1) \, .$$

CAPO V.

EFFLUSSO DEI LIQUIDI PER PICCOLI ORIFIZI APERTI NEI VASI.

497. In questo capo diremo del movimento e del flusso dei liquidi a traverso i piccoli orifizii aperti nelle pareti dei vasi che li contengono: prima considereremo ciò che avviene nei vasi verticali, che hanno una forma di prisma retto ovvero di cilindro; poi aggiungeremo alcnna cosa circa i vasi che hanno una forma qualunque. Gli orifizi li supponiamo piccoli, e s' intende che la loro piccolezza vuole essere stimata tale per rispetto al le sezioni corrispondenti del vaso: di più li supponiamo aperti in una parete sottile e diremmo quasi in una superficie geometrica, per la ragione che ne daremo a suo luogo. Ciò posto, ecco due principii fondamentali dimostrati certi da ripetute esperienze, e ammessi da tutti gl' Idraulici come punti di partenza.

1°. Mentre il liquido che supporremo esser l'acqua, esce da una luce, o da un piccolo orifizio aperto in lastra sottile nel fondo o nella parete laterale di un vaso verticale cilindrico o prismatico, e il suo flusso è divenuto regolare, la superficie superiore di esso liquido e gli altri strati paralleli si abbassano verticalmente e si conservano orizzontali, rimanendo costantemente le molecole nello strato in cui erano da principio, fino a una distanza dall' orifizio uguale a tre volte il raggio dell'apertura di questo: a partire da tal punto, le molecole liquide che compongono uno qualunque di quei strati, non discendono più verticalmente, ma piegano verso l' orifizio e vengono a formare una conoide. Quando l' orifizio è piccolo, questa conoide d'acqua è tanto poca cosa che si può trascurare. L' esperienza si fa, gettando nel vaso dei minuzzoli un poco più pesanti dell' acqua, ovvero soprapponendo all'acqua uno strato d' olio e di altro liquido colorato più leggiero dell' acqua: quei minuzzoli e questo strato si veggono prima discendere verticalmente con velocità comune alle diverse

particelle, e quindi all' indicata distanza di tre raggi dal foro sì i minuzzoli come il liquido colorato si veggono piegare il corso e attraverso l' acqua convergere nel modo anzidetto verso l' orifizio.

2°. Un zampillo sottile d' acqua che sgorgando da una luce assai piccola sale in alto verticalmente, giugne presso che alla superficie dell'acqua premente nel vaso: la piccola differenza è dovuta all'attrito che il getto soffre all'orlo dell'orifizio, alla resistenza dell' aria, e all' impedimento che incontrano le goccie ascendenti dalla parte di quelle che ricadono. Pertanto chiamando v la velocità che ha l' acqua all' orifizio, e z l'altezza del carico d' acqua computata dall' orifizio, si avrà la relazione (272) $z=\frac{v^2}{2g}$, ossia

$$(H) \qquad v=\sqrt{2gz}:$$

ciò vuol dire che la velocità di una vena liquida che esce da un piccolo orifizio, è costantemente quella che è dovuta (271) all' altezza dell'acqua soprastante. Questo risultato è conosciuto sotto il nome di *principio di Torricelli*, e suppone che il liquido sia soggetto a una medesima pressione esterna nel livello superiore e all' orifizio.

Ammessi questi due principii sperimentali e indubitati, veniamo adesso a determinare i diversi elementi del flusso dei liquidi per i piccoli orifizi aperti nei vasi cilindrici o prismatici che abbiamo detto.

498. **Espressione del tempo, nel quale un vaso si vuota in parte o in tutto.** Rappresentiamo con z_0 l' altezza iniziale dell' acqua contenuta in un vaso prismatico o cilindrico al di sopra dell' orifizio che supponiamo aperto nel fondo del vaso, con z l' altezza a cui è discesa l' acqua alla fine di un tempo t, e con v la velocità della vena che corrisponde all' altezza z. Poichè la velocità v si può considerare come costante per un tempuscolo infinitesimo, lo spazio percorso verticalmente dalle mole-

cole liquide nel tempo dt si potrà esprimere (9) con $v\,dt$, ossia (497.H) con $\sqrt{2gz}\,dt$: conseguentemente dinotando con ω l'area dell'orifizio, il volume o la quantità d'acqua che esce dall orifizio nell'intervallo dt, si esprimerà con

$$(H') \qquad \omega\sqrt{2gz}\,dt\,.$$

Ma è manifesto che dentro lo stesso intervallo di tempo, l'altezza dell'acqua che è nel vaso, subisce una diminuzione dz; perciò chiamando α la base orizzontale o il fondo del vaso, il volume o la quantità d'acqua della quale si vuota il vaso, si rappresenta (497.1°.) con $-\alpha dz$: dunque tra i due volumi che sono uguali, sussisterà l'equazione

$$\omega\sqrt{2gz}\,dt = -\,\alpha\,dz\,;$$

dalla quale, notando brevemente con n il rapporto tra l'area del fondo e quella dell'orifizio, si deduce

$$dt = -\,\frac{n}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Integrando qnesta equazione, otteniamo (LXXXVII)

$$t = -\,\frac{2n}{\sqrt{2g}}\,z^{\frac{1}{2}} + C\,:$$

e siccome per $t=0$ si ha $z=z_0$, perciò il valore della costante è

$$C = \frac{2n}{\sqrt{2g}}\,z_0^{\frac{1}{2}}\,;$$

e per sostituzione si trova che il valore del tempo impiegato dal-

l'acqua per discendere a una determinata altezza z, è dato dalla formola

$$(H'') \qquad t=\frac{2n}{\sqrt{2g}}\left(z_0^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}\right).$$

Per determinare adesso il valore del tempo θ in cui il vaso si vuota interamente, facciamo $z=0$; avremo

$$(H''') \qquad \theta=\frac{2n}{\sqrt{2g}}\,z_0^{\frac{1}{2}}:$$

sostituendo poi θ a questo valore nella formola (H''), otterremo pel caso precedente un'altra espressione del tempo t, che è

$$(H^{IV}) \qquad t=\theta-\frac{2n}{\sqrt{2g}}\,z^{\frac{1}{2}}.$$

499. **Rapporto dei tempi, nei quali si vuotano due vasi di altezze ed orifizii uguali.** Sieno z_0, z'_0 le altezze iniziali dell'acqua contenuta in due vasi prismatici e verticali: quanto al secondo vaso rappresentando con α', θ', n', ω' quelle medesime quantità che con α, θ, n, ω abbiamo rappresentato in ordine al primo, in forza della formola(H''') del numero precedente varrà la proporzione

$$\theta:\theta'=nz_0^{\frac{1}{2}}:n'z_0'^{\frac{1}{2}}=\frac{\alpha}{\omega}z_0^{\frac{1}{2}}:\frac{\alpha'}{\omega'}z_0'^{\frac{1}{2}}.$$

Facendo dunque $z_0=z'_0$ ed $\omega=\omega'$, avremo $\theta:\theta'=\alpha\cdot\alpha'$; ciò vuol dire che *i tempi richiesti a vuotarsi due vasi che abbiano uguale altezza d'acqua e uguale apertura di orifizio, sono tra loro come i fondi dei vasi.*

500. **Quantità di acqua che esce in un dato tempo.** Rappresentiamo con β il volume, o la quantità d'acqua che sgorga

da un piccolo orifizio nel tempo t: ritenute le stesse denominazioni che abbiamo adoperato nel numero (498), il volume d' acqua che esce nel tempuscolo infinitesimo dt, si esprime (498.H') con

$$d\beta = \omega \sqrt{2g} z^{\frac{1}{2}} dt.$$

Ma dalla formola (H'') ri ricava

$$z^{\frac{1}{2}} = z_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2g}}{2n} t\,;$$

dunque sostituendo si ottiene

$$d\beta = \omega \sqrt{2g} \left(z_0^{\frac{1}{2}} dt - \frac{\sqrt{2g}}{2n} t\, dt \right).$$

Presi gli integrali, si ha la formola

$$(\text{H}^{\text{v}}) \qquad \beta = \omega \sqrt{2g} \left(z_0^{\frac{1}{2}} t - \frac{\sqrt{2g}}{4n} t^2 \right),$$

nella quale non apparisce costante alcuna per la ragione che a $t=0$ risponde $\beta=0$.

Se si vuole un' altra espressione della stessa quantità β, osserveremo che il valore $z_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2g}}{2n}\theta$, cavato dall' equazione (H.''' 498) e sostituito nella (H$^{\text{v}}$) ci dà

$$(\text{H}^{\text{vi}}) \qquad \beta = \omega \sqrt{2g} \left(\frac{\sqrt{2g}}{2n} \theta t - \frac{\sqrt{2g}}{4n} t^2 \right) = \frac{\omega g}{2n} (2\theta - t) t.$$

501. Volumi d' acqua che in tempi uguali e successivi escono da un orifizio. Rappresentiamo con $\beta', \beta'', \beta''', \beta^{\text{iv}}, \ldots$ i volumi o le quantità d' acqua che nei rispettivi tempi $t=1$,

$=2, =3, =4, = \ldots\ldots$ sgorgano dall' orifizio di un vaso: in forza della formola (H^{v}) del numero precedente avremo le espressioni

$$\beta' = \frac{\omega g}{2n}(2\theta - 1), \quad \beta'' = \frac{\omega g}{2n}(4\theta - 4),$$

$$\beta''' = \frac{\omega g}{2n}(6\theta - 9), \quad \beta^{iv} = \frac{\omega g}{2n}(8\theta - 16), \ldots$$

Per la qual cosa le quantità d' acqua che escono dall' orifizio nelle successive unità di tempo, si esprimono con

$$\beta' = \frac{\omega g}{2n}(2\theta - 1), \quad \beta'' - \beta' = \frac{\omega g}{2n}(2\theta - 3),$$

$$\beta''' - \beta'' = \frac{\omega g}{2n}(2\theta - 5), \quad \beta^{iv} - \beta''' = \frac{\omega g}{2n}(2\theta - 7), \ldots;$$

e conseguentemente si ha la relazione

$$\beta' : (\beta'' - \beta') : (\beta''' - \beta'') : (\beta^{iv} - \beta''') : \ldots$$

$$= (2\theta - 1) : (2\theta - 3) : (2\theta - 5) : (2\theta - 7) : \ldots$$

Ma $(2\theta - 1)$, $(2\theta - 3)$, $(2\theta - 5)$, ... sono numeri dispari in ordine inverso; dunque *le quantità d' acqua che escono dall' orifizio di un vaso in intervalli uguali e successivi di tempo, sono tra loro come la serie dei numeri dispari presi nell' ordine inverso.*

502. La stessa proposizione si può dimostrare ancora in quest' altro modo. Rappresentando al solito con z_0 l' altezza iniziale dell' acqua nel vaso, sieno $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_{\theta-1}$ le altezze ognor decrescenti dell' acqua stessa dopo una, due, tre, . . . $(\theta - 1)$ unità di tempo: le formole (H''') ed (H^{v}) ci dànno

$$z_0 = \frac{g}{2n^2}\theta^2 \,. \quad z_1 = \frac{g}{2n^2}(\theta-1)^2 \,, \quad z_2 = \frac{g}{2n^2}(\theta-2)^2 \,,$$

$$z_3 = \frac{g}{2n^2}(\theta-3)^2 \,, \ldots, \; z_{\theta-1} = \frac{g}{2n^2}[\theta-(\theta-1)]^2 \,;$$

perciò le altezze delle quantità d'acqua delle quali si vuota il vaso dopo la prima, seconda, terza, . . . , θ^{sima} unità di tempo, sono manifestamente

$$z_0 - z_1 = \frac{g}{2n^2}[\theta^2-(\theta-1)^2] = \frac{g}{2n^2}(2\theta-1) \,,$$

$$z_1 - z_2 = \frac{g}{2n^2}[(\theta-1)^2-(\theta-2)^2] = \frac{g}{2n^2}(2\theta-3) \,,$$

$$z_2 - z_3 = \frac{g}{2n^2}(2\theta-5) \,, \ldots \; z_{\theta-1} = \frac{g}{2n^2} \,.$$

Da queste espressioni si ricava la proposizione precedente, perchè si ha la relazione

$$(z_0-z_1):(z_1-z_2):(z_2-z_3):\ldots:z_{\theta-1}$$

$$=(2\theta-1):(2\theta-3):(2\theta-5):\ldots:1$$

tra la serie inversa dei numeri dispari e le altezze delle quantità d'acqua, ovvero tra quella serie e le stesse quantità d'acqua che vengono a mancare nel vaso in tempi uguali e successivi.

503. **Modo di dividere la capacità di un vaso in parti che si vuotino in tempi uguali e successivi.** Poichè le quantità d'acqua che escono dall' orifizio di un vaso nelle unità successive di tempo, e conseguentemente le altezze interne computate sulla parete del vaso vanno a mano a mano diminuendo dall' alto al basso e sono tra loro come la serie dei numeri di-

spari iu ordine inverso, o ciò che è lo stesso, vanno dal basso all' alto crescendo come i numeri dispari nell'ordine naturale; perciò è che se debbasi dividere la capacità di un vaso in parti da vuotarsi nelle successive unità di un dato tempo θ, determinata che sia l' ultima (502)

$$z_{\theta-1} = \frac{g}{2n^2}$$

di queste parti, le altre in su fino alla prima saranno espresse dalla serie

$$3z_{\theta-1}\,,\ 5z_{\theta-1}\,,\ 7z_{\theta-1}\,,\ \ldots\,,\ (2\theta-3)z_{\theta-1}\,,\ (2\theta-1)z_{\theta-1}\,.$$

Pertanto non si avrà da far altro che notare queste parti o queste altezze sulla superficie laterale del vaso, e si osserverà che a ciascuna unità di tempo la superficie libera e orizzontale dell' acqua scende da una divisione all'altra. Le *clessidre* degli antichi, ossia gli orologi ad acqua coi quali misuravano il tempo, erano costrutte con questa regola.

Facciamo ancora un' altra osservazione su questa materia e poi passiamo ad altro. Tutte le parti nelle quali è stato diviso il vaso, equivalgono all' ultima di esse $z_{\theta-1}$ presa tante volte quante sono le unità di tempo contenute in θ^2: la ragione è che quelle parti formano una progressioni aritmetica, i cui termini sono θ di numero; la somma poi di tutte è data dalla espressione

$$z_{\theta-1} + 3z_{\theta-1} + \ldots + (2\theta-3)z_{\theta-1} + (2\theta-1)z_{\theta-1}$$

$$= [z_{\theta-1} + (2\theta-1)z_{\theta-1}]\,\frac{\theta}{2} = \theta^2 z_{\theta-1}\,.$$

Da queste si deduce una nuova maniera di determinare $z_{\theta-1}$ che è la seguente: fissato che sia il valore di θ, ossia del tempo totale a

vuotarsi il vaso, dividete l'altezza iniziale dell'acqua espressa da z_0 in tante parti uguali quante sono le unità di θ^2; l'ultima di queste divisioni che sta presso al fondo, è il valore di $z_{\theta-1}$.

504. **Contrazione della vena liquida.** Se il luogo dove è aperto l'orifizio $OO' = \omega$ (fig. 197ª) nella parete laterale o nel fondo di un vaso, è ridotto a una lastra sottile e senza spessezza sensibile; dimostra l'esperienza che la quantità d'acqua che esce dall'orifizio in un dato tempo (è detta la *portata* di esso orifizio) è molto minore di quella che darebbe la formola (H') del numero (500). Vi è dunque una differenza tra la portata teorica di un orifizio e la sua portata effettiva, e si trova coll'esperienza che questa è cinque ottavi di quella. Si dà ragione di questa differenza dicendo, che le molecole liquide le quali presso l'orifizio piegano dalla direzione verticale con cui scendevano, e vanno a formare la conoide, ritengono questa obliquità e convergenza di movimento anche quando sono fuori dell'orifizio: la vena dunque si restringe alcun poco fuori dello sbocco, e poi così ristretta prosegue a scorrere sotto la forma di un cilindro liquido AA'BB'. Il restringimento massimo fuori dell'orifizio avviene a una distanza uguale presso a poco al raggio di apertura: perchè dunque la teoria si accordi colla pratica, converrà prendere l'area $AA' = \omega'$ della vena contratta in vece dell'apertura $OO' = \omega$. Ora facendo il raggio di apertura dell'orifizio $= 1$, da ripetute esperienze si è trovato che il raggio della vena contratta è quasi 0, 8: quindo molto prossimamente si ha

$$\omega : \omega' = 1 : (0,8)^2 = 1 : 0,64$$

e conseguentemente $\omega' = 0.64\omega$; più accuratamente però si prende $\omega' = 0,625\omega = \frac{5}{8}\omega$. Dunque nella formola (H') invece di ω converrà prendere $\frac{5}{8}\omega$, ciò che va d'accordo coll'esperienza.

505. **Tubi di giunta all'orifizio.** Se l'orifizio è aperto in una parete del vaso che abbia una una sufficiente spessezza, molto

più se all' orifizio si adatti un corto tubo cilindrico come lo veggiamo praticato ordinariamente, avviene che la quantità d'acqua che si versa per esso in un dato tempo non arriva che a ottantadue centesimi di quella che assegna la formola teorica (H^v).

Questo risultato come si vede differisce in meno dalla teoria considerata al numero (500), e in più dalla portata effettiva nel caso che l' orifizio sia aperto in una parete o lastra sottile. La ragione del primo fatto si ripete da questo, che avvegnachè le molecole liquide per la forza di adesione alle vicine pareti si dilatino tosto a riempire tutta la capacità del tubo e diminuita perciò la contrazione della vena, si possa ritenere senza errore sensibile il fattore ω come costante all' apertura reale dell' orifizio; ciò non ostante la velocità di efflusso si trova alquanto diminuita e non è più uguale a $\sqrt{2gz}$, contro quello che noi abbiamo ammesso nel numero (497), ed abbiamo dipoi supposto nello stabilire la formola predetta. Infatti le molecole liquide che al punto d' imboccare nell' orifizio hanno una direzione convergente, cangiano bruscamente di direzione, costrette come sono a prendere de' movimenti paralleli lungo il tubo di giunta; e questo equivale a una collisione tra le molecole, e conseguentemente si ha una perdita di forza viva e una diminuzione di velocità che in questo caso è espressa da $0{,}18\,\sqrt{2gz}$. Pertanto avuto riguardo a questo dato dell' esperienza, la velocità che hanno le molecole liquide nell' uscire dal tubo cilindrico di giunta è$=0{,}82\,\sqrt{2gz}$; e in conseguenza di ciò, quando nella formola (H^v) si vuole determinare la quantità d' acqua che esce da un orifizio così costrutto, in vece del fattore $\sqrt{2g}$ si dovrà adeperare $0{,}82\,\sqrt{2g}$ conforme all' esperienza. La ragione poi, per la quale la portata effettiva dell' orifizio colla giunta di un tubo cilindrico riesce un poco più grande di quella che si avrebbe in una lastra sottile senza di esso, si deduce da questo che la diminuzione della velocità di efflusso è compensata in eccesso dalla dilatazione della vena liquida dentro al tubo.

Aggiungeremo due parole anche sopra i tubi conici convergenti, che si adattano a un orifizio per agevolare l'efflusso dell' acqua. L'apertura maggiore del tubo conico guarda le parte interna del vaso, e la minore è al di fuori: l' inclinazione dei lati opposti del cono è di 13 in 14 gradi dell'uno sull'altro; e l'apertura minore è quella, che si prende per apertura reale dell' orifizio. Con questa disposizione le molecole liquide entrate che sieno nel tubo, non deviano gran fatto dalla inclinazione convergente che han preso al punto di imboccare dentro di esso: il loro flusso procede senza collisioni e perdite sensibili di forza viva, e si comprende che la portata dell' orifizio esterno sopra un uguale orifizio cilindrico deve esserne vantaggiata. Infatti l'esperienza ha dimostrato che in questo caso si ottengono novantacinque centesimi della portata teorica, e che perciò nella formola (H^v) si dee adoperare il fattore $0,95\sqrt{2g}$.

506. **Flusso dei liquidi per gli orifizii a regime costante.** Le osservazioni dei numeri precedenti e le correzioni fatte alla formola teorica (H^v) per accordarla coi dati dell' esperienza, suppongono implicitamente che l'altezza del liquido dentro al vaso e al di sopra dell' orifizio non sia costante. Ora se noi supponiamo che senza turbare sensibilmente la massa del liquido, sopravvenga continuamente tant' acqua nel vaso quanta è quella che n' esce per l' orifizio, e perciò l'altezza iniziale z_0 al di sopra dell'orifizio rimanga costante; è manifesto che anche la velocità della vena e delle molecole liquide che escono dall' orifizio, diverrà costante e sarà uguale a $\sqrt{2gz_0}$: perciò è che la quantità d' acqua che sgorga dentro un tempo t, teoricamente parlando, si esprimerà colla formola $\omega t\sqrt{2gz_0}$; ma nei casi pratici si esprimerà colle formole $0,625\omega t\sqrt{2gz_0}$; $0,82\omega t\sqrt{2gz_0}$; $0,95\omega t\sqrt{2gz_0}$, secondo che l'orifizio è aperto in una lastra sottile, ha aggiunto un corto tubo cilindrico, ovvero un tubo conico convergente.

Segue di qui che un vaso cilindrico o prismatico, riempiuto di un liquido e munito di un piccolo orifizio alla base, impiega per vuotarsi un tempo doppio di quello che basterebbe all'efflusso del liquido contenuto primitivamente nel vaso, se il livello superiore

fosse mantenuto sempre alla medesima altezza per l'afflusso di un liquido di ugual densità. Infatti essendo a l'altezza del vaso, il tempo dell'efflusso totale nel primo caso si esprime (498) con $\theta = \frac{2n\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$; e il tempo richiesto per l'effetto voluto nel secondo caso, si ricava evidentemente dalla equazione $\omega\theta'\sqrt{2ga} = a\alpha$, e si esprime perciò con $\theta' = \frac{\alpha}{\omega} \frac{a}{\sqrt{2ga}} = \frac{n\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$. Ora l'espressione di θ ha un valore doppio di quello di θ'. Dunque ecc.

507. **Movimento delle acque negli alvei regolari.** Il movimento delle acque negli alvei regolari de' canali o dei fiumi, con una facile considerazione si riduce a quello di un liquido che esce da un piccolo orifizio aperto nella parete laterale di un vaso. La considerazione è la seguente: immaginiamo di dividere l'alveo regolare e orizzontale di un canale o di un fiume con un piano verticale, e fingiamo che in questo piano sieno aperti tanti fori quanti si vogliono: prescindendo per un momento da qualsivoglia cagione che turbi comunque il movimento regolare dell'acqua, è manifesto che l'efflusso per ciascuno di questi fori avviene come per uguali orifizii di altrettanti vasi, e che la velocità di ciascuno efflusso equivale a quella che è dovuta all'altezza dell'acqua soprastante al foro corrispondente. Ora se il numero di codesti fori lo supponiamo indefinito, poichè cresce pure indefinitamente il numero delle molecole che passano per quella sezione verticale, perciò tolto il piano, le singole molecole della sezione si muoveranno colla velocità che abbiamo detto.

Ciò premesso, consideriamo la sezione verticale di un alveo regolare e orizzontale, e di forma per es. rettangolare, che abbia un'altezza a, e una larghezza b: la velocità dalla quale sono animate le molecole liquide situate sopra una retta orizzontale b, e a una profondità z dalla superficie esterna del liquido, considerando la sola pressione dell'acqua soprastante, si esprimerà con $\sqrt{2gz}$, e $bt\sqrt{2gz}\,dz$ sarà la quantità dell'acqua che scorre per un elemento $b\,dz$ della sezione dentro un tempo t. Quindi è che il volume

V', o la quantità dell'acqua che dentro allo stesso tempo passa per tutta intera la sezione dell'alveo, si esprimerà manifestamente con

$$V = bt\sqrt{2g}\int_o^a z^{\frac{1}{2}}dz = \frac{2}{3}bt\sqrt{2ga^3}\,.$$

Ma essendo un alveo più o meno inclinato all'orizzonte o volendo tener conto dell'azione della gravità relativa a cui è sottomessa tutta la massa liquida, è manifesto che questa azione si scorge alla velocità che hanno le molecole liquide poste alla superficie esterna, e che provenendo dall'inclinazione dell'alveo è comune a tutta la massa. I pratici hanno dei metodi sperimentali per determinare la velocità media di un corso d'acqua che sempre è più o meno turbato per l'attrito delle molecole, specialmente di quelle che rasentano il fondo e le sponde laterali: ma noi facendo astrazione dagli impedimenti, e supponendo cognita la velocità alla superficie che si può misurare col moto di piccoli galleggianti, diremo che rappresentando con c l'altezza dovuta a questa velocità dipendente dalla pendenza dell'alveo, la velocità che hanno le molecole liquide situate sulla sezione verticale o rettangolare (ab) a una profondità z dalla superficie estrema del liquido, viene espressa da $\sqrt{2g(z+c)}$; e quindi la quantità d'acqua che passa per la predetta sezione dentro un tempo t, si esprimerà colla formola

$$V = bt\sqrt{2g}\int_o^a (z+c)^{\frac{1}{2}}d(z+c) = \frac{2}{3}\ bt\left(\sqrt{2g(a+c)^3} - \sqrt{2gc^3}\right).$$

508. **Flusso dei liquidi per piccoli orifizii aperti in un vaso qualunque**. Mentre un liquido omogeneo esce per un piccolo orifizio aperto nel fondo o nella parete di un vaso di forma qualunque, si può dire che senza errore sensibile avviene ciò che nei vasi prismatici o cilindrici abbiamo riferito altrove (497.1°.);

vale a dire che le molecole liquide si tengono ferme sopra ciascuno strato sottilissimo e orizzontale, e discendono animate da velocità soltanto verticali, specialmente quando le sezioni orizzontali non variano gran fatto per tutta l'altezza del vaso, e si possono trascurare le velocità orizzontali. Verificate che sieno queste condizioni, è manifesto che siamo all'ipotesi del numero (492), e possiamo bene adoperare le formole (E^{VII}) per determinare le circostanze del movimento, sia che la superficie esterna del liquido vada abbassandosi dentro al vaso, sia che essa rimanga costante per l'afflusso di tanta acqua quanta n'esce dal vaso per l'orifizio.

509. Primieramente facciamo il caso che la superficie superiore α_0 del liquido si vada a mano a mano abbassando secondo che porta il flusso per l'orifizio, e che una pressione esterna p_0 per es. quella dell'aria atmosferica, rimanga costante e sulla superficie α_0 e sopra l'orifizio ω. Rappresentando con z_0 ed l le distanze della superficie α_0 dalla origine delle coordinate z, e dall'orifizio ω, la pressione p sopra una sezione α a una distanza qualunque z si ottiene dalla prima delle formole (E^{VII}. 494), preso l'integrale $\int \frac{dz}{\alpha}$ tra z_0 e z; il valore di questa pressione sarà pertanto

$$p=\mu\left(gz-\frac{\omega^2v^2}{2\alpha^2}-\omega\frac{dv}{dt}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\alpha}\right)+C.$$

Per determinare la costante, osserveremo che al punto della superficie esterna del liquido essendo $p=p_0$, $z=z_0$, $\alpha=\alpha_0$, $\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\alpha}=0$, a questo punto medesimo abbiamo $p_0=\mu\left(gz_0-\frac{\omega^2v^2}{2\alpha_0^2}\right)+C$: ora questa dà per la costante

$$C=p_0-\mu\left(gz_0-\frac{\omega^2v^2}{2\alpha_0^2}\right);$$

dunque la pressione al punto della sezione α sarà

$$(H^{VII})\quad p=p_0+\mu g(z-z_0)-\frac{\mu\omega^2 v^2}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha_0^{\,2}}\right)-\mu\omega\frac{dv}{dt}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\alpha}\ .$$

Per determinare la velocità u al punto della sezione α, possiamo adoperare la seconda delle formole (E^{VII}); ed abbiamo senz'altro la relazione

$$(H^{VIII})\qquad u=\frac{\omega}{\alpha}v\,.$$

Ma vede ciascuno che sì in questa, come nella precedente formola, rimane a determinare la velocità v che ha il liquido nell'uscire dall'orifizio. A questo fine rifletteremo che al punto dell'orifizio sussiste $p=p_0$, $z=z_0+l$, $\alpha=\omega$; quindi è che l'equazione (H^{VII}) diviene in quel punto

$$gl-\frac{\omega^2 v^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\alpha_0^{\,2}}\right)-\omega\frac{dv}{dt}\int_{z_0}^{z_0+l}\frac{dz}{\alpha}=0\ :$$

questa poi facendo $\int_{z_0}^{z_0+l}\frac{dz}{\alpha}=h$, che è una quantità da determinarsi mediante l'equazione della superficie del vaso, la quale ci fa conoscere α in funzione di z, si può scrivere più comodamente

$$(H^{IX})\qquad gl-\frac{v^2}{2}\left(1-\frac{\omega^2}{\alpha_0^{\,2}}\right)-h\omega\frac{dv}{dt}=0\,;$$

e integrata che sia, ci da il valore cercato della velocità v.

Se l'apertura dell'orifizio ω è così piccola cosa relativamente alle sezioni orizzontali del liquido dentro al vaso, che tanto ω quanto i rapporti $\frac{\omega}{\alpha}$ ed $\frac{\omega}{\alpha_0}$. si possano considerare come quanti-

tà infinitesime rispetto alle altre, e perciò trascurabili senza errore; le equazioni (H^{IX}), (H^{VIII}), (H^{VII}) divengono molto più semplici, e sono

$$v=\sqrt{2gl}\,,\quad u=\frac{\omega}{\alpha}\sqrt{2gl}\,,\quad p=p_0+\mu g(z-z_0):$$

queste significano che *la velocità del liquido presso l'orifizio è quella dovuta all'altezza a cui è il liquido soprastante dentro al vaso, e che la pressione esercitata sopra una sezione orizzontale qualunque è quella che ha luogo* (452) *sulla medesima nello stato di equilibrio.*

510. In secondo luogo consideriamo il caso che aggiungendo sempre nuova acqua al vaso, l'altezza l del liquido sopra la bocca dell'orifizio rimanga sempre costante. Volendo adoperare la formola (H^{IX}) per determinare la velocità v dell'efflusso, e facendo per brevità $1-\frac{\omega^2}{\alpha_0^2}=k^2$ che è una quantità costante, otterremo

$$dt=\frac{2h\omega\, dv}{2gl-k^2v^2}=\frac{2h\omega}{k\sqrt{2gl}}\cdot\frac{d\,\frac{k}{\sqrt{2gl}}v}{1-\frac{k^2}{2gl}v^2}$$

$$=\frac{h\omega}{k\sqrt{2gl}}\left\{\frac{d\,\frac{k}{\sqrt{2gl}}v}{1+\frac{k}{\sqrt{2gl}}v}+\frac{d\,\frac{k}{\sqrt{2gl}}v}{1-\frac{k}{\sqrt{2gl}}v}\right\}:$$

presi poi gli integrali, avremo (LI)

$$t=\frac{h\omega}{k\sqrt{2gl}}\left[\log\left(1+\frac{kv}{\sqrt{2gl}}\right)-\log\left(1-\frac{kv}{\sqrt{2gl}}\right)\right]$$

$$=\frac{h\omega}{k\sqrt{2gl}}\log\left(\frac{\sqrt{2gl}+kv}{\sqrt{2gl}-kv}\right),$$

nella quale non v'è costante, perchè a $t=0$ risponde $v=0$. Ora da questa ultima equazione si ha primieramente

$$e^{\frac{kt\sqrt{2gl}}{h\omega}}=\frac{\sqrt{2gl}+kv}{\sqrt{2gl}-kv}\;;$$

e risoluta questa in ordine alla velocità v, si deduce poi

$$v=\frac{\sqrt{2gl}}{k}\cdot\frac{1-e^{-\frac{kt\sqrt{2gl}}{h\omega}}}{1+e^{-\frac{kt\sqrt{2gl}}{h\omega}}}\,.$$

In questa formola si può dire che la quantità esponenziale

$$e^{-\frac{kt\sqrt{2gl}}{h\omega}}=e^{1:\frac{kt\sqrt{2gl}}{h\omega}}$$

svanisce dopo un tempo t tanto più breve, quanto è più piccola l'apertura dell'orifizio ω: dunque poco dopo incominciato l'efflusso, la velocità all'orifizio diviene sensibilmente costante e si esprime con

$$v=\frac{\sqrt{2gl}}{k}\,.$$

Atteso che $\frac{dv}{dt}=0$, le formole (H^{VII}) ed (H^{VIII}) che danno la pressione e la velocità al punto di una sezione orizzontale α, divengono

$$p=p_0+\mu g(z-z_0)-\frac{\mu g\,\omega^2 l}{k^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha_0^2}\right),$$

$$u=\frac{\omega}{\alpha}\,\frac{\sqrt{2gl}}{k}\,.$$

Finalmente supposta l' area dell' orifizio tanto piccola, da poter trascurare senza errore il rapporto $\frac{\omega}{\alpha_0}$ relativamente alle altre quantità; sarà $k=1-\frac{\omega^2}{\alpha_0^2}=1$, e conseguentemente avremo $v=\sqrt{2gl}$, come nei casi precedenti.

511. **Problema** I. *Un vaso è formato di una mezza sfera e di un piano diametrale, ed ha due piccoli fori uguali* ω, *l' uno alla sommità della superficie curva, l'altro alla base. Questo vaso, essendo riempito esattamente di un liquido e collocato nell'atmosfera può vuotarsi totalmente per mezzo dell' uno o dell' altro orifizio, secondo la posizione fissa in cui viene messo: si domanda il rapporto dei tempi* θ' *e* θ *necessarii all'efflusso totale nella prima e nella seconda ipotesi.*

Prima di venire alla soluzione del problema, bisogna che troviamo l'integrale indefinito della espressione differenziale $\frac{z^2dz}{\sqrt{r-z}}$.

Abbiamo successivamente

$$\int\frac{dz}{\sqrt{r-z}}=-2\sqrt{r-z}\,,$$

$$\int\frac{z\,dz}{\sqrt{r-z}}=-2z\sqrt{r-z}-2\int\sqrt{r-z}\,d(r-z)$$

$$=-2z\sqrt{r-z}-\frac{4}{3}(r-z)\sqrt{r-z}$$

$$=2\sqrt{r-z}\left[(r-z)-r-\frac{2}{3}(r-z)\right]$$

$$=2\sqrt{r-z}\left(\frac{r-z}{3}-r\right),$$

$$\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{r-z}} = z \,.\, 2\sqrt{r-z}\left(\frac{r-z}{3} - r\right) + \frac{2}{3}\int (r-z)^{\frac{3}{2}}\, d(r-z)$$

$$-2r\int (r-z)^{\frac{1}{2}}\, d(r-z) = 2z\sqrt{r-z}\left(\frac{r-z}{3} - r\right)$$

$$+\frac{4}{15}(r-z)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} r\,(r-z)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -2\sqrt{r-z}\left[\left((r-z) - r\right)\left(\frac{r-z}{3} - r\right)\right.$$

$$\left. -\frac{2}{15}(r-z)^2 + \frac{2}{3} r\,(r-z)\right]$$

$$= -2\sqrt{r-z}\left[\frac{1}{5}(r-z)^2 - \frac{2}{3} r(r-z) + r^2\right].$$

Ciò premesso, consideriamo prima il secondo caso, vale a dire quando l'efflusso succede per l'orifizio praticato nella base dell'emisferio. Alla fine di un tempo t dal principio dell' efflusso, sia α l'area circolare della superficie superiore di livello, e sia z l' altezza di questa superficie al di sopra dell' orifizio: sarà $\omega\sqrt{2gz}\,dt$ la quantità di liquido che esce per l' orifizio nel tempuscolo susseguente dt, e sarà pure $-\alpha\,dz$ la quantità di liquido che nel medesimo tempuscolo viene a mancare nel vaso; avremo dunque l'equazione

$$\omega\sqrt{2gz}\,dt = -\alpha\,dz\,.$$

Ora preso per origine delle coordinate rettangolari il centro dell'emisferio, l'equazione $x^2+y^2+z^2=r^2$ che appartiene alla superficie del vaso, ci dà $x^2+y^2=r^2-z^2$; e questa ci rappre-

senta la circonferenza dell'area circolare α, posta alla distanza z dal centro, ed avente per raggio l'espressione $\sqrt{r^2-z^2}$: si avrà dunque $\alpha=\pi(r^2-z^2)$ e quindi l'equazione superiore ci darà

$$dt=-\frac{\pi}{\omega\sqrt{2g}}\;\frac{r^2-z^2}{\sqrt{z}}dz.$$

S'integri tra i limiti r e *zero*, ovvero mutando il segno del secondo membro si faccia l'integrazione da *zero* ad r: risulterà l'espressione del tempo θ, in cui si vuota interamente il vaso; e sarà

$$\theta=\frac{\pi}{\omega\sqrt{2g}}\int_0^r\left(\frac{r^2}{\sqrt{z}}-\frac{z^2}{\sqrt{z}}\right)dz=\frac{\pi}{\omega\sqrt{2g}}\left[2r^2z^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}\right]_0^r$$

$$=\frac{\pi}{\omega\sqrt{2g}}\left(2r^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}r^{\frac{5}{2}}\right)=\frac{\pi}{\omega\sqrt{2g}}\;\frac{8}{5}\,r^{\frac{5}{2}}\;.$$

Consideriamo in secondo luogo il primo caso, vale a dire quando l'efflusso del liquido succede per l'orifizio praticato alla sommità della superficie curva del vaso emisferico, che si capovolge. Conservata nel centro dell'emisferio l'origine delle coordinate, sia $z'=r-z$ l'altezza del livello α al di sopra dell'orifizio alla fine del tempo t; avremo, come nel caso precedente, l'equazione

$$\omega\sqrt{2gz'}.\,dt=-\alpha\,dz'=-\pi(r^2-z^2)\,dz'\;;$$

e atteso il valore dell'altezza z' se ne dedurrà

$$dt=\frac{\pi}{\omega\sqrt{2g}}\frac{r^2-z^2}{\sqrt{r-z}}\,dz\;.$$

Si facci ora l'integrazione tra i limiti $z'=r$ e $z'=0$, a cui corrispondono i due limiti $z=0$ e $z=r$; ne risulterà l'espressione

del tempo θ' necessario all' efflusso totale, e giusta la formola integrale già trovata da principio, si avrà

$$\theta' = \frac{\pi}{\omega\sqrt{2g}}\left[\int_0^r \frac{r^2 dz}{\sqrt{r-z}} - \int_0^r \frac{z^2 dz}{\sqrt{r-z}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\omega\sqrt{2g}}\Big[-2r^2\sqrt{r-z} + 2\sqrt{r-z}\Big(\frac{1}{5}(r-z)^2$$

$$-\frac{2}{3}r(r-z) + r^2\Big)\Big]_0^r$$

$$= \frac{\pi}{\omega\sqrt{2g}}\left(2r^2\sqrt{r} - \frac{2}{5}r^2\sqrt{r} + \frac{4}{3}r^2\sqrt{r} - 2r^2\sqrt{r}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\omega\sqrt{2g}}\,\frac{14}{15}\,r^{\frac{5}{2}}$$

Confrontando tra loro i valori di θ' e θ, troveremo il rapporto domandato nel problema, cioè

$$\theta' : \theta = \frac{14}{15} : \frac{8}{5} = \frac{14}{15} : \frac{24}{15} = 7 : 12\,.\,.$$

512. Problema II. *Un vaso che contiene un liquido omogeneo, è riunito a un contrappeso* P *per mezzo di un filo, che passa per la gola di una carrucola fissa, ed ha un peso che si può trascurare: tutto il sistema si muove sotto l'azione della gravità nel tempo stesso che il liquido sgorga fuori per un piccolo orifizio praticato nella parete del vaso. Conosciuta la forma del vaso, e la somma* Q_0 *del peso di questo e del peso del liquido che vi si contiene a un epoca data* t_0, *si vogliono determinare in questo caso le leggi dell'efflusso.*

Nel presente caso si può considerare il vaso come fermo, e il liquido effluente come se uscisse da un vaso immobile, quando ciascuna molecola si risguardi come sollecitata non pure dalla gravità, ma ancora da una forza acceleratrice uguale e contraria all'accelerazione del sistema. Ora se noi chiamiamo Q la somma del peso del vaso e di quello del liquido che vi si contiene alla fine di un tempo qualunque t, l'accelerazione del sistema per questa epoca, sostituendo i pesi alle masse corrispondenti e proporzionali, si esprime (293) col prodotto $\frac{P-Q}{P+Q}g$; ed una tale espressione risultando positiva o negativa, secondo che il vaso si muove nel senso opposto alla gravità o nel medesimo senso della gravità, alle molecole del liquido viene sempre ad applicarsi una forza acceleratrice uguale e contraria all'accelerazione del sistema, coll'aggiungere in ogni caso alla loro gravità g la espressione predetta: dunque perchè il vaso si possa considerare come immobile e perchè si possano quindi applicare al nostro problema le formole già stabilite nella ipotesi della immobilità del vaso, converrà risguardare ciascuna molecola del liquido come sollecitata dalla forza acceleratrice

$$g+\frac{P-Q}{P+Q}g=2g\frac{P}{P+Q},$$

e sostituire questa somma invece della forza g nelle formole proprie dell'efflusso dei liquidi per i piccoli orifizii.

Pertanto nella supposizione che il liquido sia soggetto a una stassa pressione nel livello superiore e all'orifizio, la formola $v=\sqrt{2gl}$ trovata nel numero (209) ci darà nel caso presente per la velocità all'orifizio all'epoca t il valore

$$v=2\sqrt{\frac{Pgz}{P+Q}}, \tag{1}$$

dove z rappresenta l'altezza del livello al di sopra dell'orifizio me-

desimo; e designata con α la sezione orizzontale del vaso che coincide colla superficie del livello, l'equazione generale $\omega v dt = -\alpha dz$, diviene nel nostro caso

$$(2) \qquad \alpha dz = -2\omega \sqrt{\frac{Pgz}{P+Q}}\, dt.$$

Finalmente se si chiama z_0 il valore dell'altezza z all'epoca data t_0, il volume del liquido che viene a mancare nel vaso nell'intervallo di tempo $t - t_0$, si esprime coll'integrale $\int_{z_0}^{z} \alpha\, dz$ che ha un valore negativo; dunque chiamando μ la densità del liquido, alla fine del tempo t_0 avremo pure l'equazione

$$(3) \qquad Q = Q_0 + \mu g \int_{z_0}^{z} \alpha\, dz$$

Le tre equazioni (1), (2), (3), congiunte alla equazione della superficie del vaso la quale ci fa conoscere la sezione α in funzione dell'altezza z, sono sufficienti a determinare le leggi dell'efflusso nelle circostanze del problema. Quando Q diviene uguale a P, si ottiene $v = \sqrt{2gz}$, e perciò l'efflusso in questo istante succede allo stesso modo come se il vaso fosse immobile: se P fosse uguale a zero, la velocità v diverrebbe nulla, e il liquido non fluirebbe punto per l'orifizio: da ultimo se si suppone infinito il contrappeso P, risulterà $v = 2\sqrt{gz}$; e per conseguenza la velocità d'efflusso starà a quella che avrebbe luogo nello stato di riposo, come $2\sqrt{gz}$ sta a $\sqrt{2gz}$, ossia come $\sqrt{2}$ sta all'unità.

APPENDICE

ALLA

MECCANICA

Crediamo bene di aggiungere, come appendice alla Meccanica, i principii dell'Acustica e dell'Ottica: così i' giovani scolari ascoltando poi nel terzo anno di Filosofia le lezioni di Astronomia, per la quale vi è una scuola speciale in questo nostro Collegio, avranno percorso le parti principali di tutta la Fisica Matematica.

PRINCIPII DI ACUSTICA

CAPO I.

PROPAGAZIONE E VELOCITA' DEL SUONO

1°. **Origine e propagazione del suono.** L'Acustica tratta del suono: il suono è la sensazione prodotta in noi dai movimenti vibratorii, che destati prima nelle parti di un corpo, si trasmettono quindi all'organo dell'udito per mezzo di altri corpi elastici. Secondo questa definizione, due cose sono neccesarie a fine che si ecciti un suono e si renda a noi sensibile: 1. che le parti del corpo sonoro sieno in uno stato di vibrazione; 2. che tra il corpo sonoro e l'organo dell'udito esista un mezzo elastico o una serie non interrotta di corpi elastici, pe' quali le

vibrazioni primitive si propaghino di strato in strato fino al nostro orecchio.

Primieramento *è necessario che le parti del corpo sonoro sieno in uno stato di vibrazione:* perchè da una parte i corpi non tramandano mai verun suono nello stato di riposo, e d'altra parte il suono è sempre accompagnato dai tremiti o dalle vibrazioni più o meno rapide del corpo, a cui si riferisce. Basta pizzicare una corda tesa e abbastanza lunga, per udirne il suono e vederne i guizzi che si succedono rapidamente; basta accostare la punta di un dito a una campana che suoni, per accorgersi dei tremori, onde sono agitate le sue particelle; basta gittare qualche pezzetto di carta o un poco di sabbia minuta sopra una lamina di vetro od altro corpo che mandi suono, per riconoscerne le vibrazioni dal saltellare della carta o della sabbia. Ecco pertanto l'origine del suono: quando un corpo elastico sia costretto da una forza estrinseca a cangiare la propria forma o il volume fra certi limiti, le sue molecole, rimosse dalla rispettiva posizione di equilibrio, per la loro elasticità tosto vi ritornano al cessar della forza; ma siccome sono allora animate da una determinata velocità, egli è perciò che di nuovo se ne allontanano nella direzione opposta, e vanno quindi oscillando intorno alla stessa situazione di equilibrio. Da queste oscillazioni o vibrazioni, le quali per la resistenza de' corpi circostanti divengono sempre più piccole fino ad estinguersi, è cosa manifesta che si origina il suono.

Secondariamente *per sentire il suono è pur necessario che tra il corpo sonoro e l'organo dell'udito sia interposto un mezzo elastico e ponderabile, che ne trasmetta le vibrazioni.* Infatti se sotto la campana della macchina pneumetica si colloca una sveglia sopra materie poco o niente elastiche, per es. sopra uno strato di bambagia; il suono della sveglia, che sentesi benissimo per l'interponimento dell'aria atmosferica, a misura che questa sia estratta dalla campana, andrà progressivamente debilitandosi, e più non si sentirà quando siasi fatto il vuoto. È dunque mastieri di uno o più mezzi elastici e ponderabili, affinchè il suono del corpo sonoro

pervenga fino al nostro orecchio. Ecco pertanto come si propaga il suono: quando fra il corpo sonoro e l'organo dell'udito si frapponga senza interrompimento un mezzo elastico, le parti vibranti del corpo sospingono le molecole contigue del mezzo e le discostano dalla naturale posizione di equilibrio; ond'è che queste cominciano a vibrare, siccome lo particolette del corpo sonoro, e per somigliante ragione trasfondonsi successivamente le vibrazioni dalle molecole di uno strato a quelle dell'altro, finchè arrivando al timpano dell'orecchio e urtandolo, vi producono la sensazione del suono.

2°. L'aria è il mezzo più ordinario, per cui si propaga il suono: nondimeno può questo diffondersi eziandio per gli altri fluidi elastici e vapori. Imperocchè se tolta l'aria atmosferica dalla campana della macchina pneumatica, vi si intrometta un altro gas o vapore, sentesi pur distintamente il suono di un orologio o di una sveglia collocata sotto la stessa campana.

Anche i corpi liquidi sono mezzi abbastanza acconci alla propagazione del suono. Percuotendo un timpano presso a un'acqua stagnante, noi vediamo questa incresparsi e ondeggiare: ciò dimostra che le particelle liquide possono mettersi in quello stato di vibrazione, che è richiesto per comunicare il suono. In realtà odesi assai bene il rumore di una pietra che cada sul fondo dell'acqua, e chi sta sott'acqua ascolta chiaramente la voce di chi sta fuori, e viceversa.

Da ultimo il suono si trasmette pure attraverso i corpi solidi. Un colpo menato alla estremità di una trave o di un lungo tubo di metallo s'intende all'altra estremità, e può distinguersi dal suono propagato per l'aria che è ben d'assai più lento. È poi cosa nota che per udire di nottetempo uno strepito fatto a gran distanza, basta applicare l'orecchio sotterra a uno strato ben sodo: così usano di fare i soldati in campo, per riconoscere la venuta dell'oste nemica dal marciar dei fanti e dallo scalpitar dei cavalli. E appunto per impedire che il suono si trasmetta all'aria esterna dalle parti solide della macchina pneumatica, nella esperienza citata nel primo numero conviene che sotto la campana la

sveglia sia soprapposta a materie poco elastiche, e perciò poco adatte a concepire un moto vibratorio.

3°. **Onda sonora.** Affine di comprender meglio il modo onde il suono si propaga pe' corpi elastici, prendiamo a considerare gli scuotimenti prodotti in un tubo cilindrico o colonna indefinita d'aria da una lamina o da un piano PP che stia oscillando all'estremità del tubo tra i limiti AA ed A'A' (fig. 198ª).

Passando il piano dalla posizione estrema A'A' all'altra AA, scuote e sospinge di continuo le molecole adiacenti dell'aria; e queste scosse ed impulsi consecutivi si trasmettono nel tubo di mano in mano alle altre molecole, come in una serie di palle eguali ed elastiche a contatto un urto istantaneo si comunica successivamente dall'una all'altra palla: sicchè giunto il piano in A e terminata appena la vibrazione, mentre l'ultimo impulso sta commovendo le particelle aeree in AA, il primo sarà di già pervenuto a scuotere le particelle situate in BB, e nel medesimo istante gli urti intermedii si troveranno sopra i corrispondenti strati d'aria posti fra AA e BB. Ritornando il piano alla posizione primitiva A'A', le molecole contigue ne seguitano il movimento retrogrado che con ordinata successione si stende quindi alle altre molecole dell'aria: di tal guisa la colonna aerea AB, che pel moto precedente del piano si era compressa e addensata, ripiglia il suo stato e ricupera la sua prima densità. Ma come in pari tempo gli urti della prima vibrazione continuano a trasmettersi nel tubo verso la parte destra; perciò la medesima colonna AB perdendo anche per quest'altro senso la compressione ricevuta, nella seconda vibrazione si va dilatando oltre alla sua densità naturale: sicchè arrivato il piano in A' e compiute due vibrazioni isocrone, mentre le spinte primitive si sono sparse da BB fino a CC per uno spazio BC=AB, e l'aria vi si è ristretta e condensata, l'opposto movimento del piano si sarà pure diffuso per lo spazio AB da AA fino a BB, e l'aria che vi si rinchiude sarà rarefatta.

L'aria AC, commossa nel tubo dalle due vibrazioni del piano, dicesi *onda sonora*; ed è composta di due semi-onde AB e BC, delle

quali una è rarefatta e l'altra condensata. Se il piano si arresta in A', l'onda ABC ritorna allo stato iniziale di densità e di riposo, e i suoi movimenti trapassano in CDE=ABC, e quindi colle medesime vicende si propagano indefinitamente per tutta l'aria del tubo: ma se il piano prosegue ad oscillare, le onde sonore, succedendo le une alle altre, si formano senza alcuna posa negli intervalli uguali ABC, CDE, ..., ne' quali sia diviso il tubo; e in ciascuna onda le due parti alternamente si addensano e si dilatano, oscillando le molecole aeree ora a destra ed ora a sinistra. Adesso è chiaro che quando le vibrazioni del piano o dell'elemento di un corpo elastico si fanno in un mezzo libero ed omogeneo, per es. nell'aria atmosferica, le onde successivamente generate si spandono tutto all'intorno e sono comprese tra due superficie sferiche, di cui è centro l'elemento stesso o la particoletta vibrante del corpo sonoro: quindi avviene che sebbene la lunghezza di queste onde sferiche sia costante ed uguale in tutte, pure la loro massa è diversa e tanto maggiore, quanto più grande è la loro lontananza dal comun centro. Del resto la lunghezza delle onde, sieno esse sferiche o cilindriche, è lo spazio ABC pel quale si propaga il moto o che percorre il suono, durante una doppia vibrazione del corpo che le produce: però la medesima lunghezza dipende sì dal tempo che consuma il corpo sonoro per eseguire le sue vibrazioni, e sì ancora dalla velocità di propagazione del moto vibratorio o del suono nei differenti mezzi. Di cotesta velocità dobbiamo ora trattare.

4° **Velocità del suono nei gas.** Il suono nelle medesime circostanze si propaga con moto uniforme, e nell'aria alla temperatura di 0° la sua velocità è di 333 metri incirca per ogni minuto secondo: tali sono le conclusioni, a cui i Fisici sono stati condotti dalle sperienze fatte colla possibile esattezza in epoche diverse. A rinnovare questi sperimenti e confermarne le conclusioni, bisognerebbe che a differenti e conosciute distanze osservassimo il tempo che passa nello sparo di un cannone tra l'apparire della luce, la quale da un luogo a un altro della terra si trasmette in un istante, e l'arrivo del rumore o del suono fino

ai nostri orecchi: troveremmo allora che il suono giunge a diversi punti dell'aria in tempi proporzionali alle loro distanze dal centro di esplosione, e che la sua velocità è appunto quella che testè abbiamo indicata. Le quali due verità potrebbero insieme dimostrarsi, applicando alle piccole oscillazioni delle molecole aeree le equazioni generali del moto dei corpi fluidi: ma noi, supposta l'uniforme propagazione del suono, crediamo più opportuno di dar qui una dimostrazione elementare della formola, che si adopera per determinare la velocità del suono in tutti i gas.

5°. A una temperatura costante sia μ la densità di un gas omogeneo, e p l'elasticità o la pressione riferita all'unità di superficie: supponiamo che il gas sia contenuto in un tubo cilindrico indefinito di raggio r, e che le piccole oscillazioni del piano PP, situato a una estremità del tubo, si compiano con moto uniforme nel tempo θ tra le posizioni parallele A'A' ed AA. Chiamata c la celerità, colla quale i movimenti del piano si propagano nel tubo per tutto il fluido elastico, sarà dessa la velocità del suono che dobbiamo trovare.

Nel tempo θ, in cui il piano fa una vibrazione e passa dalla posizione A'A' all'altra AA, le particelle adiacenti del fluido elastico sono scosse, e si estende lo scotimento nel tubo fino alla distanza $c\theta$: ne risulta quindi in tutta la colonna turbata un leggero incremento di densità, il quale può esprimersi per $\delta\mu$, essendo δ una piccolissima frazione dell'unità. Per lo che nell'intervallo $c\theta$ la densità del fluido diverrà $\mu(1+\delta)$; e conseguentemente la pressione che secondo la legge di Mariotte è proporzionale alla densità, si farà anch'essa maggiore divenendo $p(1+\delta)$. Peraltro è da avvertire che nel condensarsi di un gas si sviluppa una certa quantità di calorico, che ne innalza la temperatura, dimodochè l'elasticità o la pressione del fluido smosso nel tubo deve rendersi più grande, non solo per ragione della densità aumentata, ma eziandio pel crescere della temperatura. Ora l'incremento di pressione dovuto alla variazione di temperatura nell'addensamento del fluido, è chiaro che dipende dall'incremento stesso del-

la densità; ossia è una funzione del coefficiente δ, la quale si può svolgere (LXVIII) nella serie $f(\delta)=A_0+A_1\delta+A_2\delta^2+A_3\delta^3+\ldots$: ma siccome al valore $\delta=0$ risponde $A_0=0$, e attesa la piccolezza della medesima quantità δ, possono trascurarsi tutte le altre sue potenze in confronto della prima; così l' incremento commemorato si riduce all'espressione $A_1\delta=pk\delta$, dove la quantità k è una costante da definirsi. Pertanto alla fine del tempo θ la pressione, che pel solo ingrandimento di densità sarebbe $p(1+\delta)$ nella colonna fluida $c\theta$, a motivo della elevazione di temperatura diventerà ancor più gagliarda e sarà rappresentata dal seguente trinomio $p(1+\delta+k\delta)$. Questa pressione si esercita nella base anteriore della colonna scossa $c\theta$ contro una superficie presa per unità, ed è diretta nel senso del movimento del piano PP; nel senso opposto un' uguale superficie della base posteriore è soggetta alla pressione idrostatica p del fluido non ancora smosso: dunque la differenza di pressione $p(\delta+k\delta)$ sarà la forza motrice, ond' è spinto un cilindro fluido che ha per base l' unità di superficie; e perciò (Mecc. 442) il prodotto $\pi r^2 p(\delta+k\delta)$ sarà pure la forza motrice di tutta la colonna fluida $c\theta$, che ha per base la sezione πr^2 del tubo. Dinotino μ' ed h la densità e l' altezza barometrica del mercurio, da cui è misurata l'elasticità o la pressione p del gas: poichè (452. B″) abbiamo $p=\mu' gh$, potremo anche esprimere la forza motrice del gas turbato col prodotto

$$\pi r^2 \mu' gh(\delta+k\delta)\,. \tag{1}$$

Cerchiamo adesso un'altra espressione della medesima forza. In virtù della pressione soprabbondante, l'eccesso di densità $\mu\delta$ in uguali e successivi istanti passa colla velocità c dai singoli strati della colonna $c\theta$ agli strati omologhi della colonna susseguente; di modo che trascorso un nuovo intervallo di tempo θ, la prima colonna si troverà tutta libera dalla eccessiva densità, e questa si sarà trasferita su tutta la seconda colonna: quindi la forza motrice, ond'è animata la colonna $c\theta$, può rassomigliarsi a un'azione continua e costante, la quale si eserciti (99) sopra la massa $\pi r^2 c\theta\mu\delta$

che corrisponde al soverchio di densità $\mu\delta$, e le comunichi nel tempo θ la velocità c. Ora la misura di una forza costante è il rapporto tra la massa moltiplicata per la velocità, e il tempo in cui dura la sua azione (269. m'''): dunque l'altra espressione della forza che stiamo esaminando, sarà $\pi r^2 c\theta\mu\delta \cdot \frac{c}{\theta}$, la quale paragonata colla prima espressione (1), ci dà per la velocità del suono in un gas la formola

$$(2) \qquad c = \sqrt{\frac{\mu' g h}{\mu}(1+k)}\,.$$

6°. Rimane ancora a determinare la quantità k, la quale dipende dal calorico sviluppato nella compressione del gas, e può rappresentare l'accrescimento per questa avvenuto nella temperatura: noi determineremo la detta quantità, esprimendola per le capacità calorifiche, che ha il gas a pressione costante o a costante volume.

Capacità calorifica o *calorico specifico* di un gas *a pressione costante* dicesi la quantità di calorico, che è necessaria per innalzare di un grado l'unità di massa del gas, quando esso possa liberamente dilatarsi per l' accrescimento di temperatura e così rimanga sottoposto a una medesima pressione, conservando la sua forza elastica: che se il gas sia chiuso in un vaso ben resistente, e riscaldato non possa espandersi, allora è detta capacità calorifica o *calorico specifico a volume costante* la quantità di calorico richiesta ad elevare pur di un grado l'unità di massa di un tal fluido. Ora il calorico specifico di un gas a pressione costante è maggiore dell' altro, che ha luogo sotto un costante volume, di una parte k di quest' ultimo calorico. Infatti la quantità di calorico, che fa d'uopo per accrescere di un grado la temperatura di un gas a pressione costante, parte s'impiega a riscaldarne la massa, come se il gas fosse chiuso in un vaso e non potesse rarefarsi, e parte s'impiega a dilatarne il volume e diviene latente: dunque il calorico specifico γ a pressione costante è maggio-

re del calorico specifico γ' a costante volume di tutta quella quantità, che nascosta ai sensi per la dilatazione del gas si sprigiona e torna sensibile nel ridursi lo stesso fluido al volume primitivo; ossia l'uno supera l'altro di quella quantità di calorico, che si sviluppa nella condensazione del gas ed è apertamente espressa dal prodotto $k\gamma'$, rappresentando k la variazione perciò avvenuta nella temperatura. Dal che si raccoglie l'uguaglianza $\gamma=\gamma'+k\gamma'$ e quindi il valore $1+k=\frac{\gamma}{\gamma'}$, mediante il quale valore l'equazione (2) del numero precedente si trasforma in quest' altra

$$(a) \qquad c=\sqrt{\frac{\mu' gh}{\mu}\cdot\frac{\gamma}{\gamma'}}\,.$$

Se non si tenesse conto della variazione di temperatura nelle semi-onde sonore, condensate o dilatate; cioè se si facesse $k=0$, sarebbe $\frac{\gamma}{\gamma'}=1$, e per conseguenza

$$(a') \qquad c=\sqrt{\frac{\mu' gh}{\mu}}$$

che è la formola lasciata da Newton per determinare la velocità del suono nei fluidi elastici. In questa seconda formola, come anche nella prima, la quantità $\mu' gh$ è il peso della colonna barometrica di mercurio,che ha per base l'unità di superficie,e che rappresenta perciò la pressione ovvero la forza elastica dell' aria atmosferica, o di qualunque altro gas con cui si equilibra: dunque possiamo conchiudere, che *la velocità del suono è direttamente proporzionale alla radice quadra della elasticità ed inversamente proporzionale alla radice quadra della densità del gas in cui si propaga.*

7°. La formola di Newton non è esatta, e ci somministra per la velocità del suono nell' aria un valore non poco inferiore a quello che è dato dall' esperienza. In vero alla pressione $h=0^m,76$

ed alla temperatura 0°, le densità dell' aria e del mercurio, relativamente a quella dell' acqua stillata che si prende per unità, sono $\mu = 0,001293$ e $\mu' = 13,5959$; abbiamo inoltre per la gravità alla latitudine di Roma (274) il valore $g = 8^m, 8034$: quindi servendoci della formola newtoniana (α'), troviamo presso a poco $c = \sqrt{78342^m}, = 279^m, 9$; e cosiffatta velocità differisce di molto dalla velocità sperimentale che è di 333^m per ogni minuto secondo.

Pertanto nella propagazione del suono a traverso ai fluidi elastici non si possono trascurare i cangiamenti di temperatura prodotti dal calorico sviluppato o assorbito per le piccole compressioni o dilatazioni delle semi-onde successive; e però a definirne la velocità bisogna far uso della formola (α) di Laplace, la quale ben si accorda coll'esperienza. Infatti se pel rapporto $\frac{\gamma}{\gamma'}$ fra i due calori specifici dell' aria atmosferica noi prendiamo il numero 1,419 che risulta dagli sperimenti de' moderni Fisici, la formola (α), appunto come s' inferisce dalle osservazioni, ci dà per la velocità del suono nell' aria alla temperatura 0° il valore $c = \sqrt{78342^m . 1,419} = 333^m, 4$: simigliantemente i valori, che dalla medesima formola si ricavano per la velocità del suono negli altri gas a zero, si appressano abbastanza a quelli ottenuti con diverso metodo da Dulong, e sono 317^m per ogni minuto secondo nel gas ossigeno, 1269^m nel gas idrogeno, 262^m nel gas acido carbonico.

Del resto la velocità del suono nei fluidi elastici diviene maggiore o minore, col crescere o calare della temperatura; e si può stabilire una formola, la quale date che siano le densità μ_0 e μ'_0 di un gas e del mercurio a 0°, faccia conoscere immediatamente la velocità del suono corrispondente alla temperatura di θ gradi. Preso per unità il volume del gas a zero, e indicato con α il suo coefficiente di dilatazione per ciascun grado di temperatura (462), il volume a θ° sarà $1 + \alpha\theta$; e la densità la quale varia in ragione inversa

del volume, diverrà $\mu = \frac{\mu_0}{1 + \alpha\theta}$: quindi la formola (α), rispetto a una temperatura θ del gaz, potrà scriversi

$$(\alpha'') \qquad c = \sqrt{\frac{\mu'_0 g h_0}{\mu_0}(1 + \alpha\theta)\ \frac{\gamma}{\gamma'}}\ ;$$

e in questa nuova formola la quantità h_0 è l'altezza del barometro ridotta alla temperatura zero del mercurio, cosicchè $\mu'_0 h_0$ equivalga al prodotto $\mu' h$ della formola primitiva. Nell' aria p. es. alla temperatura 15° del termometro centigrado, la velocità del suono, qual si ricava della formola (α''), è di 342 metri o in quel torno.

8°. Crediamo opportuno di annotare in questo luogo le tre cose seguenti intorno alla velocità del suono nell'aria.

1. Se l'aria non è ben secca, la sua densità riesce un po' minore di quel che sarebbe a una stessa temperatura e pressione senza il vapor d'acqua: laonde la velocità del suono nell' aria vaporosa proviene alquanto maggiore; ma supposto pure lo stato di saturazione, non oltrepassa che di due o tre metri il valore di già assegnato alla velocità nell'aria asciutta. Peraltro sotto le medesime indicazioni del termometro e dell'igrometro, la velocità del suono è indipendente dalla densità e dalla pressione dell' aria; perchè, secondo la legge di Mariotte, la pressione o la forza elastica di un gas, che non si raffredda nè si riscalda, varia in ragion diretta della sua densità. Egli è per questo che, non ostante la diminuzione graduata di densità e di pressione, il suono nelle regioni superiori dell'atmosfera si trasmetterebbe con quella medesima velocità, con cui si propaga in uno strato orizzontale, se la temperatura dell' aria non andasse pure abbassandosi graduatamente; ciò che rallenta un poco la trasmissione del suono verso l'alto.

2. La velocità del suono è ancora modificata dall' agitamento dell'aria o dallo spirar de' venti, cioè accresciuta nella direzione del vento e diminuita nell'opposta direzione. Ciò consta dall'esperienze più accurate, e lo dimostra altresì la ragione: perchè il

vento col suo soffiare trasporta insieme coll' aria da un luogo all' altro le onde sonore; dunque la velocità con cui queste si propagano in due contrarie direzioni, deve crescere o scemare di una quantità uguale alla celerità del vento, ovvero ad una sua componente. Avviene alle onde sonore dell'aria quello appunto, che noi vediamo nei circoli o nelle onde formate alla superficie dell' acqua da una pietruzza che vi si lasci cadere: se l' acqua non è stagnante ma scorre con moto equabile, noi osserviamo che le onde trasmettendosi approdano più presto ad un dato luogo dalla parte in cui si muove l' acqua, che dalla opposta parte ad un altro luogo ugualmente lontano dal centro di scuotimento.

3. La velocità del suono nell' aria, conosciuta che sia, serve a determinare le distanze terrestri: a questo scopo basta osservare la fiamma di un cannone che sparisi in un dato luogo, e dall' istante dell' osservazione contare i minuti secondi sino all' arrivo del rumore in un altro luogo; il prodotto del numero contato de' secondi per la velocità del suono già valutata in metri, sarà la distanza che si frappone dall' uno all' altro luogo. Così i naviganti possono sapere, quanto lungi si trovino dalla spiaggia o da un' altra nave; così pure i militari conoscono quanto da loro si discosti una città o una fortezza che vogliono assaltare; e così i geografi fra due punti della terra stabiliscono le distanze che non possono direttamente misurare. Dello stesso mezzo possiamo anche valerci, per definire con poca differenza dal vero la distanza di una nube in tempesta, noverando i minuti secondi che passano tra il lampo veduto e il tuono udito, e moltiplicando quindi il loro numéro per 333 metri che in tal caso rappresentano la velocità media del suono nell' atmosfera.

9°. **Velocità del suono nei corpi liquidi e solidi.** La dimostrazione che di sopra (5°. 6°.) abbiamo dato delle formole di Newton e di Laplace per la velocità del suono nei gas, con piccola variazione si applica eziandio ai corpi liquidi e solidi, purchè le parti di questi corpi possano un poco comprimersi e tornare alla primitiva posizione.

Consideriamo anche nel presente caso la colonna $c\theta$ liquida o solida, per la quale si propaga il suono nel tempo θ colla velocità c; e sieno $\mu\delta$, β l'accrescimento di densità e l'accorciamento di lunghezza, che a motivo della debole compressione subisce la medesima colonna senza cangiare il diametro $2r$: potrà stabilirsi manifestamente la proporzione $c\theta$: $c\theta-\beta=\mu(1+\delta):\mu$, e da questa tratrascurando il quadrato della quantità β che è assai piccola, ricaveremo

$$\delta=\frac{c\theta}{c\theta-\beta}-1=\frac{\beta}{c\theta-\beta}=\frac{\beta}{c\theta}.$$

Ciò posto, ci assicura l'esperienza che nelle menome compressioni i corpi liquidi e solidi si contraggono equabilmente per uguali aumenti di forza; sicchè nella colonna che abbiamo tolto a considerare, le contrazioni di lunghezza sono proporzionali alle forze comprimenti: dunque designando con λ il coefficiente di compressibilità, ossia la contrazione relativa all'unità di volume e di pressione (prendesi per unità la pressione di un'atmosfera, cioè di una colonna di mercurio alta $0^m,76$ e pesante $0^m,76\mu'g$); sarà $c\theta\lambda$ la contrazione sofferta in lunghezza per la pressione di un'atmosfera da un cilindro, che ha per base l'unità e $c\theta$ per lunghezza; e quindi $\frac{0^m,76\mu'g\beta}{c\theta\lambda}$ sarà nello stesso cilindro la pressione corrispondente all'accorciamento β, giacchè sussiste la proporzione

$$c\theta\lambda : 0^m,76\mu'g=\beta:\frac{0^m,76\mu'g\beta}{c\theta\lambda}.$$

Ond' è chiaro che la pressione esercitata contro la nostra colonna liquida o solida che ha per base πr^2, ovvero la sua forza motrice e reazione elastica, si rappresenta colla quantità

$$\pi r^2\,\frac{0^m,76\,\mu'g\beta}{c\theta\lambda}\,,\quad \text{ossia}\quad \pi r^2.\,0^m,76\,\mu'g\,\frac{\delta}{\lambda}\ :$$

d'altra parte la misura della stessa forza motrice è pure $\pi r^2 c\theta\mu\delta\frac{c}{\theta}$, come abbiamo già dichiarato nel numero (5°); per conseguenza uguagliando le due espressioni della forza e risolvendo l'equazione rispetto alla quantità c, veniamo a stabilire la formola

$$(\alpha''') \qquad c=\sqrt{\frac{0^m,76\mu' g}{\mu\lambda}}$$

che serve a determinare la velocità del suono nei corpi sì liquidi come solidi.

Possiamo rendere più semplice la formola stabilita, coll'introdurvi l'accorciamento ε che in un cannello di materia liquida o solida che abbia la lunghezza di un metro, produrrebbe una pressione equivalente al suo peso. Le altezze di due cilindri, che sieno composti di diversa materia ed abbiano la stessa base e lo stesso peso, stando fra loro inversamente alle densità; il rapporto $\frac{\mu}{\mu'}$ esprimerà l'altezza di una colonna di mercurio, la quale si equilibra con un cannello di altra materia che abbia un metro di lunghezza. Per lo che a trovare il valore della contrazione ε, giusta la legge sperimentale che testè abbiamo ricordato, basterà scrivere la proporzione $0^m,76:\lambda=\frac{\mu}{\mu'}:\varepsilon$, la quale ci dà immediatamente

$$\varepsilon=\frac{\mu\lambda}{0^m,76\mu'}\ , \qquad \frac{0^m,76\mu'}{\mu\lambda}=\frac{1}{\varepsilon}\ .$$

Colla sostituzione di quest'ultimo valore, la formola (α''') si trasmuta nell'altra più semplice

$$(\alpha^{\text{IV}}) \qquad c=\sqrt{\frac{g}{\varepsilon}}\ .$$

10°. Le due formole (α''') ed (α^{iv}) sono state stabilite senza tener conto del calorico sviluppato nelle piccole compressioni dei corpi liquidi e solidi: ma siccome esse ben si accordano coll'esperienza, così quel calorico deve credersi poco o nulla sensibile ed efficace nella trasmissione del suono attraverso ai corpi liquidi o solidi; e noi possiamo servirci dell'una o dell'altra formola secondo il maggior comodo, per calcolare con esattezza la velocità del suono nei medesimi corpi. Facciamone l'applicazione all'acqua, al mercurio ed al ferro.

1. Rispetto all'acqua stillata e non priva di aria i sigg. Colladon e Sturm con proprii esperimenti trovarono il coefficiente di compressibilità $\lambda = 0{,}000049$: presa dunque al solito la densità μ per unità, e fatta $\mu' = 13{,}5959$ e $g = 9^m{,}8034$; dalla formola (α''') risulta

$$c = \sqrt{\frac{101^m{,}297395}{0{,}000049}} = \sqrt{2067293^m{,}77} = 1437^m{,}8\,;$$

e così la velocità del suono è oltre a quattro volte maggiore nell'acqua che nell'aria.

2. Giusta l'esperienza dei medesimi autori, il coefficiente di compressibilità pel mercurio è $\lambda = 0{,}000005$; dunque poichè in questo caso abbiamo $\mu = \mu'$, dalla stessa formola otterremo

$$c = \sqrt{\frac{0^m{,}76 . 9{,}8034}{0{,}000005}} = \sqrt{1490116^m{,}80} = 1220^m{,}7\,;$$

e così la velocità del suono è quasi quattro volte maggiore nel mercurio che nell'aria.

3. Quanto al ferro, secondo Dulau, il peso richiesto per accorciare di 0,0001 della sua lunghezza un filo di ferro, che abbia per sezione un millimetro quadrato, è di due chilogrammi. Ora due chilogrammi di un tal filo corrispondono alla lunghezza di $256^m{,}41$ incirca: perchè l'altezza di una colonna d'acqua che avesse per base un millimetro quadrato e pesasse due chilogrammi,

arrivando a 2000 metri, quella di una somigliante colonna di ferro che ha un peso specifico sette volte e otto decimi maggiore, dovrà essere di $\frac{2000^m}{7,8} = 256^m,41$. Quindi è che potendosi rappresentare i pesi delle diverse parti del filo colle relative lunghezze, l'accorciamento ε prodotto nella lunghezza di un metro da una pressione equivalente al suo peso, si ricaverà dalla proporzione

$$256,41 : 0,0001 = 1 : \varepsilon \left(= \frac{0,0001}{256,41} = 0,00000039 \right);$$

e per conseguenza messa in opera la formola (α^{IV}), la velocità del suono nel ferro sarà

$$c = \sqrt{\frac{9^m,8034}{0,00000039}} = \sqrt{25136923^m} = 5013^m,6$$

vale a dire più di quindici volte maggiore che nell'aria. Negli altri metalli la velocità del suono, presa per unità quella che ha luogo nell'aria, si trova fra i limiti 4 e 17; e nelle diverse specie di legni varia da 10 a 17.

11°. **Forma dell'onda sonora.** Finora noi abbiamo supposto che all'estremità di una colonna aerea il piano PP, o l'elemento di una superficie vibrasse con moto equabile e con velocità costante di qua e di là dalla sua posizione di equilibrio, e che perciò nelle due parti dell'onda sonora fosse uniforme l'accrescimento positivo o negativo di densità, di pressione e di temperatura; ma in realtà il piano oscilla con moto vario e produce nei diversi strati della semi-onda dilatata o condensata diverse velocità di oscillazione, come anche variazioni differenti di densità, di elasticità e di temperatura. E vaglia il vero: le particelle di un corpo elastico o sonoro, rimosse di una piccolissima quantità x dalla rispettiva posizione di equilibrio, tendono a ritornarvi con una forza acceleratrice φ, la quale dipende dalla distanza x, e si può svolgere sem-

pre in una serie ordinata secondo le potenze ascendenti della stessa variabile x; sicchè dinotando con A_0, A_1, A_2, A_3,...... i coefficienti costanti e indeterminati della serie, possiamo esprimere la forza φ colla formola $\varphi = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$: ma fatta $x = 0$, si trova $A_0 = 0$; e attesa la piccolezza delle vibrazioni, possono trascurarsi senza errore sensibile le potenze della distanza x superiori alla prima: sarà dunque $\varphi = A_1 x$; cioè la forza acceleratrice, che sollecita le particelle del piano PP, o dell'elemento di una superficie vibrante, può risguardarsi come proporzionale ai piccoli spazii che restano a percorrersi dalle medesime molecole fino alla nativa posizione di equilibrio. Ora abbiamo dimostrato nella Meccanica (262) che quando la forza è proporzionale alla distanza da un centro fisso, ossia allo spazio che un punto materiale deve percorrere fino al centro, in cui rimarrebbe per sè stesso in equilibrio, le oscillazioni del punto mobile si fanno con velocità variabile, la quale sempre più si diminuisce di qua e di là dal centro fisso: dunque la velocità dell'elemento o piano PP che oscilla fra i limiti A'A' ed AA (fig. 198ª), nulla com'è in A', andrà crescendo fino in P dove è massima, e da questo punto si diminuirà continuamente e si estinguerà di nuovo iu A, prima che colle medesime vicende cangi direzione, andando il piano nel verso opposto. Quindi è che comunicandosi di mano in mano le successive velocità del piano vibrante ai diversi strati della colonna aerea, l'onda sonora ABC che si forma ad ogni due vibrazioni del piano e si propaga per tutta la colonna, non solo sarà composta della parte AB in cui l'aria si dilata movendosi verso l'elemento PP, e della parte BC in cui l'aria si condensa discostandosi dallo stesso elemento; ma di più si troverà nello stato di riposo in BB, e da cotesta sezione media le sue molecole oscilleranno simultaneamente in sensi contrarii con velocità crescenti sino alle sezioni medie della semi-onda sì dilatata come condensata, e dipoi decrescenti fino alle due sezioni estreme.

Dalla qual cosa proviene che l'incremento di densità, di pressione e temperatura, non che mantenersi uniforme per le singole semi-onde, sia invece soggetto alle stesse vicissitudini della velocità oscillatoria: ma non per questo è a dire che la velocità del

suono o di propagazione delle onde, la quale è ben distinta dalla velocità vibratoria delle molecole, sia punto diversa da quella che abbiamo già definito nei numeri precedenti. Imperocchè se il detto incremento non è uniforme in tutti gli strati, può nondimeno considerarsi una variaziono media e costante per le singole semi-onde; e così per determinare la velocità del suono varranno le formole di già trovate, nelle quali del resto non entrano per nulla le variazioni di densità, di pressione o di temperatura. Alla formola della velocità del suono crediamo bene di aggiungere le formole, con cui si determina il moto di una molecola vibrante, sia che essa appartenga al corpo sonoro, sia ancora che appartenga al mezzo, per il quale si trasmette il suono.

12°. **Formole del movimento di una molecola vibrante.** Nel numero precedente abbiamo dimostrato che spostate un poco e oscillando le parti di un corpo sonoro, ciascuna molecola tende verso la propria situazione di equilibrio con una forza proporzionale alla sua distanza dalla medesima posizione: dunque chiamando a la distanza iniziale o il massimo spostamento, x la distanza dopo il il tempo t contato dal principio del moto o da una posizione estrema di una molecola, μ la forza acceleratrice all'unità di distanza, avremo nel movimento della molecola vibrante quelle stesse formole

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{arc.cos} \frac{x}{a}, \quad v = \sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - x^2},$$

che nel citato numero (262) della Meccanica sono state stabilite pel moto di un punto attratto verso un centro di azione proporzionalmente alla distanza. Da queste formole si deducono immediatamente le altre due

$$x = a\cos(t\sqrt{\mu}), \quad v = \sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - a^2\cos^2(t\sqrt{\mu})} = a\sqrt{\mu}\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\mu}),$$

le quali bastano a determinare il movimento della particella vibrante, facendoci conoscere alla fine di un dato tempo la sua distanza

dalla posizione di equilibrio e tutt'insieme la sua velocità oscillatoria. Conviene adesso eliminare dalle due formole la forza μ, e introdurvi il tempo t' che corrisponde a una duplice oscillazione del corpo sonoro, e alla formazione di un'onda nel mezzo di propagazione del suono. Il tempo che spende ciascuna molecola per arrivare da una posizione estrema a quella di equilibrio, è costante (262) ed espresso da $\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$; perciò un tempo quadruplo sarà $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}=t'$, che ci dà $\sqrt{\mu}=\frac{2\pi}{t'}$: così le due formole del moto di una particella vibrante divengono

$$(\alpha^{\text{v}}) \qquad x=a\cos\frac{2\pi t}{t'}\,,\quad v=a\,\frac{2\pi}{t'}\,\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{t'}\,.$$

I movimenti di una molecola vibrante comunicandosi successivamente alle molecole del mezzo elastico, in cui si propaga il suono, le formole (α^{v}) potranno anche applicarsi al moto oscillatorio di una molecola del mezzo, purchè in esse s'introduca la conveniente differenza di epoca. Sia d la distanza di una particella p. es. aerea da una particella vibrante del corpo sonoro, e c sia la velocità uniforme del suono nell'aria; il moto della particella vibrante non comincerà a trasmettersi alla particella aerea se non dopo trascorso il tempo $\frac{d}{c}$; e così passato un tempo t dal principio delle oscillazioni di un corpo, la molecola aerea rispetto alla propria posizione di equilibrio possederà quello stesso movimento onde era animata la molecola del corpo oscillante alla fine del tempo $t-\frac{d}{c}$. Per la qual cosa se nelle formole (α^{v}) si sostituisce $t-\frac{d}{c}$ in luogo del t, le due formole risultanti

$$(\alpha^{\text{vi}}) \qquad x=a\cos\frac{2\pi}{t'}\left(t-\frac{d}{c}\right),\quad v=a\,\frac{2\pi}{t'}\,\operatorname{sen}\frac{2\pi}{t'}\left(t-\frac{d}{c}\right)$$

come determinano il moto di una molecola del corpo sonoro pel tempo $t - \frac{d}{c}$, così valgono pure a determinare il movimento vibratorio di una particella del mezzo pel tempo t, e alla distanza d. Quando d è costante, e t è variabile, le formole (α^{v}) rappresentano le diverse agitazioni che si succedono in un medesimo punto dell'aria: quando all'opposto d è variabile e t costante, le medesime formole rappresentano le agitazioni simultanee dei diversi punti dell'aria. Vedremo nel seguente capo la modificazione da farsi nella seconda formola, allorchè il suono si propaga nell' ariä liberamente tutto all'intorno.

13°. **Eco e risuonanza.** Accade talvolta che parlando noi a voce alta in certi luoghi, dopo qualche istante sentiamo di nuovo le ultime parole o sillabe da noi profferite: cotesta ripetizione di parole o di sillabe nell'aria è detta *eco*, e proviene dal riflettersi che fanno le onde sonore e tornare indietro, quando s'imbattono in un ostacolo che sia elastico o duro. Infatti noi sappiamo che il moto di un corpo perfettamente elastico, il quale vada ad urtare in un piano immobile, cangia direzione e si riflette con tal legge che riescano uguali gli angoli d' incidenza e di riflessione; dunque essendo l'aria del tutto elastica, le onde in essa generate dal corpo sonoro, se nella propagazione diretta incontrino per avventura un qualche ostacolo, debbono rimbalzare indietro colla legge accennata, e formare così un secondo suono della stessa voce, ossia un suono riflesso. Nell'aria libera la riflessione delle onde sferiche si fa in quel medesimo modo, che vediamo nelle onde circolari di un'acqua stagnante: come i circoli formatisi nell' acqua per la caduta di un sassolino, toccando la sponda retrocedono con quell' ordine con cui vi approdano; così le onde sferiche dell'aria si ripercuotono ordinatamente dall' ostacolo e ricalcano la via già corsa quasi che tutte fossero prodotte da un centro situato dalla banda opposta dell'ostacolo medesimo: peraltro in questo caso il suono riflessso è più debole del suono diretto; perchè in un mezzo libero l'intensità di un suono qualunque, come diremo di poi, varia inversamente al quadrato della distanza dal suo centro reale o virtuale.

Perchè possa percepirsi il suono riflesso o l'eco di una sillaba è necessario che l'ostacolo riflettente sia posto almeno alla distanza di 17 metri da chi pronuncia la sillaba. Imperocchè nel profferire una sillaba s' impiega un decimo di minuto secondo circa, siccome ciascuno può verificare osservando il tempo speso a leggere un certo numero di sillabe, e dividendo questo numero pel tempo osservato: perciò altrettanto tempo dee passare dalla partenza di una voce monosillaba al suo ritorno nello stesso punto, affinchè il suono riflesso non si confonda col suono diretto: ora il suono nell'aria ordinariamente percorre con moto uniforme 340 metri in un minuto secondo, ossia 34 metri in un decimo di secondo; adunque perchè il suono emesso ritorni al nostro orecchio dopo un decimo di minuto secondo e si distingua l'eco *monosillaba*, è mestieri che l'ostacolo riflettente sia collocato per lo meno alla distanza di 17 metri. Se l'ostacolo si trovasse lungi da noi a una distanza doppia, tripla ec. di quella che abbiamo detta, l'eco sarebbe *polisillaba*, cioè ripeterebbe le ultime due, tre o più sillabe che noi avessimo pronunciato a voce un po' alta. L'eco può essere eziandio *unifona* o semplice, ovvero *polifona* o multipla, secondochè ripete una medesima voce e suono una sola volta, ovvero più volte successivamente: nasce l'eco multipla sia dalla presenza di parecchi ostacoli che riflettano il suono a diverse distanze, sia ancora dalla conveniente posizione di due superficie o muri paralleli che a vicenda si rimandino l'uno all'altro le onde incidenti dell'aria.

Quando la distanza di una superficie o di una parete riflettente è minore di 17 metri, allora il suono riflesso si confonde più o meno col suono diretto, e l'eco non può sentirsi distintamente: in questo caso il suono sarà rinforzato, e solo avrà luogo una *risuonanza* o un rimbombo, come non di rado incontra di sperimentare in qualche sala o tempio. Sotto certe vôlte e in certe camere, specialmente in quelle di forma ellittica, succede ancora che due persone, separate l'una dall'altra e situate a due punti fissi, possano conversare tra loro a voce bassa, senza che siano ascoltate dalle persone circostanti: è questo un effetto della ri-

flessione, che si fa secondo la legge menzionata di sopra; perchè attesa siffatta legge, il suono che parte da un foco dell' ellissi, deve tutto riflettersi dalla vôlta e concentrarsi nell' altro foco, come apparisce dal numero (XVII) della Introduzione.

CAPO II.

QUANTITA' E QUALITA' DEL SUONO

14°. **Intensità del suono.** La maggiore o minor forza ed energìa, con cui un suono si fa sentire, dicesi quantità o *intensità* del medesimo. Dipende questa sì dalla densità dell' aria in cui si propaga il suono, come anche dall' ampiezza delle oscillazioni che compiono in un medesimo tempo le molecole del corpo sonoro e dell' aria. Perchè è cosa evidente che l' intensità e la sensazione del suono deve essere più o meno forte, secondochè maggiore o minore è la forza viva, onde l' aria agisce sull' organo dell' udito, comunicandogli i suoi moti vibratorii: ora la forza viva dell' aria che sotto un determinato volume agisce immediatamente sull' organo dell' udito, cresce o diminuisce sia colla massa che varia in proporzione della densità, sia col quadrato della velocità vibratoria la quale varia (z^{vi}. 12°) in ragione dell' ampiezza delle oscillazioni trasmesse dal corpo sonoro: dunque l' intensità del suono dipende talmente dalla densità dell' aria e dall' ampiezza delle oscillazioni ricevute dal corpo sonoro, che si rafforza coll' ingrandirsi di queste due cagioni, e s' indebolisce coll' impiccolire delle medesime cagioni.

Cotesta verità che la ragione ci persuade, è pure confermata dall'esperienza. Conciossiachè a tacere di altri fatti, sui monti assai elevati un suono o rumore è più debole che nella pianura; e un dato corpo rende un suono tanto più forte, quanto più gagliarda è la percossa a cui si assoggetta: il primo fatto procede apertamente dall' essere l' aria meno densa sul monte che nel piano, e il secondo non può derivarsi, se non dalle oscillazioni più

estese che una percossa più gagliarda produce prima nelle molecole elastiche del corpo, e quindi per comunicazione in quelle dell' aria atmosferica. Così pure il suono di una sveglia sotto la campana della macchina pneumatica o di compressione sentesi tanto più rimesso o più intenso, quanto più l'aria si rarefà ovvero si condensa nell'una o nell' altra macchina: ciò dimostra che in proporzione della densità è il moto concepito dall' aria interna della campana e trasmesso poi all'aria esterna, e che dipende per conseguenza dalla stessa densità l'impressione più o meno forte del suono sull' organo dell' udito. Un terzo fatto che si può sperimentare, è questo che il suono si diminuisce pel calore in un' aria aperta e si accresce in un' aria chiusa: or l'aria aperta pel calore si dilata e diviene meno densa, senza che debba rendersi più elastica, potendo liberamente riversarsi sugli spazii circostanti; laddove un'aria chiusa da ogni parte, pel calore acquista maggiore elasticità ed oscilla perciò fra due limiti più estesi, senza che si alteri punto la sua densità: è dunque manifesta la dipendenza dell' intensità del suono dalla densità delle parti vibranti e dalla grandezza delle vibrazioni.

15°. **Legge dell'intensità del suono nella propagazione libera.** Se il suono si propaga attraverso a un mezzo omogeneo, per es. all' aria, in un tubo di grossezza uniforme, la sua intensità, come è chiaro, deve conservarsi costante a qualunque distanza dall' origine, e tutto al più sarà un poco diminuita dall' attrito dell' aria contro le pareti del tubo che naturalmente viene accorciando in parte le vibrazioni primitive: è ciò conforme all'esperienze di Biot, il quale negli acquidotti di Parigi all'estremità di una colonna d' aria della lunghezza di 951 metri poteva parlare a voce bassa con persone situate all' altra estremità, come se gli fossero state dappresso.

Quando però il suono si propaga liberamente attraverso a un mezzo omogeneo in onde sferiche, la sua intensità varia in ragione inversa del quadrato della distanza dal centro sonoro. Imperciocchè trasfondendosi il suono da una superficie sferica ad

un'altra concentrica, è chiaro che dovrà tanto debilitarsi, quanto cresce estensivamente, ossia quanto si spande più la materia a cui è trasmesso il moto vibratorio: sicchè l'intensità del suono segue la ragione inversa delle superficie sferiche, sulle quali successivamente si diffonde: ma queste superficie variano nella ragion diretta dei quadrati de' loro raggi o distanze dal centro sonoro; dunque l'intensità del suono in un mezzo libero ed omogeneo segue la ragione inversa delle distanze quadrate dal centro sonoro.

16°. La qual cosa possiamo anche provare col calcolo nel seguente modo. Indicando con m, v la somma e la velocità delle molecole aeree, onde si compone una superficie sferica alla distanza variabile z dal centro sonoro, sappiamo dalla teoria dei corpi elastici (Mecc. 241) che la velocità della superficie posta alla distanza $z+dz$, dopo l'urto e la comunicazione del moto, vien data dalla formola

$$V'=\frac{(m'-m)v'+2mv}{m+m'} ;$$

ossia dalla formola

$$V'=\frac{2mv}{2m+dm}=v-v\frac{dm}{2m} ,$$

se supponiamo, come è di ragione, $v'=0$ ed $m'=m+dm$, e se inoltre ci atteniamo solo alle quantità infinitesime di primo ordine. Si vede quindi che passando i tremiti da una superficie all'altra, la velocità oscillatoria soffre un decremento infinitamente piccolo, che diverrà ben presto sensibile. Ora per trovare la legge di questa variazione finita, cerchiamo la variazione infinitesima dv, ovvero $V'-v$, la quale secondo l'ultima formola si esprime per l'equazione differenziale

$$dv = V' - v = -\frac{v\,dm}{2m}\ :$$

ma le masse delle diverse superficie sferiche sono fra loro, come i quadrati de' raggi o delle distanze dal comun centro di scotimento; cotalchè se dicasi m_1 la massa della superficie all' unità di distanza, si hanno i valori $m = m_1 z^2$, $dm = 2m_1 z\,dz$: dunque sussisterà l' equazione differenziale $dv = -\frac{v\,dz}{z}$, e per conseguenza l' equazione finita $\log(v) = -\log(z) + C$; la quale chiamando v_1 la velocità vibratoria alla distanza $z = 1$, ci dà l' espressione $v = \frac{v_1}{z}$. Il perchè in un mezzo libero ed omogeneo la velocità di oscillazione varia inversamente alla distanza dal centro sonoro; e conforme a tal variazione vuol essere la modificazione da introdursi, come fu già avvertito, nella seconda formola (z^{VI}) del numero (12°).

Ciò posto, l'azione per es. dell' aria vibrante sull' organo dell' udito può rassomigliarsi veracemente a un lavoro meccanico, e si misura (Din. cap. XI) dalla metà della forza viva: e siccome la massa dell' aria, la quale agisce sull' organo dell' udito, è costante; così la detta azione o l'intensità del suono varierà proporzionalmente alla sola velocità quadrata delle molecole aeree, da cui è percosso il timpano dell' orecchio. Pertanto se rappresentiamo con i l' intensità del suono alla distanza z dal centro sonoro, e con k una quantità costante, atteso il valore di v testè ritrovato, avremo $i = kv^2 = \frac{kv_1^{\,2}}{z^2}$; e ciò mostra che l' intensità del suono varia nella ragione inversa del quadrato delle distanze dal corpo sonoro.

17°. Osserviamo qui due cose. La prima è che il vento favorevole accresce non solo la velocità, ma ancora l' intensità del suono: così il suono di una campana o il fragore di un cannone si sente meglio nella direzione del vento che nella direzione op-

posta; e spesso coll'aiuto del vento cospirante si può sentire a tal distanza, in cui altrimenti non si distinguerebbe. La ragione di questo fenomeno si è che l'aria essendo trasportata dal vento, se questo è favorevole, perverranno all'orecchio le onde meno lontane dal corpo sonoro, le quali, come abbiamo detto, sono capaci di produrre un suono più intenso.

La seconda osservazione è che un suono, sia esso intenso oppure sia rimesso, in uno stesso mezzo si propaga sempre colla medesima velocità: così a una data distanza arrivano in ugual tempo il rumore di un cannone, e il suono di un martello; e a diverse distanze da un corpo sonoro, il suono comincia a sentirsi dopo tali tempi che stanno sempre in proporzione colle distanze, quantunque nell'aria aperta lo stesso suono debba affievolire col dilungarsi dal centro. La ragione di questo fatto si è che trattandosi di uno stesso corpo sonoro, le sue oscillazioni che sono la causa del suono più o meno intenso secondo la diversa loro estensione, per la legge della forza acceleratrice (11°., e Mecc. 262.) si fanno tutte in ugual tempo; e perciò nelle onde aeree saranno sempre identici gli elementi da cui dipende la velocità del suono, vale a dire la loro lunghezza e il tempo in cui si formano: trattandosi poi di corpi differenti, o le loro oscillazioni benchè di diversa ampiezza sono sincrone, e allora i rispettivi suoni comechè di diversa intensità si propagheranno con ugual velocità per la ragione esposta nel primo caso; ovveramente le loro oscillazioni sono d'ineguale durata, e allora le lunghezze delle onde rispettive saranno proporzionali ai tempi in cui si formano, e però il suono si diffonderà pure nell'aria con una sola velocità. Questo ultimo caso dimostra che la velocità è sempre la stessa anche pei suoni di vario carattere, dei quali passiamo ora a parlare.

18°. **Qualità del suono.** Nel suono si distinguono principalmente due caratteri o qualità, or dicendosi che esso è *grave* ed or che è *acuto*. La differenza fra il suono grave e l'acuto non può derivarsi che dalla diversa celerità delle oscillazioni eccitate prima nelle parti del corpo sonoro, e poscia comunicate alle molecole dell'aria. Imperocchè la diversa impressione, che il suono grave e il

suono acuto fanno sull' organo dell' udito, suppone senza dubbio ed esige un diverso movimento, sia nell' aria da cui quella impressione è immediatamente prodotta, sia nel corpo sonoro da cui si origina: or da una banda, quanto alla formazione del suono, nel moto del corpo sonoro e dell' aria non può ammettersi altra specie tra queste due, o che le oscillazioni delle loro particelle sieno quando più e quando meno estese, ovvero che si compiano in un tempo or più lungo ed or più breve; d' altra banda la prima specie di moto influisce soltanto sulla quantità od intensità del suono, come abbiamo chiarito nel numero (14°.): dunque l' impressione del suono grave od acuto esige una diversità nella seconda specie di moto; e la differente qualità del suono procede dalla diversa durata o celerità delle oscillazioni sì primitive del corpo sonoro, come derivate dell' aria.

L' esperienza viene a confermare la stessa verità; e ci fa inoltre conoscere che i suoni bassi o gravi rispondono a un piccolo numero di oscillazioni eseguite in un dato tempo, e che i suoni alti od acuti risultano per contrario da un gran numero di vibrazioni. Infatti è noto che le corde vibranti negli strumenti musicali, mandano un suono tanto più grave, quanto sono più lunghe o men tese, e quanto maggiore è il loro diametro o la loro densità; e che all' opposto le medesime corde rendono un suono tanto più acuto, quanto sono men lunghe o più tese, e quanto minore è il diametro o la loro densità: ma le corde più lunghe o men tese e di maggior diametro o densità, quando risuonano, fanno e trasmettono all' aria in un tempo determinato un minor numero di oscillazioni, che le corde men lunghe o più tese e di minor diametro o densità, siccome può sensibilmente verificarsi anche ad occhio nudo: dunque i suoni gravi od acuti sono l' effetto del minore o maggior numero di vibrazioni che in pari tempo compiono le molecole dei corpi sonori e dell' aria atmosferica.

In questo luogo crediamo cosa utile il dimostrare col calcolo la legge or mentovata sul numero delle oscillazioni di una corda vibrante, premettendo la soluzione del problema, in cui si cerca l' equazione della curva formata dalla medesima corda.

19°. **Equazione della curva nelle piccole oscillazioni di una corda.** Una corda AB (fig. 199a.) di grossezza uniforme, ugualmente tesa in tutte le parti e fissata alle due estremità nei punti A e B, si rimuova un pochetto dalla sua posizione di equilibrio; e condotta a una data forma AH_0B, si abbandoni a sè medesima sicchè oscilli di qua e di là dalla retta AB: di tal guisa oscillando la corda intorno alla sua posizione di equilibrio, si domanda l'equazione della curva AH'B, in cui essa si configura a un dato istante.

Sieno $x = AH$, $y = H'H$ le coordinate ortogonali di un punto H' della curva; e sieno pure rispettivamente m, l, θ la massa, la lunghezza e la tensione della corda AB. Supposto assai piccole le oscillazioni, il massimo scostamento della corda dalla posizione di equilibrio sarà quasi insensibile, e però saranno prossimamente vere le tre asserzioni seguenti: cioè 1. che la tensione presso ciascun punto H' della corda vibrante rimane sempre costante; 2. che lo stesso punto H' si muove soltanto nella direzione H_0H della sua ordinata; 3. che gli archi corrispondenti agli angoli α, ed $\alpha - d\alpha$, che coll' asse delle ascisse fanno i due lati consecutivi della curva o le due tangenti nel punto H', si confondono coi rispettivi seni e tangenti trigonometriche. Quindi a motivo della prima asserzione la quantità θ esprimerà presso il punto H' le tensioni della corda dirette secondo i lati $H'i$ ed $H'i'$, ossia secondo le tangenti $H'iT$ e $T'H'i'$: risolute inoltre queste tensioni in due componenti, una delle quali sia parallela e l'altra perpendicolare all' asse AB, per ragione della seconda asserzione le componenti parallele ad AB dovrano elidersi scambievolmente: restano dunque le componenti perpendicolari, cioè la forza $-\theta \operatorname{sen} \alpha$ che spinge il punto H' verso H, e la forza $\theta \operatorname{sen}(\alpha - d\alpha)$ che sollecita lo stesso punto verso H_0; e queste due forze, attesa la terza asserzione, possono esprimersi per $-\theta\alpha$ e $\theta(\alpha - d\alpha)$, e si compongono in una sola forza $-\theta\, d\alpha$ che genera il moto dell'elemento dm della corda nella direzione H'H. Pertanto la forza acceleratrice nel moto dell'elemento vibrante sarà $-\frac{\theta d\alpha}{dm}$: e siccome da una parte l'angolo $\alpha = \operatorname{tang} \alpha$

$= \frac{dy}{dx}$, variando in una stessa curva AH'B deve differenziarsi rispetto alla sola x, e ci somministra il valore $d\alpha = \frac{d^2y}{dx}$, dall'altra parte per l'uniforme grossezza della corda le diverse porzioni di questa sono proporzionali alle masse corrispondenti e ci danno il valore $dm = \frac{mdx}{l}$; così la suddetta forza acceleratrice si ridurrà all'espressione

$$-\frac{\theta l}{m} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{ovvero} \quad -k^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

se per brevità facciamo $\frac{\theta l}{m} = k^2$.

Or la medesima forza è proporzionale, come abbiamo altrove (11°.) dichiarato, alla distanza dell'elemento vibrante dalla posizione di equilibrio; e perciò si esprime ancora per μy, essendo μ la sua intensità alla distanza $= 1$: dunque possiamo stabilire l'equazione $-k^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \mu y$, ossia

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\mu}{k^2} y = 0 .$$

La quale equazione lineare e differenziale di secondo ordine, se si confronti coll' equazione già integrata nel numero (CXII) dell' Introduzione alla Meccanica, è chiaro che ha per integrale completo

$$y = Ce^{x \frac{\sqrt{\mu}}{k} \sqrt{-1}} - C'e^{-x \frac{\sqrt{\mu}}{k} \sqrt{-1}} :$$

e poichè annullandosi insieme x ed y, si ottiene $C = C'$; per-

ciò avuto anche riguardo alle cose dette sulla fine del numero citato e rimesso il valore di k, risulterà

$$y=C\left[e^{x\frac{\sqrt{\mu}}{k}\sqrt{-1}}-e^{-x\frac{\sqrt{\mu}}{k}\sqrt{-1}}\right]$$

$$=2C\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\left(x\frac{\sqrt{\mu}}{k}\right)=2C\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\left(x\sqrt{\frac{\mu m}{\theta l}}\right).$$

Da cotesta equazione, a motivo delle coordinate corrispondenti $x=l$ ed $y=0$, si deriva la formola

$$\mathrm{sen}\left(l\sqrt{\frac{\mu m}{\theta l}}\right)=0,\quad \text{ovvero}\quad l\sqrt{\frac{\mu m}{\theta l}}=\pi,$$

e quindi il valore della forza $\mu=\frac{\pi^2\theta}{ml}$; ond' è che la stessa equazione si riduce alla forma

$$y=2C\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{l}x\right).$$

Da ultimo chiamando y' l' ordinata D'D che corrisponde all'ascissa AD $=\frac{1}{2}l$, avremo $y'=2C\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}=2C\sqrt{-1}$; per conseguenza sussisterà

$$(\beta)\qquad y=y'\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{l}x\right),$$

che è l' equazione cercata alla curva AH'B della corda vibrante.

20°. Nodi e ventri delle corde vibranti. Quando si fa vibrare una parte aliquota di una corda tesa, toccando leggermente col dito un punto mobile della medesima, o ponendo a una data di-

stanza dall' estremità un piccolo cavalletto che non intercetti la comunicazione del movimento dall' una all' altra porzione; la corda si divide allora in un numero intero di parti uguali alla porzione scossa, le quali vibrano tutte alternamente di sopra e di sotto alla linea di equilibrio, come se ciascuna parte fosse separata dal resto della corda. Se per es. si fa vibrare la terza parte AB (fig. 200ª) della corda AE fissata in A ed E, oscillano insieme le tre porzioni uguali AB, BC, CE, formando la curva punteggiata ABCE, in cui oltre alle due estremità della corda restano immobili anche i punti B e C: la qual cosa siccome possiamo noi riconoscere, osservando che i pezzetti di carta posti a cavalcione della corda sono appena agitati in B e C, e sbalzati lungi negli altri punti; così possiamo ancora dichiarare, servendoci dell' equazione già trovata alla curva.

Ritenute le denominazioni del numero precedente, sia t il tempo in cui la parte vibrante AB passa dalla posizione estrema alla posizione AH'B, t' il tempo di due oscillazioni, a la distanza iniziale del punto D' dalla linea di equilibrio: l'ordinata y'=D'D, la quale corrisponde all' ascissa AD $=\frac{1}{2}$AB $=\frac{1}{2}l$, giusta la prima formola (α'. 12°) avrà per valore $a\cos\frac{2\pi t}{t'}$, e quindi l' equazione (β. 19°) tra le coordinate di un punto qualunque H' diviene

$$y = a\cos\frac{2\pi t}{t'}\ \mathrm{sen}\ \frac{\pi x}{l}\ .$$

Da questa equazione 1. risulta $y=0$ per le ascisse $x=0$, $=l$, $=2l$, $=3l$; dunque oltre alle due estremità A ed E, restano immobili anche i punti intermedii B e C. — 2. Preso $\mathrm{BH}_1=\mathrm{CH}_2=\mathrm{AH}=x$, cosicchè sieno $\mathrm{AH}_1=l+x$ ed $\mathrm{AH}_2=2l+x$; e successivamente sostituite nella medesima equazione le ascisse $l+x$, $2l+x$ in luogo della x, risulteranno le ordinate y_1 ed y_2 corrispondenti ai punti H_1 ed H_2, le quali saranno espresse per

$$y_1 = a\cos\frac{2\pi t}{t'}\ \mathrm{sen}\left(\pi+\frac{\pi x}{l}\right) = -\ a\cos\frac{2\pi t}{t'}\ \mathrm{sen}\ \frac{\pi x}{l}\ ,$$

$$y_4 = a\cos\frac{2\pi t}{t'}\,\text{sen}\left(2\pi + \frac{\pi x}{l}\right) = a\cos\frac{2\pi t}{t'}\,\text{sen}\frac{\pi x}{l}\ :$$

dunque $y_1 = -y$, ed $y_4 = y$; per tal modo essendo uguali e contrarie le ordinate y ed y_1, e per l' opposto essendo uguali e rivolte verso la stessa banda le ordinate y ed y_4, ne segue che le parti AB, BC, CE della corda oscillano ugualmente e con alternativa al di qua e al di là della posizione di equilibrio.

I punti B e C che restano immobili, sogliono chiamarsi ***nodi*** della corda vibrante; e si dicono ***ventri*** della medesima le parti comprese fra i nodi, oppure fra un nodo e una estremità fissa. È qui da avvertire che d' ordinario i nodi e i ventri si formano di per sè in una corda vibrante, accadendo che mentre questa oscilla in tutta la sua lunghezza, dividasi pure in un numero di parti uguali che vibrano separatamente senza disturbarsi: che anzi ogni corpo che risuoni, dividesi generalmente in più parti vibranti, le quali sono separate da ***linee nodali***, rette o curve; come ciascuno può verificare, spargendo di minutissima sabbia le superficie dei corpi sonori, e osservando come questa salti e s'accumuli nelle linee nodali. L'avvertenza che abbiamo fatto, risguarda sì le vibrazioni trasversali che si eseguiscono nella direzione perpendicolare all' asse delle corde, e sì le vibrazioni longitudinali che si fanno nella direzione parallela al medesimo asse, e si ottengono collo strofinare le corde nel senso della loro lunghezza. Ora è da tornare alla legge del numero delle oscillazioni, che di sopra (18°.) abbiamo promesso di dimostrare.

21°. Legge delle vibrazioni trasversali di una corda. Essendo la forza proporzionale alla distanza delle molecole dalla linea di equilibrio, il tempo t_1 di una sola vibrazione della corda (Mecc. 262) ha per espressione $\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$; e però chiamando n il numero delle vibrazioni fatte nell'unità di tempo, otterremo $n = \frac{1}{t_1} = \frac{\sqrt{\mu}}{\pi}$: e poichè abbiamo nel numero (19°) che $\mu = \frac{\pi^2 \theta}{ml}$, sa-

rà pure $n=\sqrt{\frac{\theta}{ml}}$. Ma se si chiama r il raggio della corda che supponiamo cilindrica, e δ la sua densità, $\pi r^2 l\delta$ si è il valore della massa m; dunque

$$(\beta') \qquad n=\frac{1}{rl}\sqrt{\frac{\theta}{\pi\delta}}\ .$$

Da questa formola apparisce che *il numero delle vibrazioni eseguite da una corda in un dato tempo è direttamente proporzionale alla radice quadra della tensione, e sta nella ragione inversa del suo raggio o diametro, della sua lunghezza e della radice quadra della densità*. È dunque vero ciò che asserimmo nel citato numero (**18°**.), vale a dire che le corde più lunghe o men tese e di maggior diametro o densità fanno in tempo determinato un minor numero di oscillazioni, che le corde men lunghe o più tese e di minor diametro o densità; e che per conseguenza dal numero delle oscillazioni fatte in un dato tempo proviene, che il suono di un corpo sia grave od acuto, ed abbia diversi gradi nell' una o nell' altra qualità.

I suoni gravi od acuti di due o più corpi quando siano accordati insieme o simultanei, producono ora una sensazione gradita all' orecchio ed ora una sensazione disaggradevole: dicesi *consonante l' accordo* o la simultaneità di due o più suoni, che riescano grati all' orecchio; e per contrario dicesi *accordo dissonante* la simultaneità di due o più suoni, che cagionano una sensazione poco o niente grata. L' arte della musica consiste nell' armonizzare insieme e combinare talmente i diversi suoni, che ne risulti una *consonanza* e si eviti qualunque *dissonanza*: diciamo alcuna cosa de' suoni che si sono adottati dagli esperti nell' arte musicale, e dei rispettivi accordi o consonanze

22°. Relazioni numeriche tra i diversi suoni della scala musicale. La scala musicale è una serie di suoni che con certa legge vanno crescendo in altezza, cominciando dal più gra-

ve fino al più acuto che possa percepirsi. Questi suoni ad ogni periodo di sette si riproducono elevandosi collo stesso ordine; e però sogliono dividersi in tanti gruppi, ciascuno de' quali è composto di sette suoni o *note*, e forma ciò che i musici chiamano *gamma* o *scala diatonica:* i sette suoni o note di ciascuna gamma progrediscono per salti od intervalli che sembrano fondati sull' organizzazione dell' udito umano, e si distinguono coi nomi ben conosciuti *do*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si;* le medesime note possono inoltre rappresentarsi pei numeri delle vibrazioni che corrispondono a ciascun suono, e quindi possono ancora paragonarsi tra loro numericamente.

A questo fine sia 1 la lunghezza di una corda, la quale vibrando renda il suono o la nota *do* di uno strumento musicale ; l' esperienza ha fatto conoscere che per avere le altre sei note della scala diatonica, bisogna che le lunghezze della medesima corda o di altre corde omogenee, ugualmente grosse e tese da uno stesso peso, sieno ridotte alle rispettive frazioni $\frac{8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{8}{15}$. Ora giusta la formola (β' . 21°) , i numeri delle vibrazioni compiute in un dato tempo dalle corde, a parità di altre circostanze, stanno nella ragione inversa delle loro lunghezze: dunque rappresentato pur coll' unità il numero delle vibrazioni che corrisponde al *do*, i numeri delle vibrazioni per le altre sei note saranno $\frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}$.

Con questi numeri possiamo rappresentare le stesse sette note di una data gamma: e come il numero delle vibrazioni che corrisponde a ciascuna nota di una gamma, è doppio di quello che corrisponde a ciascuna nota della gamma precedente; così otterremo i valori relativi delle note per le gamme più alte o più basse di quella che abbiamo or considerata, moltiplicando o dividendo per 2, 4, 8, ecc. i numeri soprascritti. Pertanto la relazioni numeriche tra i diversi suoni della scala musicale possono raccogliersi, e vengono date dalla tavola seguente:

Valori per le gamme inferiori	...	...	...	...	...	...	...
	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{15}{64}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{32}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{15}{16}$
Note di una gamma	*do*	*re*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*
Loro valori relativi	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$
Valori per le gamme superiori	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{15}{4}$
	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{16}{3}$	6	$\frac{20}{3}$	$\frac{15}{2}$
	8	9	10	$\frac{32}{3}$	12	$\frac{40}{3}$	15
	...	...	...	...	...	...	...

23°. Dalla serie dei rapporti già stabilita possono ricavarsi i valori assoluti di tutti i suoni della scala musicale, qualora si conosca il numero assoluto delle vibrazioni di una corda che rende una nota determinata. Tal cognizione può aquistarsi con varii mezzi, per es. colla ruota dentata di Savart o colla sirena di Cagniard-Latour si trova che il suono più grave del violoncello è prodotto da 128 per ogni minuto secondo; chiamando do_1 un siffatto suono, avremo le altre note di una gamma distinte collo stesso indice 1, ed espresse coi numeri assoluti delle vibra-

zioni, moltiplicando successivamente il numero 128 pei rapporti $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, . . . ; cioè avremo i valori della tavola seguente:

do_1	re_1	mi_1	fa_1	sol_1	la_1	si_1
128	144	160	170	192	214	240.

Le note delle gamme più acute o più gravi che distingueremo cogl'indici 2, 3, 4,.... ovvero -1, -2, -3,..... risultano dalla moltiplicazione o divisione delle note ora scritte pei numeri 2. 4, 8, ec. Così $re_2 = 2re_1 = 288$; $la_3 = 4la_1 = 856$, ed è la nota del *diapason* o corista che serve per accordare gli strumenti di un'orchestra; $mi_4 = 8mi_1 = 1280$, $fa_5 = 16\,fa_1 = 2720$, ... ; $sol_9 = 256\,sol_1 = 49152$: per contrario

$$sol_{-1} = \frac{1}{2}\,sol_1 = 96\,;\ si_{-2} = \frac{1}{4}\,si_1 = 60;\ do_{-3} = \frac{1}{8}\,do_1 = 16\ .$$

24°. **Limiti de' suoni percettibili, e della lunghezza delle onde sonore nell'aria.** Innanzi di proseguire la teoria fisica della musica, osserviamo che la sensibilità dell'udito umano non si estende a tutti i suoni possibili, ma è limitata sì per riguardo all'intensità, come per riguardo all'altezza de'suoni. Secondo l'esperienze fatte da Savart colla sua ruota un po' modificata, quando l'intensità sia bastevole a fare impressione sull'organo dell'udito, comunemente possono percepirsi i suoni prodotti da un numero di vibrazioni non inferiore a 16, e non superiore a 48000 per ogni minuto secondo. Ne viene quindi che i suoni sensibili, onde si compone la scala musicale, si estendono dal $do_{-3} = 16$ fin presso al $sol_9 = 49152$, cioè per più di undici gamme od anche ottave; giacchè le sette note di ciascuna gamma colla prima nota della gamma seguente costituiscono ciò, che in musica dicesi una *ottava*. Generalmente nelle composizioni di musica si

fa uso di sei o sette ottave: peraltro la voce dell'uomo si estende d'ordinario dal sol_1 al fa_3, cioè può produrre da 192 a 680 vibrazioni per secondo; e la voce della donna arriva dal re_3 fino al la_4, e però è capace di dare da 576 a 1712 vibrazioni per ogni minuto secondo.

Conosciuta la velocità del suono nell'aria e il numero delle vibrazioni che corrisponde ad una data nota, può facilmente calcolarsi la lunghezza di ciascuna onda sonora: a questo fine basta riflettere che siccome un' onda sonora si forma e si propaga ad ogni due vibrazioni del corpo sonoro, così nello spazio percorso dal suono in un minuto secondo si conterrà un numero di onde uguale alla metà del numero delle vibrazioni fatte pure in un secondo dal medesimo corpo; e però a determinare la lunghezza di ciascuna onda, non si avrà a fare altro che dividere il detto spazio o la velocità del suono per la metà del numero delle vibrazioni relative a una data nota. A cagion d'esempio, essendo di 340 metri la velocità media del suono nell'aria, la lunghezza dell'onda corrispondente al $do_1 = 128$ sarà di metri $\frac{340}{64} = 5^m, 312$: e stando ai limiti dei suoni sensibili che abbiamo accennato di sopra, la lunghezza dell'onda relativa al suono più grave sarà $\frac{340^m}{8} = 42^m, 5$; e la lunghezza dell'onda relativa al suono più acuto sarà $\frac{340^m}{24000} = 0^m, 014$ circa.

25°. **Intervalli e accordi delle note musicali.** Nella musica dicesi *tono* il grado di altezza di un suono: e la voce per passare da un tono a un altro dee fare tanto più di sforzo, quanto più grande è l'intervallo che separa i due suoni: l'intervallo di due suoni è maggiore o minore, a misura che il loro rapporto si allontana più o meno dalla unità; e però nella scala musicale chiamasi *intervallo* di due note il rapporto del numero di vibrazioni dell'una al numero di vibrazioni dell'altra. Ecco gl' intervalli delle note consecutive di un'ottava, ossia i rapporti di ciascuna nota alla nota precedente:

	do	*re*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
Intervalli	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	.

Tre solamente sono gl' intervalli differenti: il primo $\frac{9}{8}$ è un poco più grande del secondo $\frac{10}{9} = \frac{9}{8} \cdot \frac{80}{81}$, e il terzo $\frac{16}{15}$ è più piccolo del secondo $\frac{10}{9} = \frac{16}{15} \cdot \frac{75}{72}$, ed e quindi che il primo si appella *tono maggiore*, il secondo *tono minore*, il terzo *semitono maggiore* comecchè non sia precisamente la metà del primo intervallo.

Già abbiamo detto altrove che l'*accordo* è la simultaneità di due o più suoni: l'accordo è tanto più grato all'orecchio e consonante, quanto più semplici sono i rapporti dei suoni simultanei, ossia quanto più brevi sono gl' intervalli di tempo tra le coincidenze delle loro vibrazioni. Quindi l'accordo più perfetto è l' *unisono*, ossia quello di due corpi che nello stesso tempo fanno lo stesso numero di vibrazioni: viene appresso l'accordo di *ottava*, cioè quello di due note che distano tra loro di una ottava intiera, come do_1 e do_2, re_1 e re_2, ec.; e in queste la coincidenza ha luogo per tutte le vibrazioni della nota più bassa. Segue l'accordo delle note *do* e *sol*, che nella scala distano di cinque posti; e in questo accordo di *quinta*, stando i numeri delle vibrazioni fra loro come 1 a $\frac{3}{2}$ ossia come 2 a 3, accade la coincidenza ad ogni due vibrazioni del *do* e ad ogni tre del *sol*. È pur consonante l'accordo di *terza*, o di due note distanti di due intervalli, come sarebbero *do* e *mi*, *re* e *fa*: il primo accordo è detto di *terza maggiore*, perchè le note distano di due toni; il secondo è detto di *terza minore*, perchè le note distano di un tono e mezzo. Anche gli altri accor-

di sono più o meno consonanti, e specialmente l'accordo di *terza* e di *quinta* insieme, per es. delle tre note *do*, *mi*, *sol*, in cui i rispettivi numeri di vibrazioni stanno come 4: 5: 6; ma è dissonante l'accordo del *do* e *re*, avvenendo la coincidenza delle vibrazioni ad intervalli troppo lunghi, cioè ad ogni otto vibrazioni del *do* e ad ogni nove del *re*.

Da ultimo avvertiamo che gl' intervalli fra le note consecutive della scala diatonica essendo troppo grandi, i professori di musica gli accorciano per ravvicinare le note e abbracciare un maggior numero di suoni sensibilmente diversi. A questo fine s' inseriscono tra le note di ciascuna gamma altre note di un numero di vibrazioni rispettivamente maggiore o minore dei numeri, da cui risultano le note laterali; cioè s' inseriscono le stesse note laterali moltiplicate per $\frac{25}{24}$, ovvero per $\frac{24}{25}$: queste note intercalate si distinguono coi nomi di *diesis* e di *bemolle*; sicchè una nota *diesis* deve innalzarsi moltiplicandola per $\frac{25}{24}$, e una nota *bemolle* deve abbassarsi moltiplicandola per $\frac{24}{25}$. Così $re^{bem.} = \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{27}{25}$ $re = \frac{9}{8}$, $re^{dies.} = \frac{9}{8} \cdot \frac{25}{24} = \frac{75}{64}$. Quando l'intervallo fra due note è di $\frac{81}{80}$, la differenza de' due suoni è poco sensibile, e non si distingue se non da un orecchio bene esercitato: perciò quella frazione, che è l'intervallo fra il tono maggiore e il tono minore, costituisce il più piccolo degl' intervalli che si usano nella musica; dicesi *comma*, e una nota viene alzata o abbassata di *un comma*, se si moltiplica o si divide per $\frac{81}{80}$.

26°. **Suoni concomitanti e di combinazione.** Conchiudiamo il presente capo assegnando la ragione di tre fenomeni.

1. Se due corde tese all'unisono sieno vicine tra loro e si faccia vibrare una di esse, anche l'altra comincia a tremolare e dopo breve tratto vibrando dà lo stesso suono della prima. La ragio-

ne di questo fatto è chiara: perchè siccome in un pendolo con un menomo impulso, per es. col soffio della bocca, si eccita prima un piccolissimo moto oscillatorio che poi s' ingrandisce a poco a poco, ripetuto opportunamente l' impulso ad ogni vibrazione; così i tremiti comunicati all'aria da una corda vibrante scuotono un'altra corda vicina, e possono in poco di tempo imprimerle un moto ondulatorio che la faccia risuonare, se i successivi impulsi derivati dalla prima corda nella seconda non si alterino scambievolmente ma si accumulino. Ora la seconda corda essendo tesa all'unisono colla prima e perciò disposta ad oscillare in uguali intervalli di tempo colla medesima, i detti impulsi si rinnovano opportunamente alla fine delle singole vibrazioni; le quali per conseguenza di piccolissime che sono da principio nella corda non tocca, diverranno ben presto sensibili, fino a produrre un suono identico a quello della corda toccata: che anzi la stessa cosa deve accadere e accade di fatto con più o meno difficoltà, quantunque la corda vibrante non sia all'unisono, ma possa dividersi in parti aliquote uguali alla lunghezza della corda non tocca; perchè in questo caso, sebbene gl'impulsi provenienti dalla prima corda non succedano alla fine di ciascuna oscillazione della seconda, tuttavia si ripetono regolarmente ad ogni due o più oscillazioni, e così possono determinare la corda non tocca a rendere il proprio suono.

2. Quando si fa vibrare una corda che dia per es. il *do*, oltre a questo suono principale si sentono parecchie fiate anche degli altri suoni più acuti che diconsi *concomitanti* o *armonici*: tra i suoni secondarii si distinguono specialmente l' ottava del suono principale, l' ottava della sua quinta *sol*, e la sua doppia ottava; cioè si odono distintamente i suoni prodotti da un numero doppio, triplo e quadruplo di vibrazioni di quel suono principale. Or cotesto fatto trova la sua spiegazione in ciò che si è notato nel numero (20°.), vale a dire che una corda vibrante si divide naturalmente e si suddivide in diversi numeri di parti aliquote, ciascuna delle quali oscilla separatamente senza che sia punto disturbata dalle vibrazioni delle altre parti, e rende un suono tanto più acuto quanto è minore la sua lunghezza.

3. Accade talora che in uno strumento musicale intonandosi insieme due o più suoni, si generi di per sè un nuovo suono che dicesi di combinazione, o almeno a certi periodi di tempo si senta un rinforzo dei suoni prodotti che chiamasi *battimento*. La spiegazione di questo fenomeno, che il prof. Tartini osservò pel primo, è pur facile. In due suoni che fanno accordo tra loro, vi ha coincidenza di vibrazioni e conseguentemente di onde sonore a certi intervalli di tempo uguali: dunque a ciascuno di cotesti intervalli succederà un rinforzo di suoni o un battimento; e se i successivi battimenti sono talmente prossimi che in un minuto secondo se ne formi un numero sufficiente alla percezione di un suono continuo, dovrà sentirsi un novello suono che accompagnerà i suoni direttamente eccitati, e sarà di loro più grave. Così facendo risuonare insieme il do_2 e il sol_2, che stanno fra loro come 2 a 3, la coincidenza avverrà ad ogni due vibrazioni del primo tono e ad ogni tre del secondo, e di tali coincidenze in un minuto secondo se ne accumulerà un numero più che bastevole alla produzione del suono; dunque oltre al do_2 e al sol_2, si udirà eziandio il do_1 generato dalle vibrazioni coincidenti; giacchè a queste, che sono la metà delle vibrazioni della nota do_2 corrisponde la prima nota della gamma prossimamente inferiore. Se le due note prese ad esempio, come ancora le altre dell'istrumento, non fossero perfettamente d'accordo, non si distinguerebbe più il rispettivo suono di combinazione, ma si sentirebbe solo un semplice battimento a periodi più o meno grandi: nella qual cosa può riporsi un criterio per giudicare che le voci dello strumento, per es. di un organo, non sono bene armonizzate e debbono accordarsi.

CAPO III.

STRUMENTI PNEUMATICI.

27°. **Origine del suono negli strumenti da fiato.** Negli strumenti da fiato l'origine prima e la cagione principale del

suono non è da riporsi, come negli altri strumenti musicali, nelle vibrazioni delle parti solide; ma sì nelle vibrazioni della colonna d'aria racchiusa ne' tubi diritti o curvi, onde sono composti gli stessi strumenti. Invero se negli strumenti da fiato il suono si originasse precipuamente dalle vibrazioni delle parti solide, grandemente influirebbe sulla qualità e quantità del medesimo suono sì la materia degli strumenti più o meno elastica ed acconcia a vibrare, e si ancora la loro grossezza divisibile in un maggiore o minor numero di parti vibranti; per conseguenza dagli strumenti pneumatici dovrebbero risultare diversi suoni, sia a pari grossezza per la diversità della materia, sia ad ugual materia per la diversità di grossezza, come appunto succede negli istromenti da corda o che risuonano per la percossa. Or questa conseguenza non si avvera; perchè soffiando con un medesimo grado di forza ne' tubi di uguale lunghezza e di differente materia o grossezza, si sentono bensì de' suoni di diversa *tempra* o *metallo*, ma tutti identici quanto al tono e all' intensità: dunque negli strumenti da fiato i suoni non vengono prodotti dalle vibrazioni delle parti solide, ma dalle vibrazioni dell' aria che vi si contiene; la quale, secondochè è più o meno impedita dalla aderenza e scabrosità de' varii tubi, può per avventura cagionare la diversa tempra o bontà di uno stesso suono.

Tuttavolta perchè la colonna d'aria racchiusa in uno strumento o tubo possa rendere un suono, non dee esser mossa tutta intiera; ma bisogna che le sue parti sieno determinate ad oscillare, a somiglianze di quelle di un corpo solido messo in vibrazioni: ed ecco in breve come si producono le vibrazioni dei singoli strati d'aria e si genera il suono negli strumenti da fiato, o ne' tubi onde questi sono generalmnte composti. Soffiando con un mantice o colla bocca, l'aria viene introdotta e spinta nel tubo per un'apertura convenientemente disposta; ma nello stesso tempo urtando contro i labbri dell'apertura, o contro la linguetta di cui questa è talora munita, l'aria s'insinua nel tubo con intermittenza e concepisce un moto vibratorio, che si comunica di mano in mano alle parti della colonna aerea del medesimo tubo, e vi forma delle

onde somiglianti a quelle che abbiamo esposto nel numero (11°.): da quei moti vibratorii e da queste onde nascono i suoni, i quali per altro variano di tono colla lunghezza dei diversi tubi, ovvero coll'aprire o chiudere or l'uno ed or l'altro dei fori opportunamente praticati nel senso longitudinale di un stesso tubo.

28°. **Nodi e ventri delle colonne d'aria vibranti nei tubi sonori.** Mentre nei tubi cilindrici di determinata lunghezza si propagano le vibrazioni e le onde aeree, in alcune sezioni della colonna vibrante si formano varii *nodi* e *ventri*, che ora prendiamo a spiegare sia nei tubi aperti ad una sola estremità, sia in quelli aperti ad ambidue i capi.

Rappresenti AE (fig. 201.ª) un tubo aperto all'estremità AA, e chiuso all'altra estremità EE; e per maggior chiarezza chiamiamo *onda dilatata* e *onda condensata* le due metà per es. AB e BC di ciascuna onda intera ABC, ed esprimiamo con 2λ la lunghezza costante di questa. Le onde si propagano colla velocità del suono dall'orifizio AA verso il fondo E, ed appena giunte su questo fondo, si ripiegano indietro verso l'orifizio, conservando in questa opposta direzione gli stessi gradi di velocità oscillatoria e di densità delle loro parti: per esaminare gli effetti di siffatti movimenti, consideriamo il ritorno della prima onda $DED = \lambda$, che supponiamo condensata, nel momento preciso in cui il suo mezzo tocca il fondo chiuso del cannello. In tal momento le due metà dell'onda condensata, una diretta e l'altra riflessa, si trovano soprapposte l'una all'altra; dimodochè coincidano fra loro sì le due estremità della medesima onda in DD, e sì le altre parti simmetriche rispetto allo strato di mezzo: perciò restando lo strato d'aria DD alla condizione di densità nativa, le densità degli altri strati sino al fondo saranno crescenti come prima, e raddoppiate nella loro variazione; mentre per converso le velocità oscillatorie si ridurranno tutte a nulla, quelle della semionda diretta essendo elise dalle velocità uguali e contrarie della semionda riflessa. Ma cotesto stato di equilibrio non dura che l'istante considerato: perchè continuando a propagarsi sì l'onda seguente CD che è diretta e dilatata, come

anche l'onda DED riflessa o condensata, lo strato aereo DD per essere ugualmente modificato dalle dilatazioni della prima onda e dalle condensazioni della seconda, conserverà sempre la sua densità naturale; lo strato d'aria contiguo al fondo verrà sempre a provare per eccesso o per difetto il massimo cangiamento di densità, e gli strati intermedii possederanno pure una densità media fra quelle degli strati estremi: per l' opposto essendo cospiranti in DD l'azione diretta dell' onda rarefatta CD e l'azione riflessa del' onda condensata DED, ed inoltre distruggendosi immediatamente per la riflessione il movimento che ciascuna onda diretta tende a produrre in EE, ne segue che eccettuati gl' istanti della coincidenza fra le estremità di ciascuna onda, la velocità oscillatoria dello strato DD situato alla distanza $\frac{1}{4}\lambda$ dal fondo è massima, quella dello strato EE aderente al fondo è sempre nulla, e media è la velocità degli altri strati che si trovano fra quel primo e quest' ultimo. Tenendo dietro colla mente all'ulteriore propagazione e soprapposizione delle onde dirette e riflesse, ci persuaderemo facilmente che come lo strato N contiguo al fondo, così gli strati N′, N″, N‴, ... posti alle distanze λ, 2λ, 3λ, ... dal fondo stesso del tubo e soggetti in pari tempo alle azioni uguali ed opposte di due onde della stessa specie, restano immobili e soffrono un cangiamento massimo di densità; e che come lo strato V alla distanza $\frac{1}{4}\lambda$ dal fondo, così pure gli strati V′, V″, V‴, ... collocati alle rispettive distanze $\frac{3}{2}\lambda$, $\frac{5}{2}\lambda$, $\frac{7}{2}\lambda$, ... dal medesimo fondo sino alla bocca, sono animati da una velocità massima di oscillazione, ma ritengono costantemente la nativa densità. Que' primi strati d'aria, che non hanno velocità oscillatoria e soffrono un cangiamento massimo di densità, si chiamano *nodi* della colonna vibrante; gli altri strati che posseggono una velocità massima senza modificazione nella densità, si dicono *ventri* della stessa colonna.

I varii suoni in un tubo di data lunghezza dipendono, come vedremo, dalla lunghezza delle onde dilatate o condensate, e per conseguenza dal numero dei nodi o dei ventri, della colonna vibrante. Ora poniamo che il tubo AE dia un suono determinato:

è chiaro che se nel tubo si apra un foro laterale nel posto di un ventre per es. V, il suono primitivo non sarà punto alterato; perchè la densità dell' aria interna in V essendo già uguale alla densità dell'aria esterna, le oscillazioni della colonna aerea non verranno certamente impedite o turbate per la sua libera comunicazione coll' atmosfera nel punto predetto. Che anzi, siccome ci mostra pure l'esperienza, non succede veruna alterazione di suono, sebbene l' apertura si estenda a tutto il contorno del tubo e si separi la parte DE dal resto AD: ma in questo caso avremmo un tubo aperto da ambe le estremità; e così è manifesto che in tali tubi si formano varii nodi e ventri, come nei tubi chiusi da un capo. La sola differenza fra le due specie di tubi si è che nei tubi aperti da una sola estremità deve esistere un nodo al fondo e un ventre alla bocca, laddove nei tubi aperti da ambe le estremità debbono formarsi due ventri ai due capi.

29°. **Leggi delle vibrazioni e de' suoni ne' tubi chiusi da un capo.** Affinchè la colonna d' aria vibrante in un tubo chiuso da un' estremità renda un suono perfetto e musicale, è necessario che si abbia un nodo al fondo del tubo e un ventre alla bocca: quando una tal condizione è soddisfatta, l' aria nella bocca del tubo conservando sempre una densità uguale a quella dell' aria atmosferica, si manterrà in equilibrio con questa e vibrerà regolarmente a guisa di una corda o verga; ma se per contrario la colonna non terminasse alla bocca in un ventre, non sussisterebbe sempre l'equilibrio dell' aria situata all' apertura coll'aria esterna, e però le onde aeree venendo in ogni istante ad alterarsi, non produrrebbero che un suono confuso ed imperfetto.

Ora in tubo di lunghezza l la suddetta condizione può verificarsi in molti modi. Il più semplice è che la lunghezza dell'onda dilatata o condensata sia il doppio della lunghezza del tubo: allora esisterà un solo nodo al fondo e un solo ventre alla bocca; e sarà il caso in cui il tubo comincia a dare un suono ben distinto, e più grave di quanti altri può dare. Per determinare in questo caso il numero n delle vibrazioni eseguite nell' unità di tempo o in un minuto secondo, ricordiamo che un tal nu-

mero corrisponde appuntino al numero delle onde rarefatte e condensate che si generano pure in un minuto secondo: dunque esprimendosi la lunghezza $2l$ di ciascuna di queste onde (24.°) pel rapporto della velocità c del suono al numero n di tutte, si avrà $2l = \frac{c}{n}$, e per conseguenza $n = \frac{c}{2l}$. Pertanto nel caso di un solo nodo e di un solo ventre, il numero delle vibrazioni che la colonna aerea fa nell'unità di tempo in un tubo sonoro, ovvero il suono rappresentato dal medesimo numero, ha per valore il rapporto $\frac{c}{2l}$. Il secondo modo di trarre un suono dal tubo l è questo, che l'aria sia spinta con tal forza, da formare nello stesso tubo due nodi e due ventri: in questo caso, dovendo sempre trovarsi un nodo al fondo e un ventre alla bocca, la lunghezza dell' onda condensata e dilatata risulta $= \frac{2l}{3}$; e però il numero delle vibrazioni nell'unità di tempo, o il valore del suono corrispondente sarà dato dal rapporto $\frac{3c}{2l}$. Appresso viene il suono prodotto dalle vibrazioni che formano nel tubo l tre nodi e tre ventri: in tal caso siccome si sviluppano nel tubo due onde e mezza; così la lunghezza di ciascuna onda sarà $\frac{2l}{5}$, e il rapporto $\frac{5c}{2l}$ esprimerà il numero delle vibrazioni nell'unità di tempo o il suono eccitato.

Continuando a ragionare somigliantemente per gli altri casi, siamo condotti a stabilire la legge seguente: *quando l' aria è spinta in un tubo chiuso ad un capo con forza crescente, i suoni prodotti crescono gradatamente in altezza e sono rappresentati dalla serie dei rapporti* $\frac{c}{2l}, \frac{3c}{2l}, \frac{5c}{2l}, \frac{7c}{2l}, \ldots\ldots$; *ovvero dalla serie dei numeri dispari* 1, 3, 5, 7, ..., *chiamando* 1 *il suono più grave che possa dare il tubo*, *ossia il suono fondamentale.* È anche evidente quest'altra legge: *in due tubi disuguali i suoni di uno*

stesso ordine, per es. I suoni fondamentali $\frac{c}{2l}$ e $\frac{c}{2l'}$, *stanno fra loro nella ragione inversa delle lunghezze* l *ed* l'.

30°. **Leggi delle vibrazioni dell'aria o dei suoni in un tubo aperto da ambe le estremità.** Nei tubi aperti dall'una e dall'altra parte, per ottenere un suono distinto e non alterato, è necessario che ai due estremi si trovino due ventri di vibrazione: quindi è che risuonando un tubo aperto, per tutta la sua lunghezza l si distenderanno una, due, tre,... onde di condensazione o di dilatazione, secondochè si abbiano uno, due, tre, ... nodi della colonna d'aria vibrante; e in questi diversi casi saranno l, $\frac{1}{2}l$, $\frac{1}{3}l$,.... le rispettive lunghezze di ciascuna onda condensata o dilatata. Dalla qual cosa si conchiude che dunque i successivi numeri di vibrazioni compite nell'unità di tempo, o i suoni che risultano, hanno per espressione i rapporti $\frac{c}{l}$, $\frac{2c}{l}$, $\frac{3c}{l}$,.....; e che però, essendo preso per unità il suono più grave o fondamentale $\frac{c}{l}$, sussiste la seguente legge: *soffiando in un tubo aperto da ambi i lati con energia crescente, i suoni prodotti crescono pure in altezza e sono successivamente rappresentati dalla serie dei numeri naturali* 1, 2. 3,.... Nei tubi aperti di diversa lunghezza vale la stessa legge, che abbiamo enunciata di sopra pei diversi tubi chiusi da una parte.

Il suono fondamentale $\frac{c}{l}$ di un tubo aperto ai due capi è l'ottava acuta del suono più grave $\frac{c}{2l}$, che si fa sentire in un tubo di uguale lunghezza chiuso ad una estremità: il secondo suono $\frac{2c}{l}$, che risulta da un doppio numero di vibrazioni, è l'ottava del suono fondamentale; il terzo suono $\frac{3c}{l}$ è l'ottava della quinta nota dopo il suono fondamentale, ecc. Donde apparisce che soffiando in

un tubo con diversa energia o variando il modo di spingere in esso l'aria, si ottengono parecchi suoni della scala musicale. Per ottenere i suoni intermedii, sogliono i tubi di alcuni istromenti (flauto, clarinetto, ec.) forarsi lateralmente: se un foro qualunque corrisponde a un ventre di vibrazione che ha una stessa densità coll'aria esterna, la colonna vibrante non si altera e il suono non si modifica punto: ma se il foro non corrisponde a un ventre, allora lasciandolo aperto e otturando gli altri colle dita, per la comunicazione coll'aria esterna si formerà un ventre nuovo alla sezione del medesimo foro, e così essendo tale sezione la base di una colonna aerea più corta del tubo, la quale vibra separatamente dal resto, i successivi suoni di questa saranno rispettivamente più elevati dei suoni successivi di tutto il tubo.

31°. La teoria che abbiamo esposto intorno agli strumenti da fiato, deve attribuirsi a Daniele Bernoulli come a primo autore, quantunque essa fosse già stata indicata da Sauveur. Colla teoria non si accorda esattamente l'esperienza, la quale ci dà dei suoni più gravi di quel che consentano le leggi dimostrate: cagione di questa discordanza si è che l'aria d'ordinario non mettesi direttamente in vibrazione all'imboccatura su tutto il contorno del tubo, nè può impedirsi una certa agitazione irregolare dei primi strati aerei; che le vibrazioni interne non si trasmettono all'aria esterna senza una reazione, la quale modifica un poco la densità dello strato vibrante alla bocca del tubo; che il fondo del tubo partecipa alle viibrazioni dell'aria interna ed esercita su di esse una qualche influenza; che finalmente le particelle laterali dell'aria interna non vibrano sempre in una direzione parallela all'asse del tubo come suppone la teoria, ma sono talora trasportate da movimenti obliqui.

Tuttavia Dulong colle sue esperienze ed osservazioni accertò che restando costante la lunghezza di una colonna vibrante in un tubo, le cagioni perturbatrici che abbiamo testè noverate, influiscono ugualmente sul suono, qualunque sia il fluido elastico che si fa risuonare. Quindi la teoria di Bernoulli può applicarsi alla determinazione della velocità del suono nei diversi gas, non ostan-

te le suddette difficoltà che s' incontrano nella pratica. Chiamando c, c' la velocità del suono nell' aria e in un altro gas qualunque, n ed n' i suoni fondamentali dei due fluidi oscillanti in un tubo l aperto alle due estremità; avremo $n = \frac{c}{l}$, $n' = \frac{c'}{l}$, e però $c' = c \frac{n'}{n}$. I suoni n ed n', ovvero i corrispondenti numeri di vibrazioni si determinano sperimentalmente, paragonandone i toni con quelli della sirena; e così espressa col numero 1 la velocità c dell' aria, o adottando il valore di essa già stabilito con altro metodo, veniamo a conoscere la velocità c' di un altro gas.

32°. **Organi della voce e dell' udito.** L' organo della voce umana, il quale in gran parte deve considerarsi come un istrumento pneumatico, sembra collocato nell' estremità superiore della trachea, ossia nella *laringe*. L' aria esterna, respirata e raccolta nei polmoni, è da essi sospinta su in un canale che sale fino alle radici della bocca e chiamasi *trachea*; si getta quindi in un canale più angusto, da cui è terminata la trachea e che si dice *laringe*: quivi adunque ristretta l' aria in più breve spazio, deve comprimersi e dilatarsi oscillando come in un tubo; e le sue ondulazioni si comunicano all' aria esterna per mezzo della *glottide*, che è un'apertura ovale terminante la laringe, e le cui labbra mettonsi pure in vibrazione all' uscire dell' aria.

L' organo dell' udito si compone di tre parti o *cavità*. L'*esterna* è la cavità visibile dell'orecchio o il *padiglione*: comunica con un canale alquanto tortuoso e che si va restringendo a poco a poco; questo canale è detto *meato uditorio*, ed è cosperso di un cerume amaro, che impedisce gl' insetti dall' insinuarsi nell' orecchio. La cavità *media* incomincia all' estremità del meato, ed è separata dalla cavità esterna per mezzo di una membrana tesa o *timpano*: si chiama *cassa del timpano*; è piena d'aria che vi penetra per la *tromba di Eustacchio*, la quale è un canale disteso dalla parte posteriore della bocca fino alla detta cassa; è anche munita di quattro ossicini, che servono a temperare l' asprezza di alcuni suoni, e

a trasmettere le vibrazioni del timpano alla cavità *interna*. Questa terza cavità è divisa dalla media per mezzo di due fori, chiusi ambidue da una membrana: dall' uno de' due fori o *finestra rotonda* si stacca la *chiocciola* ossia un condotto osseo fatto a spire, che comunica con tre canali d'osso semi-circolari, e termina dietro la membrana dell' altro foro o *finestra ovale* in una cavità detta *vestibolo*. Il nervo acustico dal cervello si dirama in più parti, e queste finiscono per immergersi in un umore, di che sono pieni il vestibolo e le spire della chiocciola: quindi le vibrazioni sonore si trasmettono al nervo acustico dal detto umore, a questo dagli ossicini della cavità media e dal timpano, cui mettono in moto vibratorio le onde d' aria condotte dal padiglione e dal meato uditorio.

PRINCIPII DI OTTICA

CAPO I.

NOZIONI PRELIMINARI E LUCE DIRETTA

33°. L' Ottica tratta della luce, che è quel principio per cui si rendono visibili i corpi. I corpi per rispetto alla luce, sono luminosi od oscuri: *luminosi* si dicono que' corpi, che spargono una luce propria, e vedonsi per sè stessi; *oscuri* poi si chiamano quegli altri corpi, i quali non possono vedersi che per la luce ricevuta dai primi e riverberata all' intorno. I corpi non luminosi sono anche *diafani* ovvero *opachi*, secondochè si lasciano attraversare dalla luce o ne impediscono il passaggio pel loro mezzo: tuttavia non v' ha corpo che ridotto in lamine assai sottili non divenga più o meno *pellucido*, tale cioè da far passare una porzione più o meno grande

della luce; laonde l'opacità dipende più dalla grossezza dei corpi, che dalla loro natura.

34°. **Propagazione della luce, raggio e cono luminoso.** In un mezzo omogeneo la luce si propaga in linea retta. Dispongansi tre dischi, muniti ciascuno di un forellino piccolissimo nel centro, a qualche distanza fra loro; e si applichi l'occhio al foro del primo disco: non ci verrà fatto di vedere un punto luminoso o una fiammella al di là del terzo foro a notabile distanza, se i tre forellini non sieno tutti in una stessa linea retta. Di più facendo entrare per una piccola apertura in una camera oscura la luce del Sole, vediamo il cammino di questa tracciato in linea retta dagli atomi di polvere, che nuotano nell'aria e ne sono illuminati. In fine per tacere di altri fatti, quando un diaframma opaco viene rischiarato da una parte, la sua ombra su di un piano parallelo dalla parte opposta è sempre una figura simile allo stesso diaframma: or questo non potrebbe avvenire, se la luce non si propagasse in linea retta tra il contorno del diaframma e il contorno dell'ombra.

La linea retta per la quale si propaga la luce, dicesi *raggio luminoso*. Da un punto luminoso la luce è raggiata in tutti i versi: può quindi un punto luminoso considerarsi nello spazio, come il centro di una sfera di luce che si diffonde indefinitamente per ogni parte; e ogni punto di un corpo lucido o illuminato è il vertice di un *cono luminoso*.

35°. **Natura della luce.** Intorno alla natura e alla propagazione della luce si sono immaginate due ipotesi, e adottati due sistemi diversi. Alcuni pensarono con Newton che la luce consistesse in un fluido o sostanza materiale, sottilissima e imponderabile; che le molecole di questa materia lanciate continuamente per ogni verso dai corpi luminosi traversassero lo spazio, e giugnessero fino a noi con grandissima velocità; che in fine dall'azione delle medesime molecole sul nostro occhio nascesse la sensazione della luce, e la visione degli oggetti: tale si è il sistema *della emissione*. Altri sostennero col Descartes e col Gesuita P. Grimaldi, e più comunemente sostengono oggidì che la luce consiste nel moto ondulatorio

di un etere sommamente elastico e sottile; il quale siccome si suppone diffuso nell' universo ed anche ne' corpi fra atomo ed atomo, così si risguarda come incapace di opporre una resistenza sensibile alle masse ponderabili che si muovono in esso: secondo questo sistema, che dicesi *delle ondulazioni*, il moto dell'etere viene eccitato dalle particelle vibranti del corpo luminoso; e trasmettesi quindi di strato in strato sotto la forma di onde sferiche fino al nostro occhio, e così col suo urto sulla retina produce in noi la sensazione della luce e la visione de' corpi; a quel modo appunto che la percezione del suono è determinata dai movimenti vibratorii, che originati nell' aria dalle molecole oscillanti di un corpo sonoro e propagatisi tutto all'intorno, vengono infine ad urtare e scuotere il timpano del nostro orecchio. Peraltro a spiegare compiutamente i fenomeni ottici, si ammette una differenza tra le vibrazioni dell' aria nella produzione del suono e le vibrazioni dell'etere luminoso: la differenza è questa che dove le molecole aeree oscillano nella direzione del raggio sonoro o perpendicolarmente alla superficie delle onde sferiche, le vibrazioni degli atomi eterei si fanno invece secondo una direzione normale al raggio luminoso, o tangenzialmente alla superficie delle onde.

Non è poi a maravigliare che il movimento dell' etere luminoso si propaghi in una direzione, e le vibrazioni degli atomi si facciano in un' altra direzione e sieno *trasversali*. Una corda distesa sul suolo e scossa trasversalmente per un capo in un piano verticale, si muove serpeggiando; e così le vibrazioni della medesima corda sono trasversali nel senso della scossa, ma il suo movimento si trasmette nel senso della lunghezza da molecola a molecola sino all' altro capo: un' acqua stagnante, se venga agitata dalla caduta di un sassolino, si muove tutta all' intorno, e nel tempo stesso un corpo galleggiante s' innalza alternamente e si abbassa sotto il livello dell' acqua; e così le molecole di questa vibrano in direzione verticale, ma le onde si propagano circolarmente in un piano orizzontale. Questi due fatti, senza recare in mezzo la spiegazione che ne ha dato Fresnel in una sua

Memoria, bastano a mostrarci come vibrando gli atomi dell'etere luminoso in una direzione, possano ciononostante trasmettere il loro movimento in una direzione perpendicolare a quella in cui fanno le proprie vibrazioni; le quali del resto, secondo le diverse circostanze, or sono rettilinee, ed or curvilinee in forma di piccoli cerchietti od ellissi.

36°. I fenomeni della luce diffratta e della interferenza di due o più raggi luminosi non possono accordarsi col sistema dell' emissione. Citiamo due soli fatti. — 1. Entrino i raggi solari per un piccolo forellino in una camera oscura; e posto nel cono luminoso un corpicciuolo opaco, come un capello o un filo sottilissimo di metallo, si ricevano i raggi a qualche distanza su di un diaframma: l' ombra del capello o del filo, che si osserva proiettata sopra lo stesso diaframma, non è del tutto oscura nè ugualmente illuminata, e si trova più estesa di quello che essa dovrebbe essere giusta le regole della geometria e la propagazione della luce in linea retta. È quindi a conchiudere che i raggi luminosi rasentando la superficie de' corpi soffrono una tale modificazione, per cui s' inflettono o meglio si dispergono ciascnno in più altri raggi: questa modificazione della luce, che il Grimaldi osservò pel primo, fu distinta col nome di *diffrazione*. Se i raggi introdotti nella camera sono omogenei, per es. rossi, ciò che si ottiene intercettando con un vetro rosso presso il foro della camera le altre specie di raggi o colori onde si compone la luce bianca; allora nella direzione parallela all' ombra che manda il filo metallico, sia nell' interno della medesima ombra, sia nell' esterno dall' una parte e dall' altra, veggonsi parecchie striscie o frange alternativamente oscure e illuminate di luce rossa: la larghezza di queste frange è diversa per le differenti specie di luce, e però sono esse varioponte o iridescenti per la luce bianca, non sovrapponendosi esattamente la frange nei diversi colori; ma in ogni caso spariscono del tutto, quando si sopprimono i raggi provenienti da un solo lato del filo. — 2. In una camera oscura si facciano penetrare i raggi di una luce omogenea per due aperture circolari, assai piccole e vicine fra loro; e le immagini delle aper-

ture si ricevano sopra un diaframma bianco un poco al di là del punto, in cui s'intersecano i due coni luminosi: anche in questo caso si formano le frange luminose ed oscure nel segmento comune, ossia in quella parte in cui le due immagini circolari si sovrappongono l'una all'altra. È questo un fenomeno di diffrazione insieme e di *interferenza*, dovuto cioè all'azione scambievole di due raggi o fascetti luminosi, che derivano da una medesima sorgente e si tagliano sotto un angolo piccolissimo: dico che un tal fenomeno è dovuto all'azione scambievole dei raggi; perchè le frange scure si dileguano al chiudersi di una apertura, e il segmento suddetto rimane uniformemente illuminato.

Ora questi ed altri fatti relativi all'interferenza e alla diffrazione della luce non possono spiegarsi nel sistema dell'emissione, e sono anzi ad esso affatto contrarii; giacchè in somma riescono a questo che in certi casi luce aggiunta a luce genera oscurità, come anche luce sottratta da luce produce illuminazione. All'opposto nel sistema delle ondulazioni tutti quei fatti si spiegano facilmente; perchè se la luce consiste nei moti vibratorii di un etere, è chiaro che incontrandosi due raggi prossimamente paralleli, come i moti così le luci debbono comporsi e dare una risultante or doppia, or nulla ed ora intermedia.

Per dichiarar ciò più sensibilmente, e mostrare come i fatti allegati sieno una conseguenza immediata del sistema delle ondulazioni, rappresentiamo colle rette XY, X'Y', X''Y'' (fig. 202.ª) tre raggi di uno stesso colore; cogli intervalli uguali ABC, A'B'C', A''B''C'' le lunghezze delle onde luminose, che si formano ad ogni due vibrazioni degli atomi eterei; e colle ordinate perpendicolari delle linee sinuose rappresentiamo pure quanto alla intensità e alla direzione le velocità oscillatorie degli atomi di ciascuna onda a un dato istante, le quali velocità, come nella propagazione del suono, si oppongono nelle due semi-onde e diminuiscono ugualmente dai punti medii di queste sino ai punti estremi. Ciò posto, i due raggi XY ed X'Y', ovvero XY ed X''Y'' si concepiscano coincidenti od incrociati in un punto sotto un angolo piccolissimo: se i due sistemi di onde sono in *concordanza*, os-

sia se le parti dell' uno corrispondono esattamente alle parti omologhe dell' altro, come ne' due primi raggi; allora è manifesto che le velocità vibratorie degli atomi eterei nella loro soprapposizione saranno tutte raddoppiate, e che ne dovrà quindi risultare un rinforzo di luce: ma se i due sistemi sono tra loro in *discordanza*, ossia se differiscono nel lor cammino di una semi-onda, come nei due secondi raggi; allora la velocità che apporta a ciascun atomo l' un sistema di onde, saranno uguali e contrarie alla velocità recate dall' altro sistema, e si avrà per conseguenza distruggimento di moto e annichilazione di luce. Quando l'uno de' due sistemi si avanzi sull' altro o ritardi di una o più onde intiere, ossia di un numero pari di semi-onde, si produrrà evidentemente lo stesso effetto che nel primo caso; si otterrà poi il medesimo effetto del secondo caso, quando un sistema sia più avanti dell'altro o più addietro di un numero dispari di semi-onde: ed è appunto da queste successive differenze nella propagazione delle onde e nel cammino dei raggi, che derivano le frange alternamente luminose ed oscure nei fenomeni dell' interferenza e della diffrazione della luce.

37°. Conchiudiamo. Non pare che i fenomeni della luce possano concepirsi in altro sistema, che in quello dell'emissione o delle ondulazioni: escluso dunque il sistema dell'emissione dai fenomeni della luce diffratta e della interferenza de' raggi luminosi, dobbiamo solo ammettere e seguire il sistema delle ondulazioni e moti vibratorii di un etere; dal qual sistema come si spiegano assai bene tutti gli altri fenomeni della luce, così discendono naturalmente quelli della diffrazione e della interferenza.

Le vibrazioni eteree dallo spazio libero si propagano attraverso i corpi trasparenti per mezzo dell' etere, che trovasi nell' interno de' medesimi corpi tra melecola e molecola, o fra atomo ed atomo. Inoltre a quel modo che l' intensità di un suono dipende dall' ampiezza più o meno estesa delle oscillazioni eseguite nell'aria, e la varietà dei suoni gravi od acuti è prodotta dalla diversa durata delle medesime oscillazioni; così dalla diversa energia delle vibrazioni che fanno gli atomi dell'etere, dipenderà la maggiore

o minore vivacità di una stessa luce; e dai varii numeri delle vibrazioni compiute in un dato tempo risulteranno le diverse specie di luce o di colori, ond'è composta la luce bianca. Da ultimo come nel suono, così nella luce la velocità di propagazione è sempre la stessa, qualunque sia la forza della luce o il suo colore; ma ciò che non si avvera nel suono, è probabile che la velocità della luce sia vincolata solamente alla elasticità e alla densità dell'etere, e possa quindi determinarsi per la formola (Acust. 6°) stabilita da Newton rispetto al suono. Noi vogliamo qui trovare la velocità della luce con alcuno dei metodi usati.

38°. **Velocità della luce.** La propagazione della luce non è istantanea, ma successiva; cioè la sua velocità è tale, che deve essa impiegare il tempo di 8′ e 13″ incirca a percorrere uniformemente la distanza tra il Sole e la Terra. Questa è la conseguenza che Roëmer, astronomo danese, trasse pel primo dal ritardo degli ecclissi che si osservano nel più prossimo dei quattro satelliti di Giove.

I diversi piani in cui si muovono i pianeti e i loro satelliti, generalmente sono di poco inclinati fra loro: ed è perciò che il primo satellite di Giove ad ogni sua rivoluzione si ecclissa immergendosi nell'ombra, che questo pianeta manda dalla parte opposta al Sole: e siccome il satellite impiega sempre 42 ore e mezza incirca (42*ore* 28′ 35″) a fornire la sua orbita intorno a Giove; così i suoi ecclissi essendo molto frequenti e succedendosi regolarmente ad uguali intervalli di tempo, potranno spesso osservarsi e potrà insieme calcolarsi con esattezza l'istante del loro avvenimento. Ora dalle osservazioni già fatte dagli astronomi è certo che quando Giove sta in opposizione col Sole, e la Terra si trova e rimane sensibilmente per qualche tempo alla minima distanza da quel pianeta, gli intervalli fra due ecclissi consecutivi del satellite sopraddetto sono costanti ed uguali al numero di ore e minuti che abbiamo testè notato; che di più quando la Terra procedendo nella sua orbita intorno al Sole si allontana da Giove, il quale frattanto si scosta poco dalla primitiva posizione, l'intervallo apparente fra due ecclissi del satellite va crescendo, e un tale ac-

rappresentino OC, OA le velocità rispettive della luce e del moto annuo della terra, il quale può prossimamente risguardarsi come uniforme. L'occhio partecipa al movimento della terra, ma atteso il principio del moto relativo, riceverà dall' etere luminoso la medesima impressione, come se esso restasse immobile, e la luce oltre alla velocità propria OC, fosse animata ancora dalla velocità OB uguale e contraria a quella della terra: fatto dunque il rettangolo OBDC, e condotta la diagonale OD, l' occhio dell' osservatore verrà scosso dall' etere luminoso secondo la direzione S'O della medesima diagonale, che esprime il moto risultante della luce; e così deviando il raggio visuale verso la parte in cui si muove la Terra, la stella non sarà più riferita alla sua posizione reale S, ma apparirà situata in un altro punto S'. L'angolo SOS', che misura il cangiamento osservato nella posizione della stella, dicesi l' *aberrazione* della luce che essa c' invia, ed è uguale intorno a 20''.

La tangente del detto angolo, o dell' aberrazione di una stella fissa, si esprime evidentemente pel rapporto tra la velocità del globo terrestre e quella della luce. Dunque supposto il moto annuale della terra e supposta ancora la velocità di un tal moto che è di sette leghe e mezza in circa per secondo, si ricava la velocità della luce

$$V = \frac{7^{leghe},5}{\tang 20''} = \frac{7^{leghe},5}{0,00009696} = 77351^{leg.},$$

la quale è ben d' accordo con quella trovata già da Roêmer. Viceversa ammessa la successiva propagazione e la velocità della luce, deve ancora ammettersi necessariamente il moto della terra intorno al sole, per ispiegare i fenomeni di aberrazione osservati nelle stelle.

L' aberrazione che nasce dal moto diurno della terra, è insensibile ed arriva appena alla terza parte di un minuto secondo, essendo la velocità nel moto diurno della terra la sessantesima

parte della velocità nel moto annuale. L' aberrazione poi che risulta dal moto annuo del globo terrestre, dietro le osservazioni astronomiche è la medesima per tutte le stelle fisse, benchè queste si trovino da noi a distanze molto diverse; ne segue quindi che la luce si propaga dalle singole stelle fino a noi con una velocità uniforme ed uguale per tutte, dipendendo questa dal solo rapporto tra la velocità del movimento annuale della terra e la tangente dell' angolo di aberrazione. In fine siccome la distanza delle stelle fisse, che sono a noi più vicine, supera di ducento mila volte la distanza del sole dalla terra; perciò la luce che esse ci mandano, per giungere fino al nostro occhio impiegherà un tempo $= 200000.\ 8'\ 13''$, ossia noi non potremo vedere le stelle più prossime alla nostra terra se non per la luce da loro emessa più di tre anni innanzi : quanto alle stelle telescopiche, esse sono così lontane da noi, che la loro luce non perviene a fare impressione sui nostri occhi, se non dopo alcune migliaia di anni da che si è dipartita dal proprio centro.

40°. Il fenomeno dell' aberrazione si osserva in tutti gli astri, cioè nelle stelle sì fisse come erranti; ma nel definire la posizione vera di un astro e lo spostamento dovuto all' aberrazione della luce, si deve tener conto dello spostamento apparente che è prodotto da altre cagioni, per es. dalla parallassi e dalla rifrazione astronomica: di questa seconda cagione parleremo in un altro capo, ora diciamo alcuna cosa della prima.

L' astro A (fig. 204ª), veduto da diversi luoghi della superficie terrestre TT', viene riferito a diversi punti della sfera celeste : il perchè a togliere ogni differenza che quindi risulta nelle osservazioni di un astro fatte in varie stazioni, usano gli Astronomi di riportarlo a quel punto del cielo, nel quale il medesimo astro si vedrebbe da chi fosse situato nel centro C della terra ; e così chiamiamo *apparente* la posizione H a cui si riferisce nella sfera celeste l' astro A veduto dal punto T, *vera* o *reale* la posiztone H' in cui si osserverebbe dal punto C, e *pa-*

rallassi la distanza tra l'una e l' altra posizione, ossia l' angolo $CAT = p$.

Sia TO l' orizzonte sensibile; e dicansi r il raggio del globo terrestre, δ la distanza dell' astro dal centro della terra, α la sua altezza sull' orizzonte ossia l' angolo ATO. Nel triangolo ATC sussistendo la proporzione $r : \delta = \operatorname{sen} p : \operatorname{sen}(90° + \alpha)$, si ricaverà l' equazione

$$(\gamma) \qquad \operatorname{sen} p = \frac{r}{\delta} \cos \alpha$$

per determinare le parallassi di un astro o la sua distanza da noi.

Tra le conseguenze che possono dedursi dalla formola (γ), additiamo le seguenti. 1. La parallassi, la quale produce sempre l' effetto di abbassare la posizione di un astro in uno stesso circolo verticale, è tanto minore o maggiore, quanto l' astro è più lontano o vicino all' orizzonte; sicchè dessa diviene minima o nulla per un astro che passa al zenith Z, e massima pel medesimo astro nel momento che approda all' orizzonte: chiamando p' questa parallassi massima ed *orizzontale*, sarà $\operatorname{sen} p' = \frac{r}{\delta}$; e quindi la parallassi rispondente a qualunque altezza dell' astro sull' orizzonte, o la parallassi di *altezza*, potrà esprimersi per $\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} p' \cos \alpha$. — 2. Tra i varii astri devono avere una maggiore parallassi quelli, che a parità di altre circostanze sono più vicini alla terra; e la distanza di tutti gli altri, che non hanno veruna parallassi, deve essere indefinitamente grande: tale si è la distanza che ci sapara dalle stelle fisse, di cui finora non si è scoperta una parallassi sensibile. — 3. Essendo assai piccole le parallassi degli astri trovate finora, potranno esse sostituirsi ai rispettivi loro seni: perciò saranno $p = \frac{r}{\delta} \cos \alpha$, e $p' = \frac{r}{\delta}$; cioè *le parallassi orizzontali, e quelle pure di una*

medesima altezza, stanno nella ragione inversa delle distanze degli astri dal centro della terra.

41°. **Intensità della luce**. Per intensità della luce prendiamo la quantità, con cui essa rischiara l' unità di superficie di un corpo opaco. Ciò inteso, se i raggi che partono da una sorgente luminosa, sono paralleli fra loro, è chiaro che fatta astrazione del potere assorbente dei mezzi, l' intensità della luce si conserverà costante a qualunque distanza.

Se poi i raggi sono divergenti e la luce si propaga sfericamente intorno al centro luminoso in un mezzo privo affatto di forza assorbente, la sua intensità varia in ragione inversa de' quadrati delle distanze. Perchè l' intensità della luce nel sistema delle ondulazioni si misura, come quella del suono, dalla metà della forza viva con cui l' etere luminoso agisce sulla unità della superficie rischiarata; ed è perciò la medesima intensità direttamente proporzionale al quadrato delle velocità oscillatorie, onde sono animati gli atomi dell' etere: ma le semplici velocità di oscillazione negli atomi eterei , propagandosi tutt' all' intorno, variano in quella stessa ragione che abbiamo già dimostrato (Acust. 16°.) per le molecole aeree nel suono, cioè inversamente alle distanze dal centro luminoso: è dunque manifesta la legge che abbiamo asserita sulla variazione dell' intensità di una luce, la quale si diffonda con raggi divergenti; sicchè una data superficie sarà quattro o nove volte meno illustrata a una distanza doppia o tripla dalla sorgente luminosa.

Avvertiamo che l' aria, l' acqua, il vetro e gli altri corpi diafani, per mezzo ai quali si trasmettono i raggi luminosi, sono tutti più o meno resistenti e intercettano una parte sensibile della luce: egli è perciò che questa nell' attraversare quei corpi s' indebolisce più che non porti la ragione inversa del quadrato delle distanze.

42°. **Grandezza apparente degli oggetti**. Anche le grandezze apparenti degli oggetti dipendono dalle distanze, onde questi sono veduti. La grandezza apparente lineare di un oggetto assai

lontano suole misurarsi dall' *angolo cttico*; cioè dall' angolo che fanno i due raggi, i quali si spiccano dai punti estremi dell' oggetto e s'intersecano nel centro dell' occhio: in ragione dell' angolo ottico è la grandezza dell' immagine dipinta sulla retina nel fondo dell' occhio; e siccome da codesta immagine siamo noi usati di apprezzare le qualità di un oggetto lontano, che essa rappresenta e da cui è prodotta, così siamo pure condotti ad estimare la grandezza dell' oggetto dall'angolo ottico. Quindi è che uno stesso corpo o due corpi uguali, collocati a diverse distanze, ci appariranno diversamente grandi; per converso due corpi di diversa grandezza, posti a proporzionate distanze dall' occhio, ci sembreranno uguali fra loro: perchè gli angoli ottici, sotto i quali vediamo i due corpi, sono diversi nel primo caso ed uguali nel secondo.

Sia ora AD (fig. 205.ª) un oggetto terminato per una parte dall' *asse ottico* OO′, ossia da un raggio visuale che passa pel centro dell' occhio ed è perpendicolare alla sua superficie. Supponiamo che l' oggetto non sia veduto obliquamente, ma sia normale all' asse; e dinotiamo rispettivamente con a, d, ω la grandezza vera, la distanza dall' occhio, e l'angolo ottico o la grandezza apparente del medesimo oggetto : avremo $\tang \omega = \frac{a}{d}$; e quindi avremo anche

$$(\gamma') \qquad \omega = \frac{a}{d} \ ,$$

quando la distanza d sia molto grande rispetto ad a , e l' oggetto si vegga per conseguenza dall' occhio sotto un angolo assai piccolo. S' inferisce che dunque *le grandezze lineari apparenti di due corpi stanno tra loro nella ragione diretta delle grandezze vere, e nella ragione inversa delle loro distanze dall' occhio.*

43°. La formola (γ') serve a trovare il diametro reale dei corpi celesti, conosciuta che sia la loro distanza dalla terra e determinato il loro diametro apparente. Sieno per esempio $AA' = 2a$ il

diametro vero del sole; $OD = d$ la distanza della terra o di un osservatore dal disco solare o dal suo centro, $AOA' = 2\omega$ il diametro apparente ovvero l' angolo ottico, sotto il quale è veduto il sole. Preso per unità il raggio del globo terrestre, dalle osservazioni astronomiche si deduce $d = 24000$ incirca, e $2\omega = 32' \, 3'', 3 = 0,009324$ parti di raggio: dunque la formola (γ') ci darà pel diametro reale del sole

$$2a = 2\omega d = 0,009324 \times 24000 = 224 \text{ circ.},$$

e così il raggio del globo solare sarà 112 volte maggiore del raggio terrestre. Ed essendo i volumi delle sfere come i cubi dei raggi rispettivi, ne viene che il volume del sole sia 1404928 volte più grande del volume della terra.

44°. Ritornando alla grandezza apparente degli oggetti, è certo che l' idea la quale noi ci formiamo di questa grandezza, dipende principalmente dalla immagine dipinta nel fondo del nostro occhio o dall' angolo visuale; di sorte che diminuito d'assai un tale angolo e divenuto insensibile, s' impiccoliranno pur di molto all' aspetto e si ridurranno a punti lucidi gli oggetti eziandio grandissimi. Di qua viene che i corpi visibili, comechè separati tra loro e lontani gli uni dagli altri, appariscano nulladimeno vicini e contigui, quando le loro distanze scambievoli sono vedute sotto angoli poco o niente sensibili: quinci è pure che le rette parallele, prolungate a gran distanza ed osservate da una estremità, sembrino convergere sempre più verso l' altra, facendosi tanto minore l' angolo ottico del comune perpendicolo, quanto questo è più rimoto dall' occhio; e che per conseguenza una torre verticale e abbastanza elevata sembri inclinarsi verso l' osservatore che dal piede ne riguarda la cima, riferendo il medesimo osservatore l' altezza della torre alla retta perpendicolare che passa pel suo occhio: finalmente procede dalla stessa cagione che un arco di mediocre ampiezza si vegga in lonta-

nanza a guisa di una linea retta, e che perciò una sfera si trasformi pur da lontano e rassembri a un circolo; poichè all' occhio di chi rimira, appaiono come semplici punti le distanze tra l'arco e la corda corrispondente.

Vero è peraltro che nè varia sempre la grandezza estimata di un oggetto, variando l' angolo ottico o visuale; nè rimanendo costante questo angolo, rimane sempre la stessa quella grandezza. 1. Al variare dell' angolo ottico, non sempre si cambia la stima che noi facciamo della grandezza di un oggetto; perchè dentro certi limiti noi siamo usi di estimare le dimensioni degli oggetti da una cotale abitudine di giudizio, per cui a distanza discreta senza badare all' angolo visuale noi veniamo a formarci un' idea bastantemente giusta della loro grandezza: così è giusta l' idea che noi acquistiamo intorno alla altezza di un uomo veduto alla distanza, per esempio, di 30 metri; e cosiffatta idea non si altera punto, sebbene appressandosi a noi il medesimo uomo, cresca del continuo l' angolo visuale. — 2. Viceversa restando sensibilmente costante l' angolo ottico, non sempre si mantiene la stessa ai nostri sguardi la grandezza apparente di un oggetto: perchè nelle distanze smisurate noi crediamo i corpi tanto più grandi ed estesi, quanto ce li figuriamo più lontani; e per giudicare della loro maggiore o minor lontananza da noi, oltre all'angolo ottico attendiamo precipuamente al numero degli altri oggetti interposti, e al grado meno o più intenso di luce onde i corpi sembrano illustrati. Quindi un medesimo oggetto ci pare più grande di notte che di giorno; perchè quantunque esso venga osservato sotto uno stesso angolo visuale, pure a motivo della luce assai debole si reputa di notte più lontano e perciò appunto più esteso di quello che sia realmente: quindi anche il sole ci apparisce maggiore nell' orizzonte che al meridiano o in altre altezze intermedie; la ragione si è, perchè conservandosi quasi costante per tutto un giorno l' angolo ottico, noi siamo condotti a giudicare che il sole disti più dal nostro occhio nell' orizzonte che in altra posizione abbastanza elevata, sì per gli oggetti che allora si frappongono tra noi e

l'astro, e sì ancora per la luce men viva onde si dipinge nel fondo dell'occhio la sua immagine: in fine per tacere di altri fatti ed illusioni ottiche, le quali trovano la loro spiegazione nel principio esposto di sopra, una linea retta di sufficiente lunghezza si rappresenta all'occhio, che la mira da lontano e non può discernere la differenza de' varii raggi visuali, sotto la forma di un arco che ci rivolge la parte concava; e per la stessa ragione in un luogo largamente aperto i confini dell'orizzonte mostrano l'aspetto di un gran circolo, e il cielo ha la sembianza di una sfera vuota.

45°. **Moto apparente degli oggetti.** Vi hanno delle apparenze ottiche non solo nella grandezza e nelle figure dei corpi, ma anche nel loro movimento. Suppongasi retto l'angolo ADO (fig. 206.ª),e sieno $DA = v$ la velocità reale dell'oggetto D, e $DO = d$ la sua distanza dall'occhio situato in O: l'angolo $AOD = \alpha$ rappresenterà la velocità apparente dello stesso oggetto, e sarà

$$(\gamma'') \qquad \tan g\,\alpha = \frac{v}{d} .$$

Dalla qual formola si traggono varie conseguenze. 1. Se il rapporto tra la velocità v, o lo spazio percorso nell'unità di tempo, e la distanza d è impercettibile, tale sarà pure l'angolo α, e però l'oggetto ci apparirà come immobile; e poichè il detto rapporto della velocità vera alla distanza dall'occhio è impercettibile, sia negli oggetti vicini che si muovono assai lentamente, sia negli oggetti lontani che si muovono eziandio con molta celerità; perciò sì gli uni come gli altri non ci faranno percepire il loro moto, e ci sembrerà che stiano in riposo. Così è insensibile all'occhio il moto di una freccia, la quale indichi le ore nella mostra di un oriuolo divisa in ventiquattro parti uguali, ed insensibile è pure il moto diurno delle stelle intorno alla terra: in ambidue i movimenti ad ogni minuto secondo è percorso un arco di quindici secondi; dunque il moto

di un corpo non potrà percepirsi, se lo spazio descritto in un minuto secondo sia osservato sotto un angolo di 15, o di un numero minore di secondi. — 2. Se due oggetti hanno una medesima velocità, il più lontano dall'occhio sembrerà muoversi più lentamente dell'altro: perocchè a quel modo che per un oggetto sussiste l'equazione (γ''), per l'altro varrà l'equazione consimile $\tan \alpha' = \frac{v'}{d'}$; quindi si stabilisce la proporzione $\tan \alpha : \tan \alpha' = \frac{v}{d} : \frac{v'}{d'}$, dove supposta $v = v'$ e $d > d'$, sarà $\alpha < \alpha'$. 3. Se due corpi si muovono con velocità proporzionali alle distanze dall'occhio, i loro moti apparenti riusciranno uguali ; viceversa se i moti di due corpi appariscono uguali, le loro velocità reali saranno proporzionali alle rispettive distanze dall'occhio: difatti dalla proporzione testè notata risulta $\alpha = \alpha'$, quando si pone $\frac{v}{d} = \frac{v'}{d'}$; e per converso risulta $v : v' = d : d'$ quando sia $\alpha = \alpha'$. — 4. In specie risulteranno tra loro uguali le velocità apparenti di due oggetti , per esempio D e A , i quali sieno ugualmente distanti dall'osservatore ed abbiano una medesima velocità reale. Ma in questo caso se si risguardi pure un terzo oggetto H che sia immobile, si manifesta una nuova apparenza; ed è che i due oggetti D e A sembreranno stare in riposo, e l'oggetto H parrà muoversi nel senso opposto a quello in cui realmente si muovono i due primi: ciò accade perchè D ed A non mutano posizione fra loro, ma solo la cambiano rispetto ad H; e quindi l'occhio scorgendo sempre uguale l'angolo visuale DOA, e sempre maggiori gli angoli HOD ed HOA, stimerà immobili i due oggetti D ed A, e attribuirà all'oggetto fisso H un moto contrario a quello onde i primi sono animati. Così una nuvola, sospinta dal vento verso una banda del cielo, sembra che stia in riposo; laddove la luna che dalla nuvola è attraversata sembra correre velocemente verso la banda opposta: in questa illusione ottica le parti della nuvola conservano tra loro

la stessa distanza, e il moto proprio della luna per un certo tempo non è punto sensibile.

Finora abbiamo supposto che fosse fermo l'occhio di chi riguarda da lungi un oggetto in moto. Se per converso fosse immobile l'oggetto D, e l'occhio procedesse in linea retta da O in O', lo stesso oggetto dovrebbe muoversi apparentemente nella direzione contraria: perchè l'occhio situato in O, mirando l'oggetto lontano D, lo riferisce al punto K; e mirandolo poi dalla posizione O', io riferisce al punto K'. Per somigliante ragione un oggetto sembrerà retrocedere, quando si muova insieme coll'occhio con minor velocità di questo verso una medesima parte dello spazio. Finalmente se l'occhio si muova con gran velocità, gli oggetti laterali, anche vicini e fermi, sembreranno muoversi in direzione contraria: così ai naviganti pare che le terre e le città si dilunghino dalla nave e vadano indietro; a chi viaggia in celere cocchio, pare che corrano in senso opposto gli alberi e le persone che incontra per via; e chi volteggia rapidamente in tondo, crede che girino le case e gli altri oggetti che gli stanno d'intorno.

46°. **Ombra e penombra.** L'ombra e la penombra, come accennammo già nel numero (34°.), sono un effetto della propagazione rettilinea della luce. Se tra un punto luminoso ed una superficie illuminata si collochi un corpo opaco che intercetti in parte i raggi provenienti dal punto, una porzione più o meno grande della superficie resterà priva affatto di luce, ossia nell' *ombra:* là è dunque l' ombra, dove da un centro di luce non giunge alcun raggio luminoso per l' interposizione di un corpo opaco; e si determina geometricamente quell'ombra, circoscrivendo a questo corpo un cono o una piramide che abbia per vertice lo stesso centro di luce. Se poi la sorgente di luce ha qualche dimensione ed è un corpo luminoso, il corpo opaco che si frappone tra la sorgente e la superficie illuminata, getterà su questa un'ombra corrispondente a ciascun punto del corpo luminoso: ne viene quindi che per l'interposizione del corpo opaco un tratto della superficie illuminata rimanga senza veruna luce o nell'ombra, e intorno a questa un altro tratto sia parzialmente privato di luce e resti nella *pe-*

nombra; là è dunque la penombra, dove a motivo di un corpo opaco interposto non possono penetrare che solo alcuni raggi del corpo luminoso.

47°. Rappresenti AA′ (fig. 207ª.) il diametro o la grandezza vera di un corpo luminoso, e sia $BC = a$ l'altezza di un corpo sopra l'orizzonte OO′: condotte pel punto B due rette al lembo superiore ed inferiore del corpo lucido, e prolungatele sino alla retta orizzontale OO′; è chiaro che nell'intervallo CD non potrà penetrare nessun raggio di luce e vi dominerà l'ombra, e che nell'intervallo ED mancherà un numero sempre maggiore di raggi da E fino a D, e vi sarà la penombra. Ora si cerca la lunghezza sì dell'ombra $CD = u$, come della penombra $ED = p$.

Quanto all'ombra, si chiami α l'angolo ADO, o l'altezza apparente del lembo superiore del corpo lucido sull'orizzonte: il triangolo rettangolo BCD ci darà $u = \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha}$. Onde 1. la lunghezza dell'ombra che da un corpo opaco verticale si proietta sopra un piano orizzontale, è reciproca alla tangente trigonometrica dell'altezza apparente del corpo luminoso — 2. La lunghezza dell'ombra sta all'altezza del corpo opaco, come il coseno dell'altezza apparente del corpo lucido al suo seno; poichè dall'equazione ora stabilita si ricava la proporzione $u : a = 1 : \operatorname{tang} \alpha = \cos \alpha : \operatorname{sen} \alpha$. — 3. Dalla medesima equazione si deduce altresì che la lunghezza dell'ombra è uguale all'altezza del corpo opaco, quando l'altezza apparente del corpo lucido, ossia l'angolo α, è semiretto; che l'ombra svanisce quando $\alpha = 90°$; e che per converso diviene infinita, quando $\alpha = 0°$.

Quanto poi alla penombra, si chiamino α' l'angolo A′EO ossia l'altezza apparente del lembo inferiore del corpo lucido, ed ω l'angolo ABA′ ossia la grandezza apparente dello stesso corpo: essendo la penombra p uguale alla differenza CE — CD, per ragione dei due triangoli rettangoli CBE e CBD si avrà

$$p = \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha'} - \frac{a}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{a \operatorname{sen}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha'} = \frac{a \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha'} .$$

Onde la penombra sarà tanto più estesa, quanto più alto è il corpo opaco, e quanto il corpo lucido è più grande o meno elevato sull' orizzonte: le stelle fisse non dànno penombra, perchè rispetto ad esse la grandezza apparente ω è uguale a $0°$.

48°. Se il corpo lucido o il corpo opaco sono due sfere, giova cercare in questo luogo la parte della sfera opaca che resta illuminata, e determinare la figura e la lunghezza dell' ombra, per farne quindi nell' astronomia l' applicazione agli ecclissi del sole e della luna.

Sieno C la sfera luminosa e C′ la sfera opaca (fig. 208.ª), colle tangenti comuni AA′ e BB′, e coi raggi rispettivi $CA = r$, $C'A' = r'$: essendo rettilinea la propagazione della luce, nessun raggio che provenga di là dai punti A e B, potrà incontrare la sfera opaca; e però la parte illuminata e la figura dell' ombra vengono determinate dalle suddette tangenti e dal loro prolungamento. Quanto alla porzione illuminata nella sfera opaca, condotta la retta $CC' = a$ che è la distanza fra i centri delle due sfere, per determinarla basta trovare la metà $x = A'D$ dell' arco A′DB′ che la rappresenta. Dal punto C′ si tiri la retta C′E parallela ad AA′: il triangolo rettangolo CC′E ci darà la relazione $\cos ECC' = \frac{CE}{CC'}$ $= \frac{r - r'}{a}$; ma nel quadrilatero AA′C′C essendo retti gli angoli A ed A′, sono supplementarii fra loro gli altri angoli in C e C′, e perciò $\cos ECC' = -\cos A'C'C = -\cos x$; dunque per risolvere la questione proposta si avrà la formola $\cos x = \frac{r' - r}{a}$. Quindi se sia $r > r'$, cioè la sfera lucida maggiore dell'opaca; sarà $x > 90°$, e così la porzione illuminata si estenderà oltre a un emisferio: se poi sia $r = r'$, risulterà $x = 90°$, e resterà rischiarata solo la metà della sfera opaca: infine se si supponga $r < r'$, verrà $x < 90°$, e per conseguenza la prima sfera non giungerà ad illuminare neppure la metà della seconda.

Quanto alla forma dell' ombra, che la sfera opaca manda dalla parte opposta a quella da cui riceve la luce, nel primo ca-

so essa è un cono $A'OB'$: perchè essendo $A'C'D' < 90°$ ed insieme $C'A'O = 90°$, sarà la somma degli angoli $A'C'D' + C'A'O < 180°$; e perciò le tangenti comuni AA' e BB', prolungate che sieno, convergeranno in un punto O colla retta centrale CC'. Nel secondo caso, in cui le due sfere sono uguali, la somma degli angoli ora menzionati è di due retti; epperò le tangenti comuni riuscendo parallele fra loro, la figura dell'ombra sarà quella di un cilindro indefinito. Nel terzo caso in cui la sfera luminosa si suppone minore della sfera opaca, la somma dei medesimi angoli risulta maggiore di 180°; e quindi le comuni tangenti divergeranno dalla retta de' centri, e l'ombra avrà la forma di un cono troncato inverso.

49°. Fermiamoci a considerare il primo caso, quando la sfera luminosa è più grande della sfera opaca, e cerchiamo la lunghezza $C'O = z$ dell'ombra finita e conica $A'OB'$. Dai triangoli simili ACO, $A'C'O$ abbiamo la proporzione $a + z : z = r : r'$; dunque la lunghezza del cono ombroso sarà

$$(\gamma''') \qquad z = \frac{ar'}{r - r'} .$$

Per addurre un qualche esempio, sieno 1. C il sole, e C' la terra: preso per unità il raggio r' del globo terrestre, sappiamo che il raggio r del globo solare è $= 112$ incirca; se dunque si ponga $a = 24000$ che è la distanza media del centro della terra dal centro del sole, la formola (γ''') ci darà $z = \frac{24000}{111} = 216$ in circa per la lunghezza del cono d' ombra, che la terra proietta dietro di sè dalla parte opposta al sole. Ciò mostra che la luna può entrare nel cono ombroso della terra, essendo la sua distanza media dal centro di questa a un dipresso uguale a 60 raggi terrestri: che anzi penetrando la luna nel cono ombroso della terra, può anche immergervisi interamente; poichè il diametro della luna è circa un quarto di quello della terra, e d'altronde una

sezione trasversale del cono ombroso ha il diametro uguale alla metà del diametro terrestre nel punto medio dell' asse che dista di 108 unità dal centro della terra, e perciò ha un diametro anche maggiore alla distanza di 60 unità o raggi terrestri. — Perchè la luna s' immerga realmente nell' ombra della terra e si ecclissi, è mestieri che essa stia in opposizione col sole, e la terra si trovi tra il globo solare e il globo lunare. Se la luna si movesse nel piano dell' orbita terrestre, i suoi ecclissi accadrebbero ad ogni opposizione o ad ogni plenilunio: ma siccome l' orbita lunare è inclinata al piano, nel quale si muove la terra intorno al sole; così gli ecclissi della luna non succedono che in certe opposizioni particolari, in quelle cioè in cui il centro della luna si trova nei nodi o vicino ai medesimi, dove la sua orbita taglia il piano dell' eclittica. In queste circostanze gli ecclissi di luna saranno totali o parziali, secondochè essa s'immerge interamente od in parte nel cono ombroso della terra. — Mentre la luna sta per entrare nell' ombra od emergere dalla medesima, un osservatore la vede impallidire tanto più quanto essa è più prossima al cono ombroso. Un tal fenomeno deve ripetersi dalla penombra che si forma tutt' intorno all' ombra terrestre, e la quale si determina conducendo le rette indefinite AB'K, BA'H che tocchino i lembi inferiore del sole e superiore della terra, e viceversa: stando la luna negli spazii KB'O ed HA'O, dove regna la penombra e arrivano i raggi di una porzione sola dell'emisferio solare, il suo splendore dovrà tanto più illanguidirsi, quanto essa più si avvicina al cono ombroso A'OB'.

Sieno 2. C il sole, e C' la luna. Rappresentando sempre coll' unità il raggio terrestre, abbiamo $r = 112$ ed $r' = 0,\ 2728$; sappiamo inoltre dall'astronomia che in numeri approssimati la distanza massima del sole dalla luna è $a = 24500$, e la minima è $a = 23700$: quindi applicando la formola (γ'''), troveremo che la massima lunghezza dell'ombra lunare è $z = 59,\ 82$; e la minima è $z = 57,\ 86$. Dunque poichè la massima distanza del centro terrestre dal centro della luna si esprime pel numero 64, e la minima per il numero 56; perciò il cono d' ombra lunare può

arrivare fino alla regione della terra e stendersi puranco al di là di essa, e così produrre un ecclissi più o meno completo del globo solare. — Gli ecclissi di sole, che meglio si direbbero ecclissi di terra, non hanno luogo che nel novilunio o nella congiunzione della luna, quando questo astro si trova presso i nodi della sua orbita tra il sole e la terra. Se l'ombra della luna arriva sino alla terra, vi sarà ecclissi totale pei paesi situati nella porzione MN della superficie terrestre, che è compresa dall'ombra; ed ecclissi parziale pei paesi laterali, che son posti nella penonbra KB'OA'H: se poi il cono d'ombra lunare non si estende fino alla terra; allora da ogni punto dell'emisferio terrestre che è rivolto verso il sole, scorgendosi intieramente o in parte il disco solare, non potrà accadere se non un ecclissi parziale. Ma in questo caso succede un fenomeno speciale; ed è che da ogni punto della porzione M'N' di superficie terrestre, la quale rimane intercetta dalla nappa opposta nel vertice al cono ombroso, la luna si vede proiettata come un cerchio nero sul disco solare, di modo che ne lascia scoperta tutta all'intorno una parte in forma di corona luminosa: un tale ecclissi dicesi annullare; e sarà anche centrale per quei paesi, nei quali la retta che congiunge l'occhio dell'osservatore col centro del sole, passa eziandio pel centro della luna.

Le nozioni sviluppate in questo primo capo risguardano principalmente la luce diretta: passiamo ora a trattare in due capi distinti della luce riflessa e della luce rifratta.

CAPO II.

LUCE RIFLESSA.

50°. La luce quando incontra la superficie de' corpi, parte penetra nell'interno di questi attraversandoli sotto forma raggiante, o venendo dai medesimi corpi assorbita e spenta; e parte è sparpagliata all'esterno e diffusa in tutte le direzioni se la superficie sia sca-

bra, ovvero è rimbalzata e riflessa regolarmente se la superficie sia tersa e ben levigata o formi uno specchio. Le leggi con cui si fa questa riflessione specolare della luce, sono come nella riflessione del moto di corpi elastici le due seguenti: 1 il raggio incidente e il riflesso si trovano costantemente in uno stesso piano normale alla superficie riflettente; 2. l' angolo d' incidenza è sempre uguale all' angolo di riflessione, cioè sono sempre uguali fra loro gli angoli fatti dal raggio incidente e dal raggio riflesso colla retta normale alla superficie specolare nel punto d' incidenza.

Supposte queste leggi che si verificano sperimentalmente, per esempio coll' osservare in un cerchio graduato l' andamento di un raggio diretto e riflesso su di uno specchietto centrale; prendiamo ad esaminare e a spiegare per mezzo della matematica i fenomeni della luce riflessa negli specchi piani o curvi, e tra i curvi consideriamo specialmente gli specchi sferici concavi o convessi, i quali sopra gli altri si possono costruire con maggior grado di perfezione e sono di maggiore uso nella formazione degli strumenti ottici.

51°. **Riflessione della luce sugli specchi sferici concavi.** Rappappresenti SS' (fig. 209.a) uno specchio sferico, cioè un segmente di superficie sferica; e sieno $CA=r$ il raggio, C il centro di curvatura, ed A il centro di figura dello specchio o il punto di mezzo della sua superficie riflettente: la retta indefinita AB, che passa pei due centri di curvatura e di figura, dicesi *asse principale* dello specchio; ogni altra retta, la quale passi pel centro C e per un punto qualunque della superficie specolare, si chiama *asse secondario*; e l' angolo centrale, che ha per misura l' arco SAS' o la sezione fatta nello specchio con un piano condotto per l' asse principale, appellasi l' *apertura* del medesimo specchio. Ciò posto, un raggio di luce F'M che procede da un punto luminoso F' situato sopra un asse qualunque, per es. sopra l'asse principale AB, cada in M sullo specchio sferico dalla parte concava, e venga quinci riflesso secondo la direzione MF: si cer-

ca la posizione del punto F, in cui il raggio riflesso incontra il detto asse AB.

Si conduca la normale o il raggio CM al punto d' incidenza; e si chiamino δ, δ' le distanze FA, F'A dei punti F, F' dallo specchio, ed α l' angolo ACM. Essendo uguali fra loro gli angoli di incidenza e di riflessione, vale a dire gli angoli F'MC ed FMC, nel triangolo FF'M sarà diviso per metà dal raggio MC l' angolo in M, e perciò il lato opposto FF' verrà tagliato dal medesimo raggio in parti proporzionali agli altri due lati; sicchè abbiamo la proporzione CF : CF' = MF: MF', ovvero l' equazione

$$\frac{r-\delta}{\delta'-r}=\frac{\sqrt{r^2+(r-\delta)^2-2r(r-\delta)\cos\alpha}}{\sqrt{r^2+(\delta'-r)^2+2r(\delta'-r)\cos\alpha}},$$

e da cotesta equazione può facilmente ricavarsi il valore della distanza δ, per la quale si determina in qualunque caso la posizione cercata del punto F.

52*. Ma se l' apertura dello specchio è assai piccola, quale suol essere negli strumenti ottici, allora essendo prossimamente $\cos\alpha=1$, l' equazione precedente diviene

$$\frac{r-\delta}{\delta'-r}=\frac{r-(r-\delta)}{r+(\delta'-r)}=\frac{\delta}{\delta'};$$

e questa si può scrivere sotto le tre formole

$$(\varepsilon)\qquad\left\{\begin{array}{l}\delta=\dfrac{r\delta'}{2\delta'-r}\;,\quad\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{1}{\delta'}=\dfrac{2}{r}\;,\\[2ex]\delta=\dfrac{r}{2}\left(1+\dfrac{r}{2\delta'-r}\right).\end{array}\right.$$

Considerando per es. la prima di queste formole, vediamo che la distanza δ del punto F dallo specchio è indipendente dall' angolo α, e conseguentemente dalla direzione del raggio incidente; dunque in uno specchio sferico di piccola apertura, i raggi luminosi che partendo dal punto F′ di un asse AB cadono sulla superficie specolare, dopo la riflessione vanno tutti a riunirsi sensibilmente in uno stesso punto F del medesimo asse AB, e vi dipingono un' immagine del punto raggiante F′: viceversa se il punto luminoso fosse in F, i raggi divergenti verso lo specchio, sarebbero da questo riflessi e concentrati nel punto F′, e da una tale reciprocità deriva che i due punti si chiamino *fochi* l'uno rispetto all'altro, o *fochi coniugati* dello specchio sferico concavo.

Quando i raggi luminosi provengono da un punto F′ molto distante dallo specchio, e cadono sopra di esso paralleli all'asse AB, allora potendo farsi $\delta' = \infty$ per es. nella seconda formola (ε), risulta evidentemente $\delta' = \frac{r}{2}$; cioè negli specchi sferici di piccola apertura i raggi di luce che vengono parallelamente all'asse, dopo la riflessione si concentrano tutti sul medesimo asse nel punto medio del raggio di curvatura: in questo caso il punto F si appella *foco principale*, o semplicemente *foco* dello specchio; e la sua distanza $\frac{r}{2}$ dalla superficie riflettente prende il nome di *distanza fo cale principale*, ovvero di *distanza focale* senz'altro.

Analizzando la terza formola (ε), possiamo in fine determinare la posizione del foco coniugato o dell'immagine di un punto luminoso nelle diverse sue distanze dallo specchio.

53°. Facciamo pertanto diverse ipotesi; e sia 1. $\delta' > r$: sarà $2\delta' - r > r$, ed $\frac{r}{2\delta' - r}$ una frazione propria e positiva; stando dunque alla terza formola (ε), è chiaro che nel presente caso risulterà la distanza $\delta > \frac{r}{2}$ ed insieme $< r$, e però il foco coniuga-

to o l'immagine del punto raggiante si formerà tra il foco principale e il centro di curvatura dello specchio.

2. Si supponga $\delta' = r$: avremo $\frac{r}{2\delta' - r} = 1$, e quindi $\delta = r$; cioè i raggi riflessi dallo specchio sferico convergono verso il centro, nel quale è situato il punto luminoso.

3. Poniamo che il punto raggiante si trovi tra il foco principale e il centro di curvatura, sicchè abbiasi $\delta' > \frac{r}{2}$ ed insieme $< r$: in questa ipotesi essendo $2\delta' - r > 0$ ed anche $< r$, la frazione $\frac{r}{2\delta' - r}$ sarà impropria e positiva; per conseguenza dalla formola che analizziamo, verrà la distanza coniugata $\delta > r$, e il foco corrispondente cadrà al di là del centro della superficie specolare.

4. Se il punto radiante sia posto nel foco principale dello specchio, la sua immagine dovrà formarsi a una distanza infinita, ossia i raggi incidenti dovranno riflettersi in direzioni parallele all'asse: ciò è manifesto da quanto abbiamo detto nel numero precedente, e s'inferisce altresì dalla nostra formola (ε. 3a.), che ci somministra $\delta = \infty$ per $\delta' = \frac{r}{2}$.

5. Da ultimo si ponga $\delta' < \frac{r}{2}$, e il punto luminoso sia collocato in F' (fig. 210a.) tra il foco principale e la superficie dello specchio: in questo caso la differenza $2\delta' - r$ è negativa, ed insieme minore di r quanto al valore numerico; perciò essendo negativo il rapporto $\frac{r}{2\delta' - r}$, e numericamente maggiore dell' unità, dalla consueta formola emerge pur negativa la distanza focale coniugata δ. Adunque nell'ipotesi che abbiamo fatta, il foco coniugato si troverà in un punto F sul prolungamento dell'asse dietro la superficie specolare: e come i raggi diretti F'M, F'M' cadono sullo specchio divergendo gli uni dagli altri; così saranno pure riflessi secondo le direzioni divergenti MN ed M'N', e non s'incontreranno.

se non prolungati mentalmente dalla parte opposta dello specchio. Il foco ora considerato dicesi *virtuale*, i fochi considerati di sopra si chiamano *reali*; la differenza tra i fochi reali e virtuali è questa, che i primi risultano dal concorso reale dei raggi riflessi in un punto, dove si dipinge veramente un'immagine del punto luminoso e si può ricevere su di un diaframma; laddove nel foco virtuale non si riuniscono realmente i raggi ma i loro prolungamenti, e l'occhio osservandolo vi vede un'immagine aerea del punto luminoso, come se i raggi riflessi procedessero dal foco medesimo.

54°. Passiamo ora a considerare un oggetto F'H' posto dinanzi ad un specchio sferico concavo SS' (fig. 211a). Da ciascun punto della faccia che è rivolta verso lo specchio, partono de' raggi luminosi che cadendo sulla superficie specolare vengono riflessi e concentrati nel rispettivo foco coniugato: di che si forma, e si dipinge un'immagine FH dell'oggetto; e di tale immagine potremo fissare geometricamente i limiti e la posizione, tirando pei punti estremi dell'oggetto i due assi ACF', BCH' e determinando su di questi i fochi F, H coniugati di quelle estremità.

Per trovar poi la relazione tra la grandezza lineare dell'oggetto e della sua immagine, osserviamo che per ragione della piccola apertura dello specchio possono riguardarsi come uguali sì le due rette ACF', BCH', e sì per conseguenza (52.° ε) le altre due AF, BH: quindi i due triangoli CFH e CF'H', dimostrandosi isosceli e simili, ci daranno la proporzione

$$FH : F'H' = CF : CF' = r - \delta : \delta' - r;$$

dalla quale ricaveremo

$$FH = \frac{r-\delta}{\delta'-r} F'H' = \frac{r - \dfrac{r\delta'}{2\delta'-r}}{\delta'-r} F'H',$$

sostituitovi anche il valore di δ preso dalla prima formola (ε. 52.°): quindi abbiamo la relazione domandata

$$(\varepsilon') \qquad FH = \frac{r}{2\delta' - r}\, F'H'.$$

55°. Dà questa formola e dalle cose notate nel numero (53.°) discendono i seguenti corollarii. 1. Se l' oggetto è più distante dallo specchio che il centro di curvatura, ossia se si pone $\delta' > r$, l' immagine dello stesso oggetto, siccome quella dei singoli punti, sarà reale e si formerà nell' aria libera tra il foco principale e il centro di curvatura: oltre a ciò dovrà essa apparire capovolta, trovandosi i punti estremi dell' oggetto e i loro fochi nei rispettivi assi ACF', BCH' di qua e di là dal centro C, dove i medesimi assi si tagliano: in fine l' immagine sarà minore dell' oggetto; perchè essendo $2\delta' - r > r$, nella formola (ε') il fattore $\frac{r}{2\delta' - r}$ è una frazione propria. Che anzi quell' immagine diverrà tanto più piccola, accostandosi al foco principale, quanto più grande è la distanza dell' oggetto dalla superficie dello specchio.

2. Viceversa se si suppone $\delta' < r$, ed insieme $> \frac{r}{2}$, ossia se l' oggetto è situato tra il foco principale e il centro di curvatura, l' immagine sua si dipingerà al di là del medesimo centro; sarà sempre rovesciata, ma più grande dell' oggetto; e si dileguerà del tutto, quando l'oggetto si colloca nel foco principale, e i raggi di luce provenienti da ciascun punto dello stesso oggetto sono riflessi sullo specchio in direzioni parallele.

3. Se l'oggetto è tra lo specchio ed il foco principale, sicchè abbiasi $\delta' < \frac{r}{2}$, la sua immagine sarà virtuale, non altrimenti che le immagini dei singoli punti da cui risulta: quindi essa com-

parirà diritta dietro la superficie specolare, stando le due estremità dell' oggetto e i loro fochi da una medesima parte dell'angolo C, sotto il quale s' intersecano gli assi corrispondenti; e di più riuscirà maggiore dello stesso oggetto, come è chiaro per sè, e s' intende ancora dall' essere la differenza $2\delta' - r$ più piccola di r quanto al valore numerico, e perciò il fattore $\frac{r}{2\delta' - r}$ assolutamente più grande dell' unità nella formola (ε').

56°. **Riflessione della luce sugli specchi sferici convessi.** La differenza tra gli specchi sferici concavi e convessi consiste in questo, che i primi presentano la loro cavità al punto luminoso e all' oggetto, mentre i secondi gli presentano la propria convessità: dunque in uno specchio sferico convesso SS′ (fig. 212.ª), rispetto alla riflessione dei raggi vibrati da un punto luminoso F′, ovvero da un oggetto F′H′, potremo adoperare le formole (ε) ed (ε'), già stabilite per la determinazione delle distanze focali e delle immagini in uno specchio sferico concavo, cangiando solo il segno del raggio r di curvatura che trovasi dalla parte opposta alla superficie specolare. Pertanto nel caso d'uno specchio sferico convesso valgono le formole

$$(\varepsilon'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = -\dfrac{r\delta'}{2\delta' + r}, \; \delta = -\dfrac{r}{2}\left(1 - \dfrac{r}{2\delta' + r}\right), \\[2ex] FH = -\dfrac{r}{2\delta' + r} F'H'; \end{array} \right.$$

delle quali le prime due ci fanno conoscere la distanza focale o la posizione del foco coniugato F di un punto luminoso F′, e la terza ci dà la grandezza dell' immagine FH di un oggetto luminoso od illuminato F′H′.

Quanto ai fochi in uno specchio sferico convesso, dalla prima delle tre formole ora scritte apparisce chiaro che la distanza focale δ risulta sempre negativa, e che perciò il foco coniugato F del punto radiante F′ è sempre virtuale o situato dietro la super-

ficie specolare. Inoltre un tal foco si forma generalmente tra la parte concava dello specchio e il punto medio del raggio CA, che prolungato passa pel punto luminoso; perchè essendo frazione propria sì il rapporto $\frac{r}{2\delta'+r}$, e sì la differenza $1-\frac{r}{2\delta'+r}$, dalla seconda delle formole superiori si dimostra $\delta<\frac{r}{2}$ in valore assoluto: allora solamente il foco coincide col punto medio del raggio di curvatura e chiamasi *foco principale*, quando il punto radiante è posto a una distanza infinita dallo specchio, e i raggi luminosi cadono sulla superficie convessa parallelamente all'asse CAF′.

Quanto poi all'immagine FH di un oggetto F′H′, essa è sempre virtuale, come virtuali sono sempre le immagini o i fochi dei singoli punti dell'oggetto medesimo: di più essa è diritta, perchè trovasi col suo oggetto dalla stessa parte dell'angolo F′CH′ degli assi estremi: da ultimo è costantemente più piccola dell'oggetto, siccome è evidente per sè, e si ricava ancora dalla terza formola (ε''), dove il primo fattore è minore dell'unità.

57°. **Riflessione della luce negli specchi piani.** La curvatura di un circolo o di una superficie sferica, e il suo raggio stanno tra loro in ragione inversa; e così la curvatura è nulla, e la superficie diventa piana quando il raggio si supponga infinito. Adunque considerato il raggio r come infinito nelle formole per es. (ε) ed (ε') degli specchi sferici, e perciò trascurata la quantità $2\delta'$ in confronto del medesimo raggio, le due uguaglianze che quinci risultano $\delta=-\delta'$, $FH=-F'H'$, avranno luogo in uno specchio piano, e tutto insieme daranno la ragione dei fenomeni che succedono per la riflessione dei raggi luminosi in cosiffatto specchio.

Dalla prima di queste equazioni s'inferisce che in uno specchio piano SS′ (fig. 213.ª), l'immagine o il foco F di un punto luminoso F′ è sempre virtuale, e che apparisce dietro la superficie specolare a una distanza uguale a quella, in cui si trova il punto radiante dinanzi alla medesima superficie: similmente dalla secon-

da equazione si ricava che l'immagine virtuale FH è uguale in grandezza, ed è anche simmetrica col suo oggetto F'H' rispetto alla faccia SS' dello specchio; giacchè ogni punto dell'oggetto, come F' ed H', ha un foco simmetrico F ed H rispetto ad SS'.

Per conoscere nei casi particolari la posizione dell'immagine, si avverta che l'oggetto colla propria immagine fa sempre un angolo doppio di quello che forma collo specchio. Difatti essendo l'immagine e l'oggetto simmetrici rispetto allo specchio, le tre rette SS', HF ed H'F', da cui questo e quelli sono rappresentati, concorreranno in uno stesso punto C; e nei due triangoli uguali BHC, BH'C saranno uguali gli angoli HCB ed H'CB: perciò chiamando α ed ω gli angoli che l'oggetto fa rispettivamente colla sua immagine e collo specchio, avremo $\alpha = 2\omega$. Quindi se lo specchio è parallelo all'orizzonte, gli oggetti verticali si mostreranno capovolti nella loro immagine; perchè in questo caso si ha $\omega = 90°$, ed $\alpha = 180°$: se poi lo specchio fosse inclinato all'orizzonte sotto un angolo semiretto, gli oggetti verticali dovrebbero apparire orizzontali; perchè sarebbe allora $\omega = 45°$, ed $\alpha = 90°$: in fine se lo specchio sia posto verticalmente, l'immagine di un oggetto verticale sarà diritta e parallela allo stesso oggetto; perchè in tal caso come abbiamo $\omega = 0°$, così otteniamo ancora $\alpha = 0°$.

58°. L'immagine di un punto o di un oggetto luminoso si può anche moltiplicare in diverse maniere. Sieno per es. i due specchi piani SS', SS'' (fig. 214ª.) congiunti ad angolo, e un punto radiante K sia posto nell'angolo S'SS''. Condotte le rette KF, FF', F'F'', . . . alternamente perpendicolari al primo e al secondo specchio, e prese KA = AF, FB = BF', F'C = CF'', ... ; i punti F , F' , F'', . . . saranno i luoghi di altrettante immagini dell'oggetto K, cui potrà veder tutte un occhio convenientemente situato: la ragione si è, perchè ciascuno dei punti menzionati è insieme immagine rispetto a uno specchio, e fa le veci di oggetto risguardo all'altro. In somigliante modo tirate le rette Kf, ff', $f'f''$, . . . alternamente normali al secondo e al primo specchio, e fatte $Ka = af$, $fb = bf'$, $f'c = cf''$, ... ; per la molteplice e successiva riflessione fra i due specchi, si otterrà un' altra serie

di immagini f, f', f'',.... del medesimo oggetto o punto radiante K.

Il numero delle immagini cresce coll' impiccolirsi l' angolo dei due specchi; e quando questi sieno paralleli, le immagini si dipingono tutte su la stessa normale KF indefinitamente prolungata. In ogni caso le successive immagini, provenendo dai raggi una, due o più volte riflessi, debbono apparire tanto meno vivaci, quanto sono più moltiplicate. Sopra la molteplice riflessione che si opera negli specchi posti ad angolo, è fondato il *caleidoscopio* di Brewster.

Il fenomeno della moltiplicazione delle immagini spesso si osserva ancora in un solo specchio di vetro abbastanza grosso. Succede ciò per la doppia riflessione che si fa sulla faccia anteriore di vetro, e sulla faccia posteriore di metallo: e come una parte di luce, riflessa dalla seconda faccia sulla prima, è rimandata da questa a quella; così può accadere che alcuni raggi luminosi giungano all' occhio dopo tre riflessioni, altri dopo cinque o più riflessioni in numero dispari, e perciò si dieno a vedere parecchie immagini di uno stesso oggetto o punto radiante.

59°. **Riflessione in altre specie di specchi.** Oltre agli specchi piani e sferici, possono anche considerarsi altre specie di specchi; ma intorno a questi e alle immagini che vi si formano per riflessione, basterà che notiamo in breve le cose seguenti.

Gli specchi cilindrici partecipano dei piani nella loro lunghezza e degli sferici convessi nella loro larghezza: dunque in uno specchio cilindrico l' immagine virtuale conserva le dimensioni dell' oggetto quanto alla lunghezza, ed è impiccolita quanto alla larghezza; e così un oggetto regolare, riflesso da un tale specchio, comparirà sformato, e per converso un oggetto bizzarro o un disegno confuso potrà mostrarsi ben formato e distinto. Similmente gli specchi conici equivalendo ai piani secondo la lunghezza, e secondo la larghezzza agli specchi sferici convessi di raggio che diviene sempre più corto dalla base al vertice del cono, ne segue che l'immagine corrisponde all'oggetto in quelle parti che ri-

sguardano la lunghezza di uno specchio conico, ma che si va sempre più assottigliando dalla base al vertice del cono in quelle altre parti che risguardano la larghezza dello specchio.

Per ciò che appartiene agli specchi parabolici, nel numero (XI) dell'Introduzione alla Meccanica abbiamo veduto che un diametro della parabola generatrice e il corrispondente raggio vettore fanno di qua e di là angoli uguali colla tangente o colla normale presso il punto d'incontro: dunque i raggi luminosi che cadono sulla parte concava di uno specchio parabolico, andranno tutti a riunirsi nel foco della parabola generatrice; e viceversa i raggi che dal foco cadono divergenti nella superficie di uno specchio parabolico di qualunque apertura, saranno tutti riflessi in direzione parallela all'asse. Ciò stesso si avvera prossimamente, come abbiamo veduto, negli specchi sferici di piccola apertura: ma appunto perchè in questi specchi il sito di riunione dei raggi riflessi non è un punto matematico, ma una serie più o meno grande di punti lungo l'asse e intorno al medesimo; perciò in essi succede sempre un certo divagamento del foco o aberrazione di sfericità, che impedisce più o meno la formazione distinta delle immagini e che noi vogliamo ora determinare.

60°. **Aberrazione di sfericità negli specchi.** Sia SS′ (fig. 209.ª) uno specchio sferico di raggio $CA = r$; F′ un punto radiante, posto per es. sull'asse principale AB alla distanza $F'A = \delta'$; F′M un raggio luminoso, riflesso dalla superficie specolare nella direzione MF: cerchiamo con più esattezza la distanza $FA = \delta$ del punto F, in cui il raggio riflesso incontra l'asse dello specchio.

Indicando, come abbiamo fatto in un altro numero, con α l'angolo ACM, e con x la perpendicolare MN condotta dal punto M sull'asse, avremo prossimamente $AN = \frac{x^2}{2r}$; giacchè negli specchi di piccola apertura il perpendicolo x di poco differisce dall' arco AM, e si possono ancora trascurare le sue potenze superiori alla seconda: quindi essendo $\cos\alpha = \frac{NC}{CM} = \frac{r - AN}{r} = 1 - \frac{x^2}{2r^2}$,

nell' equazione del numero (51°.) saranno

$$\sqrt{r^2+(r-\delta)^2-2r(r-\delta)\cos\alpha}=\left[\delta^2+(r-\delta)\frac{x^2}{r}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\delta+\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{r}\right)\frac{x^2}{2}\ .$$

$$\sqrt{r^2+(\delta'-r)^2+2r(\delta'-r)\cos\alpha}=\left[\ \delta'^2-(\delta'-r)\ \frac{x^2}{r}\ \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\delta'-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\delta'}\right)\frac{x^2}{2}\ ;$$

e però la medesima equazione diverrà

$$\frac{r-\delta}{\delta'-r}=\frac{\delta-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\delta}\right)\frac{x^2}{2}}{\delta'-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\delta'}\right)\frac{x^2}{2}}\ .$$

Quindi si deduce

$$(\delta'-r)\delta-(r-\delta)\delta'=\left[(\delta'-r)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\delta}\right)-(r-\delta)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\delta'}\right)\right]\frac{x^2}{2}$$

$$=\left[(\delta'-r)\left(\frac{\delta-r}{r\delta}\right)-(r-\delta)\left(\frac{\delta'-r}{r\delta'}\right)\right]\frac{x^2}{2}$$

$$=-\ \frac{(r-\delta)(\delta'-r)}{2r}\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta'}\right)x^2\ ,$$

e per conseguenza,

$$\delta = \frac{r\delta'}{2\delta' - r} - \frac{(r-\delta)(\delta'-r)}{2r(2\delta'-r)}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'}\right)x^2 .$$

Pertanto il valore della distanza δ si compone di due termini, dei quali l' uno è di grandezza finita ed uguale per tutti i raggi riflessi, l' altro poi è tanto più piccolo, quanto più vicini all' asse dello specchio sono i raggi diretti: pei raggi incidenti nelle parti prossime all' asse, la distanza δ può rappresentarsi senza errore sensibile col solo primo termine, e può stabilirsi in F il punto di riunione de' raggi riflessi; pei raggi incidenti verso le estremità dello specchio, la distanza δ risulta minore, e il punto di riunione sarà in f più dappresso alla superficie riflettente; gli altri raggi dopo la riflessione si concentreranno lungo l' asse nei punti situati tra F ed f. Da questo sparpagliamento del foco, che appellasi *aberrazione di sfericità* ed è dipendente dall' apertura e dalla forma sferica dello specchio, deriva che l' immagine del punto luminoso F' non sia del tutto precisa, incrociandosi i raggi riflessi in una piccola porzione Ff dell' asse, e condensandosi in cerchietti normali intorno al medesimo.

Ora se pel punto F, dove si raccolgono i raggi riflessi vicino all' asse, conducasi la retta FD perpendicolare al medesimo asse, e si prolunghi fino all' incontro dell' ultimo raggio riflesso che passa per f, è chiaro che i raggi incidenti sull' arco AS, dopo la riflessione passeranno tutti per la retta FD: la piccola porzione Ff dell' asse chiamasi *aberrazione longitudinale di sfericità*, quest' altra retta FD dicesi *aberrazione laterale* pur *di sfericità*. — Quanto alla prima aberrazione, è manifesto per le cose discorse che essa vien data dal secondo termine dell' ultima equazione, purchè s' intenda espressa con x la semi-apertura dello specchio: avremo dunque

$$Ff = \frac{(r-\delta)(\delta'-r)}{2r(2\delta'-r)}\left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'}\right)x^2 ;$$

e quindi sostituendo i valori approssimati della quantità δ, e del binomio $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'}$, presi dalle due prime formole (ε. 52°), avremo ancora

$$Ff = \frac{\left(r - \frac{r\delta'}{2\delta' - r}\right)(\delta' - r)}{2r(2\delta' - r)} \cdot \frac{2x^2}{r} = \frac{(r\delta' - r^2)(\delta' - r)}{r(2\delta' - r)^2} \cdot \frac{x^2}{r},$$

ossia

$$Ff = \frac{(\delta' - r)^2}{(2\delta' - r)^2} \cdot \frac{x^2}{r}$$

per l'aberrazione longitudinale di sfericità. — Quanto all' aberrazione laterale, essendo prossimamente $\tang f = \frac{x}{\delta} = \frac{(2\delta' - r)x}{r\delta'}$, sarà pure

$$FD = Ff.\ \tang f = \frac{(\delta' - r)^2}{\delta'(2\delta' - r)} \frac{x^3}{r^2}.$$

Quando i raggi cadono paralleli sulla superficie specolare, e la distanza δ' può considerarsi come infinita, allora l'aberrazione longitudinale e laterale di sfericità si riducono rispettivamente alle espressioni $\frac{x^2}{4r}$, $\frac{x^3}{2r^2}$; onde in questa ipotesi l' aberrazione longitudinale sta alla laterale come $r : 2x$, ossia come il raggio all' apertura dello specchio.

61°. Notiamo qui in fine che siccome i raggi vibrati da un punto luminoso e riflessi su di un arco circolare non si dirigono esattamente verso un medesimo punto dell'asse, ma lo incontrano in varii punti consecutivi da F sino in f; così ciascuno di essi dopo la riflessione dovrà tagliare il raggio contiguo in un punto, che sarà perciò illuminato più dei punti laterali: ciò stesso suc-

cede generalmente nei raggi, che da un punto luminoso vanno a cadere in un'altra linea qualunque, e sono da questa rimbalzati e riflessi. La serie dei punti in cui si tagliano i raggi successivi, o il luogo geometrico delle contigue intersecazioni costituisce una curva, la quale rifulge di maggior luce che lo spazio circostante, e si distingue col nome di *caustica per riflessione*: a una superficie riflettente corrisponde in generale una caustica, che si estende in due dimensioni. La natura delle linee caustiche dipende, come è chiaro, dalla diversa natura delle linee riflettenti, e dalla varia direzione dei raggi incidenti. Noi ci teniamo dal determinare col calcolo la caustica di una data curva riflettente, per non protrarre soverchiamente oltre i giusti confini la presente appendice, e passiamo subito a trattare della luce rifratta.

CAPO III.

LUCE RIFRATTA.

62°. **Leggi della rifrazione semplice.** Passando un raggio di luce da un mezzo ad un altro di densità differente, se cade normalmente alla superficie che separa i due mezzi, prosegue il suo cammino senza deviar punto dalla primitiva direzione; ma se cade obliquamente alla medesima superficie, esso allora cangia di direzione e si rifrange colle due leggi seguenti: 1. il raggio incidente e il raggio rifratto si trovano sempre in uno stesso piano normale alla superficie di separazione de' due mezzi; 2. i seni degli angoli d'incidenza e di rifrazione, cioè i seni degli angoli fatti dal raggio incidente e dal raggio rifratto colla retta perpendicolare alla superficie di separazione nel punto d'incidenza, hanno tra loro un rapporto costante per gli stessi mezzi.

Queste leggi si dimostrano sperimentalmente: se per es. si riempia di acqua un vaso emisferico AB'A' (fig. 215.ª), e si faccia cadere nel centro C della superficie liquida AA' un raggio luminoso, si vedrà che il raggio HC, passando dall'aria nell'acqua, si

rifrange e prende una nuova direzione CK più vicina alla normale BCB′; e per converso il raggio KC, passando dall'acqua nell'aria, si allontana dalla medesima retta normale alla superficie di separazione de' duo mezzi, e segue la direzione CH. Oltre a ciò i due raggi, diretto e rifratto, si vedranno situati nel piano del circolo ABA′B′; e misurando gli angoli HCB, KCB′ nella circonferenza graduata del medesimo circolo, potrà verificarsi che il rapporto de' loro seni non varia punto, qualunque sia l'inclinazione del raggio incidente.

63°. Nel passaggio di un raggio luminoso da un mezzo omogeneo ad un altro pure omogeneo, indichiamo con i ed r gli angoli d'incidenza e di rifrazione, e con n il rapporto dei loro seni, sicchè abbiasi $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}=n$: la quantità n costante per ciascun mezzo, si chiama ***indice di rifrazione***; ed è maggiore o minore dell'unità, secondo che più o meno denso del primo è l'altro mezzo in cui passa il raggio, e questo si rifrange avvicinandosi o scostandosi più dalla perpendicolare alla superficie di separazione nel punto d'incidenza. De' due mezzi il più denso è ancora il più rifrangente; e se n rappresenta l'indice di rifrazione, quando il raggio luminoso fa passaggio dall'uno di essi mezzi nell'altro, il medesimo indice sarà reciproco e rappresentato da $\frac{1}{n}$, quando il raggio passi viceversa dal secondo mezzo nel primo.

Un raggio luminoso può esser sempre rifratto, quando passa da un mezzo men denso e rifrangente ad un mezzo più denso e più rifrangente; perchè in questo caso essendo sen i frazione propria ed n impropria, sarà $\operatorname{sen} r=\frac{\operatorname{sen} i}{n}$ minore dell'unità, e l'angolo r di rifrazione sarà reale. Ma non accade sempre la stessa cosa nel passaggio di un raggio da un mezzo più rifrangente ad un altro meno denso: in questa ipotesi essendo n una frazione propria, la quantità $\operatorname{sen} r=\frac{\operatorname{sen} i}{n}$ risulterà sempre minore dell'unità, e l'angolo r reale, finchè il valore sen i si mantiene inferiore ad n: all'angolo d'in-

cidenza i, per es. K′CB′, di tal grandezza che sia sen $i = n$, corrisponderà un angolo di rifrazione r ovvero ACB retto, e il raggio rifratto rasenterà la superficie AA′ comune ai due mezzi: per un angolo d'incidenza i, per es. K″CB′, maggiore di K′CB′, verrebbe sen $r > 1$, e l'angolo di rifrazione r immaginario; cioè il raggio incidente K″C non potrebbe emergere dal mezzo più denso, ma rifletterebbesi tutto internamente alla comune superficie in CA″ colle leggi di riflessione riferite nel capo precedente. L'angolo d'incidenza, al quale corrisponde un angolo retto di rifrazione, dicesi *angolo limite*, e si ottiene dalla formola sen $i = n$: così essendo $n = \frac{3}{4} = 0,75$ nel passaggio di un raggio luminoso dall'acqua nell'aria, ed $n = \frac{2}{3} = 0,666$ pel vetro ordinario rispetto all'aria, l'angolo limite nel primo caso sarà $= 48° 36'$, e nel secondo sarà $= 41° 48'$ in circa.

Premesse queste nozioni, dobbiamo noi considerare e spiegare col calcolo i fenomeni della luce rifratta principalmente nelle lenti e in altri strumenti ottici: ciò faremo dopo di avere accennata la rifrazione astronomica, che, come si disse nel numero (40°.), produce insieme colla parallassi uno spostamento apparente nella situazione degli astri.

64°. **Rifrazione astronomica.** La terra TT′ è circondata per ogni verso dall'atmosfera HH′ (fig. 216.ª); e questa può riguardarsi come composta di strati sferici, concentrici alla medesima terra e sottilissimi, nei quali la densità, costante in ciascuno, va crescendo incessantemente dal più alto al più basso. Quindi è che un raggio luminoso AM, il quale provenga da un astro A, all'entrare dallo spazio vuoto nell'atmosfera in M, non seguirà la via retta AMT′; ma rifrangendosi continuamente e accostandosi alle perpendicolari, ossia ai raggi condotti dal centro C ai punti di passaggio da uno strato atmosferico in un altro, descriverà una curva MNT concava verso la superficie terrestre, e per tal modo arriverà all'occhio di un osservatore situato in T: questi ricevendo così il raggio luminoso nella direzione dell'ultimo elemento della curva,

dovrà vedere l'astro A secondo la tangente TA', e perciò lo riferirà al punte A' della sfera celeste. Adunque come la parallassi abbassa gli astri sotto la loro posizione reale, così per converso la rifrazione della luce nell'attraversare l'atmosfera, gli innalza in uno stesso circolo verticale; e l'angolo ATA', che ne misura l'elevazione, è ciò che dicesi *rifrazione astronomica*: va questa scemando insieme coll'angolo d'incidenza dall'orizzonte al zenith; sicchè dessa è nulla per un astro che passa al zenith Z di un osservatore T, ed è massima e valutata fin presso a 33' per un astro veduto all'orizzonte TO.

65°. Segue da ciò 1. che gli astri si trovano ancora sotto l'orizzonte o sono di già tramontati, quando si vedono nascere o approdare al medesimo orizzonte; e il disco solare, il cui diametro apparente è quasi di 33', si osserverà interamente, quantunque abbia già traversato l'orizzonte e lo tocchi col suo lembo superiore. — 2. Che il sole non potrà da noi osservarsi, quando sia depresso più di 33' sotto il nostro orizzonte; ma allora i suoi raggi ripiegandosi sempre per rifrazione e procedendo per un cammino curvilineo, arrivano tuttavia ad illuminare una porzione tanto più ristretta dell'atmosfera a noi soprastante, quanto il sole più si abbassa sotto l'orizzonte. La luce riverberata sino al nostro occhio dalle molecole di questa porzione atmosferica, costituisce ciò che chiamasi il *crepuscolo vespertino*: il quale crepuscolo si va debilitando di mano in mano e cessa del tutto, quando il sole siasi abbassato di 18 gradi in circa sotto l'orizzonte; come, e converso, per un'uguale depressione solare incomincia il crepuscolo *mattutino*, e la sua luce va quindi crescendo sempre più fino allo spuntar del sole. — 3. Che il sole e la luna nell'orizzonte o presso al medesimo, debbono mostrarsi ai nostri sguardi sotto una forma ovale. Perchè da una parte il diametro apparente di questi astri essendo maggiore di mezzo grado, il lembo superiore del loro disco nell'orizzonte sarà notabilmente più alto dell'inferiore; e dall'altra parte verso l'orizzonte crescendo rapidamente la rifrazione al diminuire dell'altezza, ne deriva che il lembo inferiore del disco solare o lunare, verrà per la medesima rifrazione sensibilmente più innalzato che il lembo supe-

riore: di tal guisa mentre rimane inalterato il diametro orizzontale del sole o della luna, il loro diametro verticale dovrà sembrare accorciato; e i due astri presenteranno perciò un sensibile schiacciamento, e ci appariranno sotto una forma ovale.

66°. **Rifrazione della luce nelle superficie sferiche.** Sieno μ e μ' due mezzi omogenei separati dalla superficie sferica SAS' (fig. 217.a), ed F' un punto luminoso, situato nel primo mezzo sull'asse o retta F'AF'', che passa pel centro C della superficie: consideriamo un raggio di luce F'M, che si rifrange nel secondo mezzo seguendo la direzione MF'', e cerchiamo la posizione del punto F'', dove il raggio rifratto interseca il detto asse F'AF''.

Dal centro si conduca il raggio di curvatura $CM = r$ al punto d'incidenza: dicasi α l'angolo ACM, e si chiamino δ', δ'' le rispettive distanze F'A, F''A dei punti F', F'' dalla superficie rifrangente SAS': tirate anche le rette MN, CB, CD rispettivamente perpendicolari all'asse, ed ai raggi incidente e rifratto, per ragione dei triangoli simili F''MN ed F''CD, F'MN ed F'BC abbiamo

$$\frac{CD}{CF''}F''M = MN = \frac{CB}{CF'}F'M\,.$$

Onde espresso con n il rapporto costante tra i seni CB e CD degli angoli d'incidenza e di rifrazione, si ricava l'equazione

$$\frac{F''M}{CF''} = \frac{F'M}{CF'}\cdot\frac{CB}{CD} = \frac{F'M}{CF'}\,n,$$

ossia

$$\frac{\sqrt{r^2 + (\delta'' - r)^2 + 2r(\delta'' - r)\cos\alpha}}{\delta'' - r}$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 + (\delta' + r)^2 - 2r(\delta' + r)\cos\alpha}}{\delta' + r}\,n\,;$$

e con questa formola si trova il valore della distanza δ'', per determinare in qualunque caso la posizione del punto F''.

67°. Ma se l' arco SAS' è abbastanza piccolo, quale suol essere negli strumenti ottici, e il raggio luminoso F'M cade nella superficie di separazione vicino all' asse F'AF''; allora potendo farsi senza errore sensibile $\cos\alpha=1$, l'equazione precedente si trasmuta in quest' altra

$$\frac{(\delta''-r)+r}{\delta''-r}=\frac{(\delta'+r)-r}{\delta'+r}\,n\,,$$

ovvero

$$\frac{\delta''}{\delta''-r}=\frac{n\delta'}{\delta'+r}\,,$$

che si può scrivere sotto la forma

$$(\theta)\qquad \delta''=\frac{nr\delta'}{(n-1)\delta'-r}\;.$$

Quindi si conchiude che la distanza δ'' essendo indipendente dall' angolo α, rimane la stessa per tutti i raggi che cadono nella superficie di separazione de' due mezzi, e che perciò questi raggi dopo la rifrazione vanno tutti a riunirsi in un medesimo punto F'', e vi dipingono un' immagine dal punto radiante F': la quale immagine per vero dire è reale o virtuale, secondochè la distanza δ'' risulta positiva o negativa, e i raggi rifratti si raccolgono realmente in un punto F'' nel mezzo μ', ovvero concorrono prolungati in un punto F'' dell' asse nel primo mezzo μ; ciò che dipende dal valore dell' indice n, ossia dalla relativa rifrangibilità de' medesimi mezzi μ e μ'.

Se la superficie di separazione SAS' invece di rivolgere la convessità, come abbiamo supposto, rivolgesse la sua cavità al punto radiante F', allora il raggio r, come diretto in parte

contraria, dovrebbe prendersi negativo, e la formola superiore diverrebbe

$$\delta'' = -\frac{nr\delta'}{(n-1)\delta' + r} = -\frac{nr}{n - 1 + \frac{r}{\delta'}} ;$$

sicchè in tal caso la distanza δ'' emerge positiva o negativa, e l' immagine del punto radiante è reale o virtuale, secondo che esiste $n + \frac{r}{\delta'} <$, ovvero > 1.

Se poi la superficie di separazione fosse piana, sarebbe $r = \infty$, e la formola (θ) ci darebbe $\delta'' = \frac{nr\delta'}{-r} = -n\delta'$; sicchè in quest' altra ipotesi l' immagine si forma sempre dalla parte del punto radiante ed è virtuale, e la sua distanza δ'' dalla superficie di separazione è maggiore o minore della distanza δ' del punto radiante, secondochè l' indice n è più grande o più piccolo dell' unità, e il mezzo μ' è più o meno rifrangente del primo mezzo μ.

68°. **Rifrazione della luce nelle lenti.** Chiamasi *lente* un mezzo qualunque diafano, che sia terminato da due superficie sferiche, ovvero da una superficie sferica e da una faccia piana: quindi si distinguono le lenti in varie specie; e diconsi *biconvesse*, *piano-convesse*, *concavo-convesse*, *biconcave*, *piano-concave*, *convesso-concave* (fig. 218.a) secondo la diversa natura delle loro facce. Le prime tre specie di lenti sono più grosse nel mezzo che alle estremità, le altre per converso sono nel mezzo più sottili: quelle si dicono *lenti di convergenza*, perchè concentrano in un foco reale o fanno divergere in minor grado i raggi che procedono da un punto luminoso; queste per l' opposta ragione si chiamano *lenti di divergenza*.

Asse principale o *asse* di una lente senz' altro, si appella la retta che passa pei centri di curvatura delle sue facce; e se una faccia è piana, l' asse è la retta tirata dal centro della superficie curva per-

pendicolarmente alla superficie piana. Ogni altra retta, condotta obliquamente all'asse principale pel centro ottico, che meglio definiremo in altro luogo, si chiama *asse secondario* della lente.

Le lenti per lo più sono formate di vetro: piccola è la loro larghezza o apertura; ma piccolissima ne è la grossezza, la quale perciò si può trascurare in confronto dei raggi di curvatura e delle distanze focali. Noi le supponiamo tali, e cominciamo dal determinare il foco nelle lenti biconvesse.

69°. Sia LL' (fig. 219ª) una lente sferica biconvessa; C e C' sieno i centri delle due superficie, da cui è terminata; ed r, r' i loro raggi di curvatura. I raggi F'M che provengono da un punto luminoso F' situato sull'asse principale CC', all'entrare dall'aria nel vetro si rifrangono nella superficie anteriore LAL' secondo la direzione MN più vicina alla normale CM; e se non fossero sottoposti ad altra rifrazione, anderebbero quindi a riunirsi tutti nel punto F'' dell'asse, come abbiamo dimostrato di sopra: ma i raggi già rifratti MN, uscendo dal vetro e ripassando nell'aria, si rifrangono nuovamente nella superficie posteriore LA'L' secondo la direzione NF più lontana dalla normale C'N; e così i raggi incidenti, dopo di avere attraversato la lente, dovranno tutti concentrarsi in un punto F dell'asse, dove si trova il punto radiante F'. Quel primo punto dicesi nella lente *foco coniugato* rispetto al secondo punto e ne rappresenta l'immagine: cercasi ora la posizione di un tal foco F, ovvero la sua distanza $FA'=\delta$ dalla lente, posto che si conosca la distanza $F'A=\delta'$ del punto luminoso F' dalla lente medesima.

Dinotando con n l'indice di rifrazione nel passaggio della luce dall'aria nel vetro, abbiamo già veduto nel numero (67°.) che la distanza $F''A=\delta''$ del punto F'', in cui si riunirebbero i raggi vibrati da F' e rifratti nella prima superficie sferica LAL' della lente, vien data dalla formola $\delta''=\frac{nr\delta'}{(n-1)\delta'-r}$. Cotesta formola suppone che i raggi incidenti F'M passino dall'aria μ nel vetro μ', che i medesimi raggi di luce cadano nella superficie di sepa-

razione divergendo da un punto superiore F′, e che questa superficie di separazione sia convessa dalla parte de' raggi incidenti: se i raggi di luce passassero per converso dal vetro μ' nell'aria μ, nella formola dovrebbe scriversi $\frac{1}{n}$ in luogo di n; e se di più i raggi cadessero convergenti in un punto inferiore F″ sulla superficie di separazione e questa fosse concava dalla parte dei raggi incidenti, nella stessa formola converrebbe cangiare il segno algebrico alle quantità δ' ed r, ovvero a due altre quantità analoghe. Ora queste condizioni si verificano tutte pei raggi MN, che si rifrangono nella seconda superficie sferica LA′L′: dunque la distanza δ del loro punto di riunione dalla medesima superficie, dopo la rifrazione avrà un' espressione somigliante a quella di δ''; e solo dovremo porvi $\frac{1}{n}$, $-r'$ invece di n ed r, e alla quantità δ' dovremo sostituire l'altra quantità $-$F″A′ $=-$F″A $=-\delta''$, non considerando la grossezza della lente. Pertanto oltre alla formola precedente sussisterà anche l' altra formola

$$\delta=\frac{\frac{1}{n}r'\delta''}{-\left(\frac{1}{n}-1\right)\delta''+r'}=\frac{r'\delta''}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\delta''+nr'}\ ;$$

e questa seconda, per la sostituzione del valore δ'' dato dalla prima, diviene

$$\delta=\frac{\frac{rr'\delta'}{(n-1)\delta'-r}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{nr\delta'}{(n-1)\delta'-r}+r'}=\frac{rr'\delta'}{(n-1)r\delta'+(n-1)r'\delta'-rr'},$$

ossia

$$(\theta')\qquad \delta=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)-\frac{1}{\delta'}}$$

che si costuma di scrivere eziandio sotto la forma

$$\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta'}=(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right).$$

Quando il punto luminoso è molto distante dalla lente, sicchè sia $\delta'=\infty$, e i raggi cadano sulla lente parallelamente al suo asse; allora la distanza δ prende un valore particolare, che distinto colla lettera δ_1 si esprime per

$$(\theta'') \qquad \delta_1=\frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)},$$

e chiamasi *distanza focale principale* della lente o semplicemente *distanza focale*: il punto F determinato da una tal distanza dicesi *foco principale*, o *foco* della lente senza altra giunta.

70°. Le formole (θ') e (θ'') che abbiamo stabilito per le lenti biconvesse, possiamo applicarle ancora alle altre specie di lenti, mutando convenientemente i segni algebrici e i valori dei raggi r ed r': consideriamo solo alcuni casi.

1. Nelle lenti biconvesse il foco principale è sempre reale, essendo $n>1$, ed $=\frac{3}{2}$ in circa, e risultando perciò positiva la distanza δ_1 nella formola (θ''); ma il foco coniugato di un punto luminoso può essere anche virtuale, perchè nella formola (θ') la distanza δ proviene positiva o negativa secondo i diversi valori della quantità δ'. Se la lente è isoscele, cioè ugualmente convessa dalle due parti, la distanza del foco principale sarà uguale al raggio di curvatura: infatti posto $r=r'$ ed $n=\frac{3}{2}$, la formola (θ'') ci dà

$$\delta_1=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)}=r.$$

2. In una lente piano-convessa il foco principale è pur reale, e la sua distanza dalla medesima lente è uguale al diametro di convessità: perocchè dovendo farsi $r=\infty$ od $r'=\infty$, secondochè si rivolge al punto radiante la superficie piana ovvero la superficie convessa della lente; dalla formola $(6'')$ emergerà $\delta_1 = 2r'$ nel primo caso, e $\delta_1 = 2r$ nel secondo. Quanto al foco coniugato di un punto luminoso in una lente piano-convessa, la formola (θ') ci mostra che esso è reale, se la distanza δ' del punto radiante è maggiore del raggio di convessità diviso per $n-1$; e che per contrario è virtuale, se la distanza δ' è minore del detto rapporto. In vero supponendo che al punto luminoso sia rivolta per es. la faccia convessa della lente, abbiamo $r'=\infty$, e per conseguenza

$$\delta = \frac{1}{\frac{n-1}{r} - \frac{1}{\delta'}};$$

dunque la distanza coniugata δ riesce positiva o negativa, e il foco corrispondente è reale o virtuale, secondochè esista $\frac{n-1}{r} >$ ovvero $< \frac{1}{\delta'}$, ossia $\delta' >$ ovvero $< \frac{r}{n-1}$. La stessa cosa si conchiude nel caso che al punto radiante si presenti la superficie piana della lente.

3. In una lenta concavo-convessa o *menisco* di contorno tagliente il foco principale è reale, purchè il raggio di convessità sia minore del raggio di cavità. Imperocchè al punto radiante o si oppone la faccia convessa della lente, oppure la faccia concava: nel primo caso r esprimerà il raggio di convessità, ed r' quello di cavità che dovrà prendersi negativo; quindi essendo per ipotesi $r < r'$, ossia $\frac{1}{r} > \frac{1}{r'}$ quanto al valore numerico, si avià la distanza focale

$$\delta_1 = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)} > 0,$$

e sarà reale per conseguenza il foco della lente. Nel secondo caso dinota r' il raggio di convessità, ed r il raggio di cavità che deve farsi negative; perciò essendo per ipotesi $r' < r$, ossia $\frac{1}{r'} > \frac{1}{r}$, si avrà pure

$$\delta_1 = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)} > 0 ,$$

e il foco principale della lente sarà reale. Quando poi le due superficie del menisco hanno un' uguale curvatura, allora il foco coniugato sarà virtuale e cadrà nello stesso punto radiante: perchè in questa ipotesi i due raggi r ed r' essendo contrarii di segno ed uguali fra loro, la formola (θ') ci dà

$$\delta = \frac{1}{(n-1)\left(\pm \frac{1}{r} \mp \frac{1}{r'}\right) - \frac{1}{\delta'}} = -\delta' ;$$

e così dalla condizione negativa della distanza δ si deduce che il foco coniugato è virtuale, e dalla sua uguaglianza colla distanza δ' s' inferisce che il medesimo foco coincide col punto radiante.

4. Nelle lenti biconcave il foco coniugato o principale è costantemente virtuale: ciò apparisce chiaro dalle due formole (θ') e (θ''), dove essendo positiva la differenza $n - 1$, e negativi i raggi r ed r', le distanze focali δ e δ_1 non possono avere se non un valore negativo. Facilmente s' intende, come sieno pur virtuali i fochi nella quinta e sesta specie di lenti, cioè nelle lenti piano-concave, in cui si ha $r = \infty$ ed $r' < 0$, e in una lente convesso-concava o *menisco* di contorno cilindrico, purchè il raggio positivo di

convessità sia numericamente maggiore del raggio negativo di cavità.

71°. Esaminiamo anche il caso, in cui le due superficie della lente si suppongono piane, e divengono infiniti ambidue i raggi r ed r'. In siffatta ipotesi la formola (θ') riducesi a $\delta = -\delta'$, come in un menisco che ha uguali le opposte curvature; perciò il foco coniugato anche nel caso presente è virtuale, e cade nello stesso punto radiante: vale a dire i raggi che attraversano un vetro di piccolissima grossezza terminato da facce piane e parallele, non soffrono veruna deviazione, e sembreranno all' uscita divergere da quello stesso punto, onde si dispergevano innanzi al loro ingresso nel vetro.

Quando la grossezza del vetro a facce piane e parallele non è insensibile; allora sebbene il foco non cada nel punto radiante e si avvicini più al vetro, nondimeno i raggi emergenti sono sempre paralleli ai rispettivi raggi incidenti. Invero sia VV' (fig. 220a) il vetro a facce parallele, ed F'M uno dei raggi emanati dal punto luminoso F': questo raggio all'entrare nel vetro si ripiegherà secondo MN, accostandosi alla normale della prima superficie nel punto M d' incidenza; e all' uscire dal medesimo vetro si rifrangerà nuovamente secondo NE, allontanandosi dalla normale della seconda superficie nel punto N d' incidenza. Ora il raggio emergenta NE è parallelo al raggio incidente F'M, incontrando così il suo prolungamento l' asse F'A in un punto F men distante dal vetro che il punto radiante F': perocchè dinotando con i ed r gli angoli d'incidenza e di rifrazione nella prima faccia, con i' ed r' gli angoli pur d' incidenza e di rifrazione presso la seconda faccia, abbiamo (63°.)

$$\frac{\text{sen}\, i}{\text{sen}\, r} = n = \frac{\text{sen}\, r'}{\text{sen}\, i'} \;;$$

dunque essendo $r = i'$ per ragione dal parallelismo delle due facce del vetro e delle loro normali, sarà pure l' angolo $i = r'$, e conseguentemente il raggio NE parallelo al raggio F'M.

72°. **Centro ottico nelle lenti.** Nelle superficie di una lente LL′ (fig. 221.a) e vicino all'asse principale AA′, presi di qua e di là due punti tali B e B′ che i piani tangenti, condotti pei medesimi punti, sieno sensibilmente paralleli; e quindi tirata la retta BB′, chiamasi *centro ottico* della lente il punto O, in cui questa retta incontra il suddetto asse. Ne viene che i raggi di luce, che passano pel centro ottico attraversando la lente, non verranno punto deviati; e potrà un raggio emergente considerarsi come il prolungamento del raggio incidente: la ragione si è, perchè i raggi luminosi che passano pel centro ottico di una lente, si trovano nel caso della luce che attraversa un vetro di piccolissima grossezza a facce piane e parallele, e che, come abbiamo veduto (71°.), continua lo stesso cammino senza alcuna deviazione. Ogni retta condotta pel centro ottico abbiamo già detto che chiamasi *asse secondario* della lente.

Or nella lente LL′ un punto luminoso H′, posto sopra un asse secondario H′H, deve avere il suo foco o immagine in un punto H situato sul medesimo asse. Imperocchè siccome i raggi emessi da un punto F′ dell'asse principale si riuniscono dopo due rifrazioni in un altro punto F, così i raggi del punto luminoso H′ debbono dopo di avere attraversato la lente concentrarsi tutti in un solo punto H: ma tra i raggi che partono dal punto H′ e cadono sulla lente, quello che coincide coll' asse secondario H′H e passa pel centro ottico, non è punto deviato e al suo uscir dalla lente segue la direzione del medesimo asse: dunque il punto comune H, in cui dopo la seconda rifrazione si raccolgono i raggi di luce vibrati dal punto H′, deve necessariamente trovarsi nell' asse secondario H′H.

73°. **Immagine di un oggetto nelle lenti.** Poste le cose del numero precedente, sia F′H′ un oggetto collocato di fronte alla lente LL′: l'immagine del punto estremo F′ si formerà nel foco coniugato F sull' asse F′OF, e quella dell' altro punto estremo H′ si formerà in H sull' asse secondario H′OH; per conseguenza l' immagine lineare di tutto l' oggetto F′H′ sarà rappresentata dal-

la retta FH. Cercasi la relazione tra le grandezze dell' oggetto e della sua immagine.

Poichè possono riguardarsi come uguali sì le due rette OF ed OH, e sì le altre due OF′ ed OH′; perciò i due triangoli OFH, OFH′ saranno isosceli e simili. Quindi per la piccola grossezza della lente essendo prossimamente $OF = A'F = \delta$, ed $OF' = AF' = \delta'$, avremo la proporzione $FH : F'H' = OF : OF' = \delta : \delta'$; la quale colla sostituzione del valore δ già trovato di sopra (69°. θ'), ci darà

$$FH = \frac{\delta}{\delta'} F'H' = \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\delta' - 1} F'H',$$

che è la relazione domandata tra la grandezza lineare dell' oggetto e la grandezza dell immagine prodotta dalla rifrazione nelle lenti.

Ora se scrivasi di nuovo l' equazione (θ''), e se il valore della quantità $(n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$ quinci ricavato che è $\frac{1}{\delta_1}$ si ponga nell' equazione (θ') e in quella che abbiamo stabilita ultimamente, si avranno le tre formole

$$(\theta''') \quad \begin{cases} \delta_1 = \dfrac{1}{(n-1)\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'}\right)}, \quad \delta = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\delta_1} - \dfrac{1}{\delta'}}, \\[2ex] FH = \dfrac{\delta_1}{\delta' - \delta_1} F'H', \end{cases}$$

per le quali rispettivamente si determinano il foco principale di una lente, il foco coniugato di un punto radiante, e l' immagine di un oggetto luminoso.

74°. Aberrazione di sfericità e di rifrangibilità nelle lenti. Come negli specchi, così nelle lenti la loro figura sferica

fa sì che i raggi provenienti da un punto luminoso e rifratti nelle parti più lontane dall' asse non concorrano esattamente in un sol punto o foco: da ciò deriva anche nelle lenti un difetto opposto alla formazione distinta delle immagini, o *un' aberrazione di sfericità* in longitudine ed in latitudine; la quale aberrazione si determina con un calcolo più complesso, ma per un modo somigliante a quello, onde nel capo precedente abbiamo determinato la duplice aberrazione di sfericità negli specchi. Parimente nelle lenti si formano le *caustiche per rifrazione*, come negli specchi hanno luogo le caustiche per riflessione: in generale le caustiche di rifrazione sono le linee o le superficie più illuminate che lo spazio circonvicino, e costituite da quella serie di punti, in cui si tagliano successivamente a due a due i raggi rifratti alla superficie che separa due mezzi l' uno dall' altro.

Intercettando con un diaframma i raggi luminosi che cadono vicino al lembo di una lente qualunque, possiamo rimediare in parte al difetto dell' aberrazione di sfericità: per annullare al tutto cotesta aberrazione, converrebbe dare alle due facce della lente una curvatura particolare che vien determinata dal calcolo, ovvero converrebbe fare una tal combinazione di lenti, che l' una di queste distruggesse il difetto dovuto alla forma sferica dell' altra.

75°. Oltre all' aberrazione di sfericità, si manifesta pur nelle lenti un altro difetto, che è distinto col nome di *cromatismo* o *aberrazione di rifrangibilità*. Finora nella teoria della rifrazione noi abbiamo supposto che la luce incidente fosse semplice e di un dato colore, ovvero che i diversi elementi, onde è composta la luce bianca, nel passaggio di questa da un mezzo a un altro fossero tutti soggetti a una medesima deviazione; ma in realtà la cosa non succede così. Perocchè se in una camera oscura s'introduce per un piccolo foro circolare un fascetto di luce solare o bianca, e si fa quindi passare per un prisma triangolare di vetro, si vedrà che la medesima luce, ricevuta dopo tale passaggio su di una carta bianca, disperdesi in uno spazio angolare e presenta una figura allungata e tinta dei colori dell' iride: la larghezza di questa figura o spettro solare è uguale al diametro di quello stes-

so circolo che il fascetto luminoso avrebbe formato sul piano verticalo della carta, se non avesse attraversato il prisma; ma la sua lunghezza è circa quattro volte maggiore della larghezza. Nel medesimo spettro si distinguono principalmente sette colori diversi che, secondo l' ordine di disposizione, sono il *rosso*, l' *arancio*, il *giallo*, il *verde*, l' *azzurro*, l' *indaco* o il *violaceo*; e secondo il grado di maggiore rifrangibilità seguono un ordine inverso: però dall' uno all' altro coloro non si passa per un salto deciso, ma per una sfumatura continua; sicchè moltissimi debbono essere i tratti dello spettro diversamente coloriti. I raggi dei sette colori che abbiamo nominato, se si lasciano passare ciascuno a traverso di un nuovo prisma, essi si rinfrangeranno bensì un' altra volta, ma non si vedranno più scomporsi in raggi di nuovi colori: quindi que' sette raggi diconsi elementari o *semplici*, la luce bianca si compone di tutti e sette i colori, e dalla combinazione di due o più colori semplici nascono diversi altri colori, i quali tuttochè composti sono talora somigliantissimi a qualcuno di quelli che si osservano nello spettro solare.

Lo spettro si ottiene colla luce di qualunque sorgente diversa dal sole: i raggi non sono di specie differenti da quelle che abbiamo citato, ma spesso manca qualcuno dei colori che formano lo spettro solare. Si in questo spettro, come in quelli prodotti dalla luce di altra sorgente, veggonsi moltissime righe trasversali, or tutte nere ed ora splendenti di particolar luce, le quali sono irregolarmente distribuite per la lunghezza dello spettro: pare che la cagione di questo righe sia quella stessa, onde procedono i colori do' corpi. Como un corpo ci apparisce bianco, se cadendo su di esso una luce bianca, le sue molecole sono disposto a concepire le vibrazioni proprie di tutti i raggi elementari e a trasmetterle quindi pur esse all' etere circostante; o per converso il corpo ci apparisce nero o tinto di un particolar colore se alla superficie si spengono lo onde dell'etere corrispondenti a ciascun raggio luminoso, o se le molecole superficiali non sono capaci di vibrare all' unisono che con una o solo con alcune specie di luce: così i fenomeni identici delle righe colorate od oscure che si os-

servano nello spettro di un corpo luminoso, dovranno attribuirsi a una medesima cagione; cioè alla proprietà che hanno le molecole del corpo luminoso o di altro corpo incandescente attraversato dalla luce, di ricevere ed eccitare nell' etere le vibrazioni di alcune specie di raggi, ovvero di assorbire queste determinate specie di raggi e di spegnere nell' etere le relative vibrazioni. Adunque dalla natura de' corpi luminosi ed incandescenti dipendono le righe dei loro spettri, e dalle proprietà di queste righe possono conoscersi i corpi che abbruciano nella fotosfera del sole e delle stelle fisse, ed anche scoprirsi nuovi corpi semplici, come di fatto si sono scoperti recentemente.

Ma per tornare alla materia principale di questo numero, è manifesto che se la luce bianca è composta di diversi colori, e se la rifrangibilità dei colori di specie differente non è la stessa per tutti ma cresce dal rosso al violaceo, i raggi di luce bianca che partono da un punto e attraversano una lente, dovranno tutti dividersi in più raggi elementari, e questi non potranno concentrarsi in un punto, ma occuperanno un certo spazio intorno al foco: quindi avviene che nelle lenti l' immagine di un punto radiante o di un oggetto luminoso non sia nitida e distinta, ma sia invece circondata verso i lembi dai colori dell' iride. Questo è il difetto che chiamasi *cromatismo* o *aberrazione di rifrangibilità*; e per correggere un tal difetto sogliono accoppiarsi insieme due lenti composte di cristalli diversi (flint-glass e crown-glass) e di tal curvatura, che l' una di esse riunisca di tanto i raggi estremi dello spettro, di quanto l' altra li disperde: le lenti corrette e liberate dall' aberrazione di rifrangibilità si chiamano *acromatiche*, e *acromatici* si dicono quegli strumenti ottici che sono composti di cosiffatte lenti.

76°. Innanzi di chiudere il presente capo, vogliamo accennare i fenomeni della polarizzazione e della doppia rifrazione della luce, dei quali si tratta più ampiamente nella Fisica sperimentale.

Un raggio di luce, entrando in alcuni mezzi, per es. nel carbonato di calce cristallizzato o *spato d' Islanda*, si divide in due raggi di

uguale intensità, i quali deviano ciascuno dalla direzione incidente; e così la rifrazione non è semplice ma doppia, e due sono le immagini di un punto luminoso o di un oggetto veduto attraverso di certi corpi diafani. I gas ed i liquidi generalmente non producono la doppia rifrazione; e se in qualche caso la fanno nascere, l' angolo dei due raggi rifratti è così piccolo, che non può scorgersi se non per mezzo del microscopio: al pari dei gas e dei liquidi non generano la doppia rifrazione quei cristalli che hanno per forma primitiva un cubo od un ottaedro regolare, ovvero un dodecaedro romboidale; tutti gli altri cristalli sono di lor natura birifrangenti, e gli altri corpi pellucidi possono pure acquistare la proprietà della doppia rifrazione per un subitaneo raffreddamento o per una conveniente compressione che alteri la loro struttura interna e cagioni una differenza di densità nelle diverse direzioni. Peraltro nei cristalli birifrangenti vi ha sempre una o due direzioni, secondo le quali il raggio incidente non si parte in due diversamente rifratti, ma si trasmette per mezzo ad essi colla semplice rifrazione: queste direzioni, che del resto non sono rette particolari e di determinata posizione, si appellano *assi ottici dei cristalli*, i quali sogliono perciò distinguersi in cristalli a un solo asse ed in cristalli a due assi; e chiamasi pure *sezione principale* di un cristallo ad un asse il piano che passa per questo medesimo asse, ed è perpendicolare alla faccia del cristallo sulla quale si fa cadere la luce.

Dei due raggi in cui si divide il raggio incidente nei cristalli ad un asse, l' uno segue sempre le due leggi della rifrazione semplice ed è detto *raggio ordinario*, l' altro in generale non le segue e chiamasi *raggio straordinario*. Dico in generale, perchè debbono eccettuarsi due casi. Il primo è quando l' angolo o il piano d' incidenza riesce perpendicolare all' asse ottico del cristallo: allora anche il raggio straordinario va soggetto alle leggi della rifrazione semplice, quantunque il suo indice di rifrazione sia differente da quello del raggio ordinario. Il secondo caso è quando il piano d' incidenza si confonde con una sezione principale: allora pel raggio straordinario si verifica la prima legge della rifrazione

semplice, rimanendo esso nel piano d' incidenza; ma non si verifica la seconda legge, non conservandosi costante il rapporto de' seni degli angoli d' incidenza e di rifrazione.

Quanto ai cristalli dotati di due assi ottici, le leggi della rifrazione semplice sono seguite da ambidue i raggi rifratti, se il piano d' incidenza è perpendicolare alla bisettrice dell' angolo supplementare di quello che formano i due assi; da un solo raggio, se il piano d' incidenza è perpendicolare alla linea bisettrice dell' angolo dei due assi; da nessuno de' due raggi in ogni altra incidenza.

77°. La luce in certe condizioni riceve una tal modificazione, per la quale non presenta più gli stessi fenomeni d' intensità o di direzione che la luce naturale: dicesi allora *luce paralizzata*; e tale diviene per rifrazione doppia o semplice, e per riflessione.

Primieramente la luce si polarizza per la doppia rifrazione. Un raggio di luce, passando per lo spato d' Islanda, si divide in due raggi, ordinario e straordinario, di uguale intensità: ora se ciascuno di questi raggi rifratti, che escono dal cristallo, si fa passare per un secondo cristallo birifrangente, o non si dividerà più in due altri raggi, ovvero si dividerà generalmente in due raggi di ineguale intensità. Imperocchè ecco quello che noi apprendiamo dall' osservazione e dall' esperienza: guardando un punto luminoso od un oggetto attraverso ai due cristalli, in genere noi vediamo quattro immagini, le quali hanno tutte un diverso splendore, tranne solamente il caso che le sezioni principali de' due cristalli facciano tra loro un angolo di 45°: però quando queste sezioni sono parallele o perpendicolari, le quattro immagini si riducono a due sole, una ordinaria e l' altra straordinaria; e di queste due immagini la prima corrisponde ai raggi ordinarii e la seconda ai raggi straordinarii nella prima ipotesi, e viceversa nella seconda ipotesi l' immagine ordinaria corrisponde ai raggi straordinarii e la straordinaria agli ordinarii. Sicchè un raggio di luce già rifratta doppiamente in un cristallo differisce dai raggi comuni ed è polarizzato: perchè nel traversare un altro cristallo birifrangente, o non soffre più la doppia rifrazione,

nè si suddivide in due; oppure i due raggi in cui di nuovo si parte, non sono più di ugual forza, ma diversamente intensi.

Secondamente si polarizza la luce anche per semplice rifrazione e per riflessione. Si faccia cadere un fascetto di luce naturale per es. sopra una lastra di vetro: è noto che la luce incidente in parte penetra nel vetro e subisce la rifrazione semplice, e in parte si riflette con regolarità alla superficie del medesimo vetro. Or se l' angolo di incidenza è di 54° 35′, può facilmente verificarsi che i raggi rifratti o riflessi dalla lastra di vetro, ricevuti che sieno sopra un cristallo birifrangente, si comportano alla medesima guisa dei raggi straordinaril ed ordinarii che abbiano già sofferto la doppia rifrazione in un cristallo di spato islandico: cioè la luce rifratta attraverso alla lastra di vetro trovasi nello stato di un raggio straordinario, che uscisse dallo spato d' Islanda colla sezione principale parallela al piano di rifrazione; e per converso la luce riflessa dalla lastra trovasi nella condizione di un raggio ordinario, il quale uscisse da un cristallo di spato islandico avente la sezione principale parallela al piano di riflessione. Nel caso adunque che consideriamo, sì la luce riflessa come la luce rifratta riconoscesi polarizzata: sotto angoli d'incidenza diversi da 54° 35′, la polarizzazione della luce rifratta o riflessa dalla lastra di vetro non è totale e completa ma parziale, e tanto maggiore quanto gli angoli d'incidenza sono meno lontani dal detto valore. Quando la polarità della luce, generata dalla semplice rifrazione in una lastra di vetro, è parziale; può rendersi completa col far passare i raggi per due o più lastre di vetro, sovrapposte le une alle altre: perchè rifrangendosi per tal modo i raggi luminosi dalle successive lastre, è chiaro che nel passaggio dall' una all' altra lastra verrà polarizzata una porzione sempre maggiore della luce trasmessa.

CAPO IV.

STRUMENTI OTTICI.

78°. Ci rimane a fare l' applicazione delle teorie finora esposte ai precipui strumenti ottici; cioè a que' soli strumenti che ci fanno vedere distintamente gli oggetti piccolissimi o assai lontani, e sono detti *microscopii o telescopii*. Ma per vedere distintamente un oggetto troppo piccolo o troppo lontano non solo è necessario che l' oggetto sia abbastanza ingrandito col mezzo di uno strumento ottico; ma è ancor mestieri che la sua immagine si formi a una certa distanza, la quale è diversa per le varie qualità dell' occhio che rimira l'oggetto, e dicesi *distanza della visione distinta*: per gli occhi ben conformati e senza difetto la distanza della visione distinta è di 3 decimetri in circa, per gli altri è maggiore o minore; e si chiamano presbiti o miopi quelli, che non veggono distintamente gli oggetti minuti se non a distanze più grandi o più piccole dell' ordinaria.

79°. **Microscopio semplice.** Questo strumento consiste in una lente biconvessa LL′ (fig. 222.ª), che si pone tra l'occhio e l' oggetto da osservarsi. Quando l' oggetto F′H′ sia situato fra la lente e il suo foco principale F_1, sicchè abbiasi $\delta' < \delta_1$ e per conseguenza $\frac{1}{\delta'} > \frac{1}{\delta_1}$, allora dalla seconda formola ($6''$. 73°) risulterà negativa la distanza focale coniugata $\delta = A'F$, e perciò sarà virtuale l' immagine di ciascun punto dell'oggetto: tirati quindi per le estremità di questo e pel centro ottico della lente due assi, si dipingerà in FH un' immagine virtuale e diritta di tutto l'oggetto: la quale immagine noi potremo vedere chiaramente, applicando l'occhio in A′, purchè essa oltre all' avere un sufficiente ingrandimento, si formi a una distanza dal punto A′ uguale a quella della visione distinta. Due formole pertanto debbono stabilirsi rispetto al microscopio

semplice: l'una che ci faccia conoscere la distanza δ', in cui si ha a collocare l'oggetto, affinchè la sua immagine si formi alla distanza δ della visione distinta; l'altra che ci dia il rapporto tra le grandezze dell'oggetto F'H', e dell'immagine FH.

Quanto alla prima ricerca, poichè nel microscopio semplice l'immagine dell'oggetto deve esser virtuale; perciò presa negativamente la distanza coniugata δ, la seconda equazione (θ''', 73°) nel caso presente diviene

$$-\delta = \frac{1}{\frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta'}} = \frac{\delta'\delta_1}{\delta' - \delta_1} \,,$$

e quindi si ricava la prima formola domandata

$$(\lambda) \qquad \delta' = \frac{\delta\delta_1}{\delta + \delta_1} \,.$$

Poniamo per es. la distanza focale $\delta_1 = 0^m, 03$: se la distanza della visione distinta per rispetto all'occhio applicato in A' è $\delta = 0^m, 3$; la formola (λ) ci mostra che l'oggetto deve trovarsi alla distanza $\delta' = 0^m, 027$ in circa, perchè la sua immagine si vegga distinta: se poi fosse $\delta = 0^m, 6$ ovvero $= 0^m, 15$; verrebbe prossimamente $\delta' = 0^m, 028$ oppure $= 0^m, 025$ con esattezza.

Quanto alla seconda questione, abbiamo già (73°. θ''') la relazione $FH = \frac{\delta_1}{\delta' - \delta_1} F'H'$ tra la grandezza di un oggetto F'H', e quella dell'immagine FH che formasi col mezzo di una lente: sostituendovi il valore δ' dato dall'equazione (λ), otterremo pel microscopio semplice la seconda formola cercata

$$FH = \frac{\delta_1}{\frac{\delta\delta_1}{\delta + \delta_1} - \delta_1} F'H' = - \frac{\delta_1(\delta + \delta_1)}{\delta_1^2} F'H' \,;$$

la quale, fatta astrazione dal segno, riducesi all' altra

$$(\lambda') \qquad FH = \frac{\delta + \delta_1}{\delta_1} F'H'.$$

È quindi manifesto che nel microscopio semplice l' immagine apparisce sempre più grande del suo oggetto: per uno stesso individuo la grandezza dell' immagine cresce col far uso di lenti, che abbiano sempre minore la distanza focale δ_1; per varii individui l' immagine cresce insieme colla distanza δ della visione distinta, sicchè con una medesima lente l' ingrandimento è maggiore per i presbiti che per i miopi. Così col mezzo di una lente, la cui distanza focale sia $\delta_1 = 0^m, 03$, l' immagine sarà $F = 11$ F'H', cioè undici volte più grande del suo oggetto, se pongasi $\delta = 0^m, 3$: se poi si facesse $\delta = 0^m, 6$ ovvero $= 0^m, 15$; dalla formola (λ') risulterebbe FH $= 21$ F'H', oppure $= 6$F'H'.

80°. **Microscopio composto.** Consideriamo un microscopio composto di due lenti convesse l ed L (fig. 223.a), delle quali la prima si chiama l' *oggettivo* ed è di più corto foco che la seconda detta *oculare*. Si colloca l' oggetto F″H″ presso il foco della lente l, sicchè la sua distanza β' dalla medesima lente sia un poco maggiore della distanza focale β_1: di tal guisa la sua immagine F'H', che giusta la seconda equazione (θ''. 73°) si forma alla distanza positiva

$$(\lambda'') \qquad \beta = \frac{1}{\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta'}} = \frac{\beta'\beta_1}{\beta' - \beta_1}$$

dall' oggettivo l, sarà reale e capovolta; e la sua ampliazione, attesa la terza formola del numero citato, si otterrà dall'equazione

$$(\lambda''') \qquad F'H' = \frac{\beta_1}{\beta' - \beta_1} F''H''.$$

L' immagine $F'H'$ fa da oggetto rispetto all'altra lente L, e per mezzo di questa è osservata dall' occhio applicato in A' : però se l' oculare si accosta o si allontana dall' oggettivo in modo che la prima immagine $F'H'$ trovisi fra la lente L e il suo foco principale, questa medesima lente agirà come un microscopio semplice, e si formerà una seconda immagine virtuale FH; la cui grandezza, ritenute le denominazioni del numero precedente, verrà data dalla formola (λ'), cioè $FH=\frac{\delta+\delta_1}{\delta_1}F'H'$. Sostituendo in questa il valore di $F'H'$ preso dalla equazione (λ'''), avremo l' ampiezza della immagine inversa di un piccolo oggetto $F''H''$, veduto col microscopio composto, cioè avremo

$$(\lambda^{\text{IV}})\qquad FH=\frac{\delta+\delta_1}{\delta_1}\times\frac{\beta_1}{\beta'-\beta_1}F''H''.$$

Ho detto che nel far uso del microscopio composto, conviene avvicinare o allontanare l'oculare dall' oggettivo di modo, che la prima immagine $F'H'$ si formi tra la lente L e il suo foco principale: ma ciò non basta; bisogna inoltre che la distanza Aa fra l' oculare e l' oggettivo sia tale, che la seconda immagine FH si dipinga a una distanza dalla lente L uguale a δ, che è quella della visione distinta per risguardo all' occhio A'. Ora perchè la distanza Aa sia tale quale diciamo, basta che nella sua espressione $Aa=AF'+F'a=\delta'+\beta$ si sostituiscano i valori delle due quantità δ' e β dati dalle equazioni (λ) e (λ'') : così abbiamo

$$(\lambda^{\text{V}})\qquad Aa=\frac{\delta\delta_1}{\delta+\delta_1}+\frac{\beta'\beta_1}{\beta'-\beta_1}\ .$$

Per recare in mezzo un esempio, sieno $\beta_1=0^m,005$; $\beta'=0^m,0051$; $\delta_1=0^m,02$; $\delta=0^m,27$: dalle formole (λ^{IV}) e (λ^{V}) otterremo

$$FH=\frac{0,29}{0,02}\cdot\frac{0,005}{0,0001}F''H''=\frac{0,00145}{0,000002}F''H''=725\,F''H'';$$

$$Aa = \frac{0^m,0054}{0,29} + \frac{0^m,0000255}{0,0001} = 0^m,27362.$$

81°. **Microscopio solare.** Si compone di una o più lenti destinate a concentrare i raggi del Sole su di un piccolissimo oggetto pellucido, e di una lente microscopica che produce una immagine ingrandita del medesimo oggetto. S'introduce per una piccola apertura in una camera oscura un fascetto di raggi solari, che ricevuti e riflessi dallò specchio piano S (fig. 224.ª), si dirigono prima paralleli su di una grande lente convessa L; e da questa uscendo convergenti mediante la duplice rifrazione, vanno quindi ad illuminare fortemente il piccolo oggetto trasparente F'H' che vuole osservarsi: l'oggetto così illuminato è posto un poco innanzi al foco principale di un'altra lente pur convessa *l*; e col mezzo di questa, come coll'oggettivo del microscopio composto, si forma sulla parete opposta o sopra una superficie bianca l'immagine reale e rovesciata FH del medesimo oggetto F'H'.

Ora per esprimere nel microscopio solare l'ingrandimento dell'immagine, abbiamo senza aggiungere altro la terza formola

$$FH = \frac{\delta_1}{\delta' - \delta_1} F'H'$$

del numero (73°.); e in questa formola sono designate con δ' e δ_1 la distanza dell'oggetto dalla lente *l*, e la distanza focale della medesima lente. Fatte per es. $\delta_1 = 0^m, 012$ e $\delta' = 0^m, 012002$; si ricava $FH = 6000\ F'H'$.

82°. Se invece dello specchio piano S che riceve i raggi del Sole, si colloca dinanzi alla lente L uno specchio concavo che rifletta i raggi di una lucerna, situata nel foco dello stesso specchio; allora l'istrumento prende il nome di *lanterna magica*: gli oggetti che si osservano con questa, sono per lo più dipinti su vetri piani; e la loro immagine ingrandita o si forma sopra una parete della camera oscura come nel microscopio, ovvero si dipinge in una

carta traslucida e si rimira per l' apertura di un tubo connesso con lo strumento.

Nello strumento che ora consideriamo, se l' oggetto si avvicina o si allontana dal foco principale della lente l, e così diminuisce o cresce la distanza δ' oltre la distanza focale δ_1, crescerà per converso o diminuirà sì la distanza δ dell' immagine dalla medesima lente, come apparisce dalla seconda equazione $(6''')$ del numero (73°.) scritta sotto la forma

$$\delta = \frac{\delta_1}{1 - \frac{\delta_1}{\delta'}} \quad ;$$

e sì ancora l' immagine stessa FH, siccome ci dimostra immediatamente l' equazione riportata nel numero precedente. Laonde accostando a poco a poco la lente l all' oggetto, sicchè nello stesso tempo diminuisca la distanza δ', e cresca la distanza coniugata δ; l' immagine FH, la quale viene ricevuta su di una tela immobile e trasparente, andrà gradatamente ampliandosi; e così vista l' immagine in una camera buia al di là della tela, comparirà a guisa di uno spettro che da lontano si avanzi a gran passi, e si precepiti con forza sugli spettatori. L' istrumento quando è disposto e ordinato a produrre la detta illusione di fantasmi, distinguesi col nome di *fantasmagorìa*.

83°. **Telescopio astronomico.** Serve questo strumento per osservare gli astri; e consta di due lenti biconvesse, una *oggettiva l* (fig. 225.ª) che è rivolta verso l' astro da osservarsi, l' altra *oculare* L a cui si applica l' occhio in A'.

La differenza tra il microscopio composto e il telescopio astronomico consiste in questo, che nel microscopio la lente oggettiva ha un foco più corto che l' oculare, e l' oggetto è situato poco innanzi al medesimo foco, nel telescopio all' opposto la lente oggettiva è fornita di una distanza focale maggiore che l' oculare, e l' oggetto o l' astro da osservarsi si trova in gran lontananza dallo strumento: nel resto conservandosi la stessa ne' due strumenti la

disposizione delle lenti e dell' oggetto, nel telescopio astronomico come nel microscopio composto si formeranno medesimamente le due immagini F'H' ed FH, reale e virtuale, dell' astro F''H''; e mantenute le stesse denominazioni, varranno anche pel telescopio le tre formole

$$\beta = \frac{\beta'\beta_1}{\beta' - \beta_1} \quad , \quad FH = \frac{\partial + \partial_1}{\partial_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta' - \beta_1} F''H'';$$

$$Aa = \frac{\partial \partial_1}{\partial + \partial_1} + \frac{\beta'\beta_1}{\beta' - \beta_1}$$

già stabilite pel microscopio nel numero (80°). Se non che nel caso presente essendo assai grande la distanza β' dell' astro dall'oggettivo, si può trascurare in suo confronto la distanza focale β_1; e per tal modo le tre formole si riducono alle altre

$$\beta = \beta_1 \; , \quad FH = \frac{\partial + \partial_1}{\partial_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta'} F''H'',$$

$$Aa = \frac{\partial \partial_1}{\partial + \partial_1} + \beta_1 \, .$$

La prima di queste formole ci mostra che l' immagine reale F'H' si dipinge nel foco principale della lente oggettiva, e ciò è conforme alla dottrina già esposta intorno alle immagini degli oggetti collocati a grandissima distanza dalla lente: la seconda formola poi e la terza, potendo d' ordinario trascurarsi la distanza focale ∂_1 dell'oculare rispetto alla distanza ∂ dell'immagine FH dalla medesima lente oculare, si rendono anche più semplici e divengono

$$(\lambda^{vi}) \qquad FH = \frac{\partial}{\partial_1} \; \frac{\beta_1}{\beta'} F''H'', \quad Aa = \partial_1 + \beta_1 .$$

Per la seconda di queste ultime formole è chiaro che per vedere distinta l' immagine di un astro col mezzo del telescopio, la distanza delle due lenti deve essere uguale alla somma delle loro lunghezze focali; ciò che si verifica, quando si trovino in uno stesso punto intermedio i fochi dell' oggettivo e dell'oculare. Quanto alla prima formola che ci fa conoscere il rapporto tra la grandezza vera dell' immagine e quella del suo oggetto, torna utile ridurla a una relazione equivalente tra le grandezze apparenti dell' astro visto ad occhio nudo e col mezzo del telescopio.

A questo fine indichiamo con ω ed α gli angoli ottici F″A′H″, ed FA′H, ossia le grandezze apparenti dell' astro e della sua immagine: poichè si può omettere la lunghezza del telescopio in paragone della distanza dell' astro dall' occhio, e poichè (42°.) le grandezze lineari apparenti degli oggetti stanno tra loro nella ragione diretta delle grandezze vere e nella inversa delle distanze dall' occhio; perciò avrà luogo la proporzione

$$\alpha:\omega=\frac{FH}{FA'}:\frac{F''H''}{F''A'}=\frac{FH}{FA}:\frac{F''H''}{F''a'}=\frac{FH}{\delta}:\frac{F''H''}{\beta'}.$$

Quindi la prima delle due formole precedenti, che si riduce alla proporzione $\frac{FH}{\delta}:\frac{F''H''}{\beta'}=\beta_1:\delta_1$, può trasformarsi in quest' altra $\alpha:\omega=\beta_1:\delta_1$; e così nel telescopio astronomico l'ingrandimento o il rapporto tra le grandezze apparenti dell' immagine e dell' astro è dato dal rapporto della lunghezza focale dell' oggettivo alla lunghezza focale dell' oculare. Supposto che sieno per es. $\beta_1=8^m,64$ e $\delta_1=0^m,079$; l' ingrandimento o la forza amplificativa del telescopio sarà $=109$ in circa: adattando diverse lenti oculari a un telescopio che conservi sempre la stessa lente oggettiva, si ottengono differenti ingrandimenti; ma la chiarezza dell' immagine dipinta nel fondo dell' occhio va sempre scemando, a misura che si amplifica la superficie della pittura.

84°. **Telescopio o cannocchiale terrestre.** Le immagini degli oggetti osservate col telescopio astronomico sono inverse;

il cannocchiale terrestre le rovescia nuovamente, e le fa apparire diritte come gli oggetti rappresentati: esso è perciò composto di due telescopii astronomici; o meglio di una lente oggettiva L, e di tre lenti oculari uguali L′, L″, L‴ (fig. 226ª). La lente oggettiva L genera presso il suo foco l'immagine inversa F″H″ di un oggetto lontano F‴H‴: quindi siccome la prima lente oculare L′ si dispone in modo che abbia il suo foco principale in F″, perciò i raggi che partono da ciascun punto della prima immagine F″H″, escono dalla lente L′ paralleli al rispettivo asse, e l'occhio applicato alla medesima lente vedrebbe ad una distanza grandissima un'altra immagine I dell' oggetto. Di che le due lenti L ed L′ agiscono a guisa di un semplice telescopio astronomico: per conseguenza chiamando β_1 ed ε_1 le loro distanze focali, β' ed ε le distanze dell' oggetto da L e dell' immagine I da L′, giusta la formola (λ^{vi}) del numero precedente, avremo

$$I = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta'} F'''H'''.$$

Questa immagine I è rovesciata, e si raddrizza per mezzo delle altre due lenti, le quali fanno l' ufficio di un altro telescopio semplice rispetto ad I considerato come oggetto assai lontano.

Pertanto i raggi che partono da ciascun punto di F″H″ ed escono paralleli dalla lente L′ come se provenissero da un oggetto assai lontano I, dopo avere attraversato la terza lente L″, vanno a formare, come è chiaro, un'immagine reale e diritta F′H′ nel foco principale della medesima lente L″: in fine col mezzo della quarta lente L‴ si produrrà, come nel telescopio astronomico, un'ultima immagine FH dell'oggetto; e questa immagine si farà vedere pur diritta all'occhio applicato in L‴. Or chiamando θ_1 e δ_1 le distanze focali della terza e quarta lente, θ' e δ le rispettive distanze dell'oggetto I da L″ e dell'immagine FH da L‴, avremo pel secondo elemento del cannocchiale

terrestre una formola somigliante a quella che abbiamo scritta pel primo elemento, cioè

$$\mathrm{FH} = \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \frac{\theta_1}{\theta'} \mathrm{I}.$$

Eliminata la quantità I dalle due formole, risulterà la grandezza lineare dell' immagine osservata relativamente al suo oggetto, e sarà

$$\mathrm{FH} = \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \frac{\theta_1}{\theta'} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta'} \mathrm{F'''H'''}.$$

Ma poichè sono uguali per ipotesi le lenti oculari, e le due distanze ε e θ' sono infinite, si avrà perciò $\varepsilon_1 = \theta_1$ ed $\varepsilon = \theta'$: dunque la formola diviene più semplice, e riducesi a quest'altra

$$\mathrm{FH} = \frac{\delta}{\delta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta'} \mathrm{F'''H'''}.$$

Una tal formola è identica colla formola (λ^{v}) già ottenuta nel telescopio astronomico: quindi anche pel cannocchiale terrestre si conchiude che la grandezza apparente di un oggetto veduto collo strumento sta alla grandezza apparente del medesimo oggetto osservato ad occhio nudo, come la lunghezza focale dell'oggettivo sta alla lunghezza della lente oculare.

85°. **Cannocchiale di Galileo.** Udita appena la invenzione fatta nelle Fiandre, di uno strumento che ravvicinava alla vista di un osservatore gli oggetti lontani, Galileo senz' altro sapere si applicò tosto pel primo alla costruzione di un cannocchiale, col quale scoprì poscia i satelliti di Giove, le fasi di Venere, le montagne della Luna, e molti altri fenomeni intorno ai corpi celesti. Consiste il cannocchiale di Galileo in due lenti (fig. 227ª), delquali l'oggettiva *l* è biconvessa, e l'oculare L è per contrario biconcava. La prima lente *l* produce un' immagine F'H', reale ed inversa, dell' oggetto F''H'' che trovasi innanzi al foco principale della medesima lente: ma come tra l'oggettivo *l*, e la immagine

F'H'. è posta la lente divergente L; così i raggi che provengono da ciascun punto dell'oggetto, per es. dai punti estremi F'' ed H'', dopo il loro passaggio per l e avanti di concorrere nei rispettivi fochi coniugati F' ed H', incontrano l'oculare biconcava L che li fa divergere e camminare, come se procedesssero dai punti F ed H. Di tal guisa formasi tra le due lenti una seconda immagine FH, virtuale e diritta, dell'oggetto F''H''; e questa è l'immagine che si osserva dall'occhio applicato in A'.

Il cannocchiale di Galileo non differisce dal microscopio composto se non in questo, che la sua lente oculare essendo biconcava, ha negativa (70°. 4) la distanza del foco principale. Laonde ritenute le stesse denominazioni, e cangiata solo δ_1 in $-\delta_1$, sussisteranno nel presente caso le stesse formole che nel microscopio composto (80°. λ'', λ''', λ^{v}), cioè

$$(\lambda^{vii}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = \dfrac{\beta'\beta_1}{\beta'-\beta_1}\,, \quad FH = -\dfrac{\delta-\delta_1}{\delta_1}\,\dfrac{\beta_1}{\beta'-\beta_1}\,F''H''\,; \\[2ex] Aa = \dfrac{\beta'\beta_1}{\beta'-\beta_1} - \dfrac{\delta\delta_1}{\delta-\delta_1}\,. \end{array} \right.$$

Se l'oggetto da osservarsi non è molto distante, allora le formole (λ^{vii}) non debbono punto modificarsi, e si adoprano così come le abbiamo scritte: colla prima si determina la distanza dell'immagine reale F'H' della lente oggettiva, colla seconda si conosce l'ingrandimento prodotto dal cannocchiale nell'oggetto veduto in FH, e colla terza si stabilisce la distanza che deve frapporsi fra l'oggettivo e l'oculare, affinchè l'immagine virtuale FH sia vista distintamente.

Se poi l'oggetto da ossservarsi sia molto lontano, allora potendo trascurarsi β_1 in confronto della quantità β', la prima formola diviene $\beta = \beta_1$, e ci mostra che l'immagine reale F'H' è situata nel foco della lente oggettiva; e posto ancora che la distanza focale δ_1 sia assai piccola in risguardo della distanza coniugata δ, la terza formola convertesi in quest'altra $Aa = \beta_1 - \delta_1$, e ci dice

che per la visione distinta la distanza delle due lenti deve uguagliare la differenza o la somma algebrica delle loro lunghezze focali, sicchè i rispettivi fochi coincidano in un medesimo punto F. La seconda formola pur si riduce e può scriversi in questo modo

$$\frac{FH}{\delta} = -\frac{\beta_1}{\delta_1} \cdot \frac{F''H''}{\beta'} ;$$

dove rappresentando i due rapporti $\frac{FH}{\delta}$, $\frac{F''H''}{\beta'}$ gli angoli ottici α ed ω, o le grandezze apparenti dell'oggetto veduto col cannocchiale e ad occhio libero, si deduce $\alpha:\omega = \beta_1 : -\delta_1$ come negli altri telescopii; e così l'ingrandimento che è dato dal rapporto delle grandezze apparenti α ed ω, vale il rapporto della lunghezza focale dell'oggettivo alla lunghezza focale dell'oculare.

86°. **Telescopio di Newton.** I telescopii che abbiamo considerato nei numeri precedenti, diconsi *telescopii a rifrazione*; consideriamo ora i *telescopii a riflessione*, cioè quelli in cui la riflessione è combinata colla rifrazione. Nel telescopio a riflessione di Newton i raggi provenienti da un oggetto F'''H''' vanno prima a cadere su di uno specchio sferico concavo SS' (fig. 228ª.) che è adattato nel fondo del cannocchiale, e quindi riflessi formerebbero un'immagine reale ed inversa F''H'': ma siccome fra il centro A e il foco F'' si trova uno specchietto piano P, inclinato ad angolo di 45° sull'asse dello specchio sferico, e sostenuto da un sottile braccio che è fisso allo strumento; così i raggi riflessi dallo specchio sferico sono intercettati dallo specchio piano e rimandati verso un'apertura praticata nel fianco del tubo e munita di una lente convessa L. Di tal guisa, un poco al di là della lente, formasi un'immagine orizzontale F'H' uguale all'altra immagine F''H'' che formerebbesi per il solo specchio sferico; e la medesima immagine F'H' è veduta mediante la lente in FH, come nel microscopio semplice.

Per determinare la relazione tra la grandezza dell'immagine osservata e la grandezza dell'oggetto, si chiami z la distanza AF'''

dell' oggetto dallo specchio sferico, ed r il raggio di questo specchio: avremo (54°. ε')

$$F'H' = F''H'' = \frac{r}{2z - r} F'''H''' .$$

Oltre a ciò, esprimendo con δ_1 la distanza focale della lente L, e con δ la distanza dell' immagine virtuale FH dalla medesima lente, abbiamo pure la formola

$$FH = \frac{\delta + \delta_1}{\delta_1} F'H'$$

già stabilita (79°. λ') per una sola lente convessa o pel microscopio semplice: dunque la relazione cercata ci sarà data dalla formola

$$FH = \frac{\delta + \delta_1}{\delta_1} \cdot \frac{r}{2z - r} F'''H''' .$$

Può questa mettersi sotto l' aspetto $\frac{FH}{\delta} = \frac{r}{2\delta_1} \frac{F'''H'''}{z}$, quando le quantità δ_1 ed r sieno così piccole che possano trascurarsi l'una in confronto della distanza δ, e l' altra in confronto della distanza z: e poichè i due rapporti $\frac{FH}{\delta}$, $\frac{F'''H'''}{z}$ non sono altro che le grandezze apparenti α ed ω dell' oggetto veduto col telescopio e ad occhio libero, perciò esisterà pure $\alpha : \omega = r : 2\delta_1$; cioè la grandezza apparente della immagine starà alla grandezza apparente dell'oggetto, come il raggio dello specchio sferico sta alla doppia distanza focale della lente.

87°. **Telescopio di Grégory.** Prima di Newton, Grégory avea proposto l'uso di due specchi sferici per la costruzione di un telescopio. Ecco come questo progetto fu poi messo in esecuzione. Un grande specchio concavo SS' (fig. **229a** .) è forato

nel mezzo, e produce colla riflessione de' raggi luminosi un' immagine reale ed inversa F″H″ dell'oggetto F‴H‴: questa immagine formasi fra un altro specchietto pur concavo ss', e il suo centro c; onde si genera una seconda immagine reale e raddrizzata F′H′, la quale si osserva colla lente biconvessa L in FH.

Ciò posto, sieno r ed r' i rispettivi raggi dello specchio maggiore, e dello specchio minore; z e z' dinotino le distanze F‴A ed Fa dell'oggetto dal primo specchio SS′, e dell' immagine F″H″ dal secondo specchio ss': avremo (54°. ε')

$$F''H'' = \frac{r}{2z - r} F'''H''' ,$$

$$F'H' = \frac{r'}{2z' - r'} F''H'' = \frac{r}{2z - r} \cdot \frac{r'}{2z' - r'} F'''H''' .$$

Di più rispetto alla immagine osservata con la lente, abbiamo come nel numero precedente $FH = \frac{\delta + \delta_1}{\delta_1} F'H'$; dunque infine la relazione dell'immagine e dell' oggetto, nel presente telescopio ci vien data dalla equazione

$$FH = \frac{\delta + \delta_1}{\delta_1} \cdot \frac{r}{2z - r} \cdot \frac{r'}{2z' - r'} F'''H''' ,$$

88°. Occhio ed occhiali. L' organo della visione è l'occhio, che consiste in un globo un poco sporgente nella parte anteriore, e si compone di diverse membrane ed umori. La membrana esterna, onde l'occhio è avviluppato tutto all' intorno, è trasparente nella parte anteriore visibile, e dicesi *cornea*; è opaca nella parte posteriore invisibile, e chiamasi *sclerotica*. Alla prima succede un'altra membrana, la quale è nera e prende il nome di *coroide* nella parte posteriore, contigua alla sclerotica; è variopinta e distinguesi col nome d' *iride* nella parte anteriore, che trovasi sotto la cornea trasparente: l' iride è munita di un forellino ro-

tondo che forma la *pupilla*, e può dilatarsi e restringersi in modo da non far passare nell' interno dell' occhio se non la quantità di luce necessaria e sufficiente alla visione distinta degli oggetti.

Dietro l' iride, tra la *corona ciliare*, vi ha un umore pellucido e tenace che è detto *cristallino*, ed ha la forma di lente un po' più convessa alla sua faccia posteriore che nell' anteriore: innanzi al cristallino trovasi l' umore *acqueo* che è fluido e limpido, ed occupa la porzione dell' occhio compresa tra la cornea e la lente cristallina; e dietro a questa lente sta un terzo umore che per essere somigliante al vetro fuso dicesi *vitreo*, e riempie tutta la cavità posteriore dell'occhio. L'umore vitreo è circondato per ogni parte dalla *retina*, che si stende sulla coroide, ed è un tessuto di piccoli filamenti o nervi sottilissimi: comunicano questi col *nervo ottico*, ossia con un nervo maggiore, il quale, attraversata la coroide e la sclerotica nel fondo dell' occhio, procede oltre e va in fine a terminare nel cervello.

89°. Essendo l' occhio così costituito, è chiaro il modo con cui si opera la visione. I raggi luminosi, partendo dai singoli punti di un oggetto esterno, entrano divergenti nell' occhio per mezzo della sua pupilla; o trapassando quindi pei diversi umori, si rifrangono così che convergano di nuovo e vadano a raccogliersi in altrettanti punti presso la retina nel fondo dell' occhio: di tal guisa si dipinge sulla retina un' immagine rovesciata dell'oggetto esterno; e questa immagine è veduta o sentita da noi, mediante l' impressione prodotta o il movimento eccitato nei nervetti della retina, e trasmesso da questi al nervo ottico e al cervello.

Il rovesciamento dell' immagine nel fondo dell' occhio, non impedisce che l' oggetto si vegga diritto nella sua posizione naturale; perchè siamo usi di riferir sempre i diversi punti delle immagine ai punti corrispondenti dell' oggetto. E le due immagini che si formano ne' due occhi, non impediscono che veggasi un solo oggetto; perchè esse cadono su parti omologhe della retina, e così nell' anima le due sensazioni si confondono in una sola: allora gli oggetti appariscono duplicati, quando le immagini for-

mansi ne' due occhi in parti dissomiglianti, come avviene a chi prema leggermente col dito un suo occhio da una parte. Finalmente le diverse distanze non impediscono che tra certi limiti un oggetto possa sempre discernersi distintamente: perchè la lente cristallina, per dilatazione o per contrazione della membrana in cui è chiuso l'umore, può rendersi più o meno convessa; e così può accostarsi o allontanarsi dalla retina in modo, che l'immagine dell' oggetto collocato a distanze differenti cada sempre sulla medesima retina.

90°. Vero è che alcuni sono *presbiti* o di lunga vista, nè possono ben distinguere gli oggetti troppo vicini; altri per contrario sono *miopi* o di vista corta, e malamente distinguono gli oggetti lontani. Il presbitismo che è comune ne' vecchi, nasce da mancanza di sufficiente convessità nella lente cristallina, o da una perdita di forza rifrangente negli umori dell' occhio; per cui i raggi di ciascun punto di un oggetto vicino, procedendo con soverchia divergenza, non possono riunirsi a formare l'immagine se non al di là della retina: per converso il miopismo che si trova in molti giovani, deriva da un eccesso di convessità nel cristallino o di forza rifrangente negli umori; di che i raggi provenienti dai singoli punti di un oggetto lontano, andando nell' occhio con soverchia convergenza, si riuniscono e formano l' immagine innanzi di arrivare alla retina, e non sono su questa sensibili. È quindi chiaro che per correggere il presbitismo, bisogna rendere più convergenti i raggi inviati dai punti dell' oggetto, come se questi raggi provenissero da un oggetto più lontano e avvicinassero l' immagine al cristallino, formandola sulla retina: all' opposto per correggere il miopismo, bisogna rendere più divergenti i raggi inviati sotto coni luminosi dai punti dell' oggetto, come se questi raggi partissero da un oggetto piu vicino o allontanassero l' immagine dal cristallino, portandola fino alla retina. Il primo effetto è prodotto da lenti convesse, di cui devono perciò far uso i presbiti, per vedere distintamente gli oggetti vicini; il secondo effetto si ottiene con lenti concave, di cui perciò abbisognano i miopi, per distinguere bene gli

oggetti lontani: peraltro le curvature da darsi alle lenti convesse o concave, di cui sono composti gli occhiali per uso de' presbiti o de' miopi, dipende dal maggiore o minor difetto della vista di chi le adopera; e quindi per dare alle medesime lenti una giusta curvatura e distanza focale, conviene prima sapere a qual distanza dall' occhio la persona vegga più distintamente un oggetto.

Pertanto in primo luogo sia δ la distanza della visione distinta per un presbita, e δ' sia la distanza di un oggetto più vicino al suo occhio: affinchè l' oggetto si vegga distintamente, fa d'uopo che sia trasportato nella sua immagine dalla distanza δ' alla distanza δ, sicchè l' estremità di questa seconda lunghezza sia il foco virtuale e coniugato rispetto al punto estremo della prima lunghezza. Ora si può facilmente determinare con una formola la distanza focale principale δ_1 che deve avere una lente convessa, per produrre alla distanza δ un' immagine virtuale dell' oggetto posto alla distanza δ', e per operare così nel presbita la visione distinta: perocchè pigliando δ negativamente, la seconda equazione (θ'''. 73°) ci darà

$$\delta_1 = \frac{\delta\delta'}{\delta - \delta'} .$$

Poniamo per es. $\delta = 0^m, 81$ e $\delta' = 0^m, 27$; avremo $\delta_1 = 0^m$, 405 per la distanza del foco principale e reale della lente convessa che produce nel presbita la visione distinta.

In secondo luogo sia δ la distanza della visione distinta per un miope, e δ' sia la distanza di un oggetto più lontano dal suo occhio: la lente concava da usarsi dovrà avere una tale distanza focale δ_1, che l'oggetto sia ravvicinato e la sua immagine si formi alla distanza δ. Onde anche in questo caso varrà la formola

$$\delta_1 = \frac{\delta\delta'}{\delta - \delta'} .$$

Facciamo per es. $\delta = 0^m,135$ e $\delta' = 0^m,27$; otterremo $\delta_1 = -0^m,27$ per la distanza del foco principale e virtuale della lente concava, che opera la visione distinta nella persona miope.

FINE

INDICE DELLE MATERIE

PARTE SECONDA — DINAMICA

CAPO I.

Dell'urto de' corpi sferici ed omogenei.

CAPO II.

Movimento di un punto materiale libero.

CAPO III.

Movimento verticale dei gravi.

CAPO IV.

Moto rettilineo dei gravi per i piani inclinati.

CAPO V.

Movimento curvilineo di un punto materiale libero per l' azione di una forza qualunque.

CAPO VI.

Movimento curvilineo di un punto libero per l'azione di una forza centrale.

CAPO VII.

Moto dei gravi lanciati obliquamente all'orizzonte.

CAPO VIII.

Moto dei pianeti intorno al sole e gravitazione universale.

CAPO IX.

Movimento di un punto materiale sopra una curva o superficie fissa.

CAPO X.

Teoria dei pendoli e moto della terra intorno al suo asse.

CAPO XI.

Moto dei sistemi materiali e momenti d'inerzia

CAPO XII.

Movimento dei corpi solidi
intorno a un asse e a un punto fisso,

PARTE TERZA — IDRAULICA

CAPO I.

Equilibrio dei fluidi in generale.

CAPO II.

Equilibrio dei fluidi pesanti.

CAPO III.

Equilibrio dei solidi immersi nei fluidi pesanti.

CAPO IV.

Movimento dei fluidi in generale.

CAPO V.

Flusso dei liquidi per piccoli orifizii aperti nei vasi.

APPENDICE ALLA MECCANICA

PRINCIPII DI ACUSTICA

CAPO I.

Propagazione e velocità del suono.

CAPO II.

Quantità e qualità del suono.

CAPO III.

Strumenti pneumatici.

PRINCIPII DI OTTICA

CAPO I.

Nozioni preliminari e luce diretta.

CAPO II.

Luce riflessa.

CAPO III.

Luce rifratta.

CAPO IV.

Strumenti ottici.

ROMA
TIPOGRAFIA E LIBRERIA DI ROMA
DEL CAV. ALESSANDRO BEFANI
Via delle Stimate 23
1872.